ベクトルあれこれ
—古人の求めたるところを今に

山上　滋

January 27, 2022

Contents

[Crowe] M.J. Crowe, A History of Vector Analysis, 1967, Dover.

[Dugas] René Dugas, A History of Mechanics, 1955, Dover reprint.

1　数と量

量 (quantity) ＝**数**と**単位**の組合せ。また、相互に換算可能な単位の集まりを**次元** (dimension) という。

例えば、長さを表わす $75\,\mathrm{m}$ という量では、75 という数と m という長さの単位の組み合わせになっていて、長さがその次元である。長さを表わす単位は他にもいろいろなものがあり、相互に取り替え（換算）することができ、換算可能な単位をもつ量、すなわち同じ次元をもつ量は相互に比較・加減が可能である。逆に言うと、異なる次元をもつ量は（そのままでは）比較することも加えることもできない。例えば、身長と体重の比較 $170\,\mathrm{cm} > 60\,\mathrm{kg}$ や和 $170\,\mathrm{cm} + 60\,\mathrm{kg}$ は、そう書いただけでは意味をなさない。一方で単位を取り去った $170 > 60$ とか $170 + 60$ は、それが役に立つかどうかは別にして、無次元量として意味をもつ。

単位の選び方は、扱っている現象の大きさ (scale) により、測定の精度とも結びついている。例：$\text{Å} = 10^{-10}\mathrm{m} = 10^{-8}\mathrm{cm}$.

単位（次元）から、積と商の操作により新たな単位（次元を作り出すことができる。例：速さの次元＝長さの次元/時間の次元。

同種の量の比を抽象化したものが実数である。数学的には、個数の比としての数＝有理数、有理数の極限としての実数として認識される。数の加減乗除は、個数についての和と積に由来し、それが実数にまで引き継がれる。そうして交換法則と結合法則が成り立つ。ここでは、次元が一切でてこない。数の導入に当たっては、個数の比としての数と量の比としての数の関係を認識する必要あり。実際、それが数の概念の形成過程でもあったはずで、かなりはじめの段階で量から数を取り出すことがその演算規則の抽出とともに行われたものと思われる。

以下、すべての変数および関数（の値）は、単位を取り除いて無次元化したものを扱うものとする。これにより、数に対する四則演算および冪が自在にできるようになる。なお、当然のことながら、単位を補うことで、数量の間の関係式として利用することも可能。具体例でこのことを確認しておこう。

等比級数の公式

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

であれば、現実的な状況では、同一次元の量 A, B, X についての等式

$$\frac{B}{A-X} = \frac{B}{A}\left(1 + \frac{X}{A} + \left(\frac{X}{A}\right)^2 + \cdots\right)$$

という形を取る。右辺に現れる B/A, X/A が無次元量であることに注意。

指数関数のテイラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

であれば、その現実的な形は

$$e^{X/A} = 1 + \frac{X}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{X}{A}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{X}{A}\right)^3 + \cdots$$

のようになる。具体的に、ある放射性同位体の半減期 (half-life) を H 年とすると、N 年後の残存割合は $e^{-(\log 2)(N/H)} = 1/2^{N/H}$ である、といった具合。指数関数の肩の量は必ず無次元でなければならないことに注意。

問 1.1. 物理で $e^{-\beta E}$ という係数が出てきたとする。E がエネルギーの次元をもつ量であるとき、β の次元はどうか。

三角関数では微積分との兼ね合いで角変数の単位に radian というのを使うのであるが、これは角の大きさを弧の長さ l と半径 r の比で表わしたもの（弧度法）に他ならない。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

というテイラー展開は、この弧度法に関するものであり、角を表わす他の方法（例えば３６０度法）では成り立たない。

問 1.2. $\sin(1^\circ)$ の近似値を求めよ。

このように様々な測定量は数（と単位）を使って表わされることもあり、この意味での数のことを数学では**スカラー** (scalar[1]) と称し、このあとで出てくるベクトル量と区別して使用する。一方、ベクトルとの対比という意味では同じであるが、物理でのスカラーの意味は単なる数というよりも、座標の取り方によらない物理量（したがって次元付き）を表わし、単なる数ではないので、注意すべきである。ついでながら次元の意味も物理と数学では異なっていて、数学における次元は物理でいうところの**自由度**（独立変数の数）というのに近い。以上の違いについては後で詳しく解説する予定である。

物理でいうところの次元に関連して、「次元解析」という面白い考え方（かの Maxwell に由来するという）があるので、振り子の周期を例に実演してみよう。

[1] これはラテン語の秤に由来する言葉で、英語として言うときはスケイラーのように。

周期が振幅に依らないという前提で、関係する量は、おもりの質量 m、振り子の長さ l、重力加速度 g ということで、それぞれの次元が、M, L, L/T^2 ということになる。そこで、周期が $g^a l^b m^c$ の定数（無次元）倍であると仮定すると、

$$(L/T^2)^a L^b M^c$$

が時間の次元であることから、$a+b=0$, $-2a=1$, $c=0$ を解いて、$a=-1/2$, $b=1/2$, $c=0$ となるので、周期は $\sqrt{l/g}$ に比例することがわかる。ちなみに比例定数は次元解析だけではわからないが、2π であることは、運動方程式による扱いからわかる。なお、周期が振幅に依らないというのは、振幅が小さいときの近似に過ぎない。実際、振幅が大きいほど周期が長くなることは、極端な状況を想像してみるとわかる。

問 1.3. 極端な状況とは？

2　力のつりあい

これから何回かに分けてベクトルの考えがいかにして形成されたかを取り上げる。歴史に属することではあるが、それは現在にもつながる確かな流れの上にあり、先達の苦労を追体験する絶好の機会でもある。

さてベクトルの出処といえば何と言っても力のつりあい。そして、力のつりあいと言えば、平行四辺形則 (parallelogram law) である。その歴史（時代は、江戸前期、絶対王政、明から清への頃）であるが、大略

力の分解 Simon Stevin (1605)

運動の分解 Glileo Galilei (1564–1642), Rene Descarte (1596–1660), John Wallis (1616–1703), Christiaan Huygens (1629–1695)

運動の法則 Isaac Newton (1687)

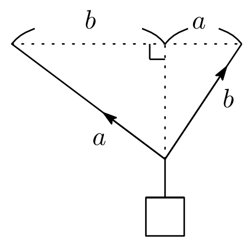
力の釣り合いの実証 Pierre Varignon (1687)

といった経過をたどって確立していった。

力と運動の関係は、Newton によって初めて明確に述べられたわけであるが、両者の間に密接な関係があることはギリシャ時代の昔から認識されていた。運動（速度）というか移動の合成としての平行四辺形則は、古くアリストテレスの著

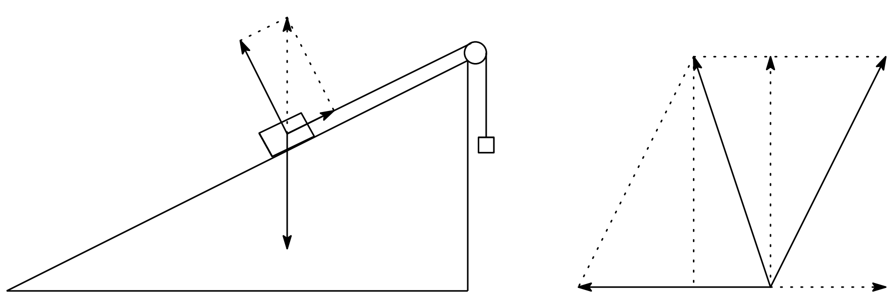
作にあるという。これを根拠に、ベクトルの起源をアリストテレスにまで求める向きもあるが、これはさすがにやり過ぎであろう。もっとも、幾何ベクトルは平行移動なり、という Hermann Weyl[2]の言明[3]の先駆者であったということは言えるかもしれない。

今となっては何でもない力の合成則（平行四辺形則）であるが、それが確立するまでの歴史を振り返ると、自明から程遠いものだったことがわかる。例えば、[Dugas] p.72 によれば、Leonardo da Vinci (1452–1519) は、３つの力のつりあいに関して、下図のような間違った見方をしていたという。まだ機が熟していなかったというべきか。



問 2.1. 上の「分力比」が平行四辺形則に反することを確かめよ。

有名なステヴィンの鎖の思考実験が力の分解・合成に関する平行四辺形則を認識する上での最初のきっかけであったというのはその通りであろう。ただ、ステヴィンの思考実験からわかるのは力の直交分解であり（斜辺を斜面とする直角三角形の場合が本質的)、分力の大きさの比を直角三角形の辺のそれと結びつけた点は画期的であるが、それを、即、平行四辺形則にまで到達したと断定して良いものかどうか。

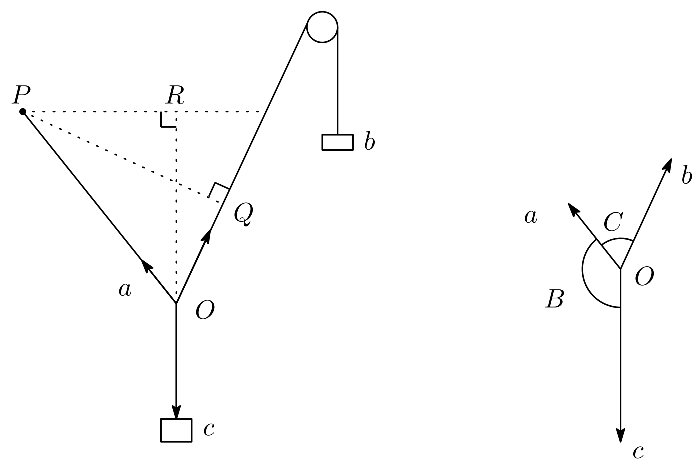


問 2.2. 斜面に沿った力の直交分解を利用し、ステヴィンの思考実験を検証せよ。

[2]ドイツの数学者 (1885–1955)。ヴァイルが言いづらいこともあり、日本ではワイルと呼ばれる。
[3]実は、Gibbs や四元数信奉者 (quaternionist) の Tait も似たようなことを言ってる。

その後も、運動と力の幾何学的性質については、いろいろな人たちによって調べられた。ひとつだけ取り上げると、Gilles de Roberval（上皿天秤の発明者でもある）による、てこの原理を使った、分力の大きさを決める三角形則 (1650) が興味深い ([Dugas], p.152)。

テコの原理 (the law of the lever) は、遠くアルキメデスにまで遡る当時の基本法則であったようで、いろいろな人たちが取り上げている。テコよりも手軽に状況が想像できる「ひもと滑車」をてこに置換えて議論したところがひとつのポイント。得られた図形の線分の比による表示を、初等幾何学（ユークリッド幾何学）の手法で、三角形則のかたちに言い換えたところがもうひとつのポイント。ただ、この段階でも平行四辺形則が認識されていたかというと、それは何とも。後づけでは即座にわかることでも、そのような見方ができるようになるまでには意外に多くの時間を要した、ということはよくある。分力の大きさの比を交角の正弦比と結びつけたものが、即、平行四辺形則であると言ってよいのかどうか。（点 P を支点 (fulcrum) とする仮想的なテコによるトルクの釣り合いから、$c\overline{PR} = b\overline{PQ}$ を導き、それを幾何学的に言い換えることで正弦則[4]が導かれる。）



問 2.3. 平行四辺形則 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$ から正弦則を導け。実は、逆も成り立つ。

その点、ニュートンのあたりまで来ると、力の平行四辺形則の認識が伺える。ただし、Principia[5] の中で、運動の第二法則（力と速度の変化の等値）から、力の合成の平行四辺形則を導く議論は、仮定の内容が不明確であることもあり、明瞭とはいいがたい。また、物体の運動を、慣性運動と力に駆動される運動に分解

[4]三角形の正弦定理と同じ内容であるが、Lami's theorem とも呼ばれる

[5]ラテン語 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica の略なのでプリンキピアという。

して（分解そのものはベクトル的ではあるが）議論している点からは、現在書かれる運動方程式とは別の見方をしていることが示唆される。

一方で、Principia と同じ 1687 年に出版された Varignon の本では、力の釣り合いに限定されるものの（したがって、運動を引き起こす意味での力ではないことに注意）、平行四辺形則および力のモーメントの合成則が明確に述べられている。ちなみに、中学の理科の教科書に載っている、３本のバネ秤で引き合うの図、の実験 (実験装置を Varignon frame という) は、Varignon が 1688 に行ったものである由。当時良く知られていた力の性質の大衆向けデモを行ったといったところ。江沢先生の解説[6]にある、力の合成則は Stevin の思考実験 (Hypomnemata mathematica, 1605) に始まり、Varignon により実証された、ということとは微妙にズレがあるのかも知れない。

Newton–Varignon の時代に至ってなお、ベクトルの概念が確立していたかというと、それは大いに疑問。ここで、ベクトルの概念が何を意味するかを明らかにしないと混乱するので書いておくと、大きさと方向をもった量という素朴なものではなく、相互に足したり引いたりが可能な代数構造を伴ったものとしてのベクトルである。力でいうと分解と合成に相当する部分であるが、それを代数的な演算として演算規則も含めて認識されたかを問題にしている。そのように見てくると、平行四辺形則というのは、ベクトルの和の定義と和の交換法則を導くものであることがわかる。一方、和の結合法則は何に相当するかというと、力の場合、４つ以上の力の釣合いであろう。それを、３つ以上の力の合成則に読み替えるわけであるが、力は確かな「実体」をもった量なので、そのままの形で使われ、結合法則として抽象化がなされていない可能性が高い。数の演算規則の類似物としてベクトルの演算規則を把握できた最初は、やはり、幾何ベクトルにおいてのようである。そこでは、和の結合法則が平行６面体の対角移動と結びつけることで幾何学的に捉えられる。力の性質の発見からさらに２００年近くの時が必要であった。

問 2.4. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ の平行６面体的解釈を与えよ。

まとめると、力や速度の分解・合成則から即座に、ベクトルの演算則が認識されたものではなかったということ。

Remark 1. 上に関連して、Dieudonne はその著書（数学の歴史、１７００－１９００）の中で、古くから使われていた力や速度の概念が幾何ベクトルの概念に結びつくのに多くの時間を要したことは解せない旨、書いてある。しかし、それは後知恵というもので、実際の歴史は螺旋階段の如きもの。座標解析の開発に忙しく、しかも座標解析でほとんどの

[6]江沢　洋「力とはなにか　その歴史と原理」、数理科学１９８９年１１月号

場合間に合ったということであろう。ちなみに座標解析というのは、ほぼベクトルの成分表示に他ならなかった。ということで、ベクトルの成分を使った解析がベクトルの概念そのものに先行して発展を遂げたことは不自然ではない。

Remark 2. Simon Stevin (1548–1620) について補足すると、フランドル（今のベルギー）の人。十進小数をヨーロッパに広める。複式簿記の実践。平均律の研究などなど。有名な斜面の思考実験 (inclined plane) により、力の分解規則の確立に貢献する。ステヴィンも、この思考実験がお気に入りであったようで、著書の表紙の飾り絵にもなっている。

既に述べたように、運動の法則を明確に抽出したのは Newton であった。ただ、Newton が今でいうところのベクトルの概念を認識していたかというと、そこはなかなか難しいところ。力の分解が運動の分解を引き起こすことも正しく認識していたのではあるが。より正確には、運動の法則と運動の分解から力の分解則を導いている。ちなみに、力学の嚆矢といってよい Principia での記述は、座標を一切つかわないユークリッド幾何的なものであった。座標は、Newton の前の世代、Fermat, Descarte らによってすでに発見されており、Newton も当然熟知していたはずであるが、自慢の微積分すら使用を避けているという不思議。機が熟するにはさらなる時間を要したということかも知れない。

Newton の運動の法則を、座標表示による微分方程式系の形に書き表したのは１８世紀のオイラー (Euler) で、それをベクトル値関数に関する方程式として記述してみせたのは Grassmann で１９世紀半ば、Gibbs によるベクトル解析の記法が確立したのは２０世紀に入ってからで、さらに力学の教科書に取り入れられるようになったのは、戦後（２０世紀後半）のことである。実に２６０年以上の長きにわたる紆余曲折（螺旋階段）であった。

3　座標幾何

今から見ると、力学からベクトルへの移行は造作もないことのようであるが、その過程には様々な曲折があった。それはひとことで言うと、すでに述べた座標[7]の発見とその成熟の歴史であり、ベクトルの経緯を語る上でも避けて通ることはできない。

その歴史的に定まった評価では、Fermat と Descarte が座標を導入したことになっている (1636 頃)。その時点では、有向線分とかいう考え方は未だなかったわけで、座標の方がずっと早かったことになる。ただ、その座標というのも、Fermat が利用したのは、原点から x 軸を引いて、次に x 軸上の点から垂直に y 軸を引く、という形のもので、変位ベクトルに近い感覚のものであった。もちろ

[7]coordinates =（数を）整列させたもの、を藤沢利喜太郎が「座標」と意訳した由。

ん、この場合もベクトルの合成規則（平行四辺形則）を認めれば、x, y の移動の順序によらずに点を表すことができるので、違いはないとも言えるが、これは後の時代からの見方を逆入させた解釈とも言える。

いずれにせよ、これ以降、多くの人の改良・発展への寄与を経て座標優位が２００年以上続き、現在に至っている。複素数を平面上の点とみるという複素平面のアイデアもそういった流れの中で出現した。さらには、３次元座標に積の構造を導入する努力がなされ、Hamilton による quaternion の発見 (1843) で一応の決着を見た。この座標優先は、力学の発展についてもいえることで、Euler によるニュートン力学の再構築 (1750 頃) に源を発し、Lagrange-Hamilton の解析力学で一つの頂点に達した。

一方で、当然とも思える座標に依存しない幾何学的実体の数学的把握は、１９世紀まで待たなければならなかった。

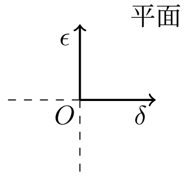
最も古い記録として、Caspar Wessel[8]の仕事があり、1799 に平面と空間の代数構造についての論文「方向の解析的表現」を出版する。後述の Bellavitis に先駆けて、幾何ベクトルの代数構造をとらえ、さらには、平面の場合に、積の構造をも見出し、複素数の幾何学的構成まで行ったと評価されるものの、デンマーク語で書かれていたこと、当時北欧は科学世界の中心から離れていたこともあり、まったく注目されなかった。複素数の部分については上に書いた通りで、記述が曖昧かつ不完全な点はあるにしても、平面の方向単位に 1（実数単位）と i（虚数単位）を割り当てていることから、有向線分とベクトルについての先駆者と言って間違いはないだろう。複素数の幾何学的表示については、その後、Argand (1806) とか Gauss (1831) により再発見が繰り返されることになる。

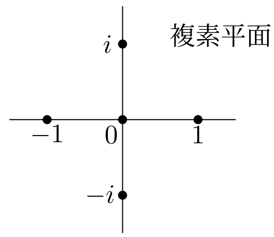
座標と複素平面については周知のことと思うが、ここで Wessel の論文の英訳である On the analytical representation of direction (1797) の初めの方（後半は球面三角法への応用）を見ておこう。

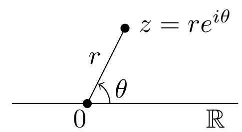
Wessel はまず平面の有向線分としての幾何ベクトルの説明をひとしきり述べる。これは、高校の教科書にあるものと同じ内容なので繰り返さない。その上で、基準となる方向を一つ定めた上で、有向線分の積を、長さについては長さの積で、方向については、基準方向と成す角の和として与える。このような計算規則をどのようにして見出したかの説明はないが、複素数を絶対値と偏角で表わした際の計算規則そのものであるので、複素数の平面表示をまず見出して、それからの逆

[8](1745–1818) ノルウェーの人、デンマークで測量に携わる。

算の可能性もある。







そうして、互いに直交する方向の単位として、δ と ϵ（Wessel は δ ではなく $+1$ を使っている）を用意する。δ、$-\delta$, ϵ, $-\epsilon$ と実軸との成す角がそれぞれ、$0°$, $180°$, $90°$, $270° = -90°$ であることと積の規則から $\epsilon\epsilon = -\delta$ となるので、$\delta = 1$ と同一視すれば $\epsilon = \sqrt{-1}$（すなわち i である）と断じている。（間違いなく複素数を「見て」いる。）

このように定めた和と積が分配法則を満たすことは、単位円周上の点の極表示 $\cos\theta + i\sin\theta$ を経由して三角関数の加法定理に帰着させている。割り算については、積の公式から逆算する形で求めるところは今と変わりない。さらに、1 の冪根と正多角形の点との関係を論じて、「複素平面」のパートが終わる。具体例として

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4i} = 2(\cos 10° + i\sin 10°)$$

その後で、二項展開から指数関数に至るオイラーの計算をこの複素数（二元数）に適用して（詳細はなし）、オイラーの関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を導いている。もちろん、角は弧度法で測る。

問 3.1. 三角関数の加法定理とオイラーの関係式についての指数法則が対応することを確認。また、$\theta = 10° = \pi/18$ についての上で挙げられた例を確かめよ。

問 3.2. $e^{i\theta} = -1$ となる θ をすべて求めよ。$\log(-1)$ をどのように解釈すべきか。

幾何ベクトルの歴史に戻ると、Wessel の仕事の数年後の 1804 年に、Bolzano（あのボルツァーノである）が、座標に依らない 3 次元幾何の記述を試み、その後 synthetic geometry（統合幾何学＝座標を使わない幾何学への回帰）の機運の高まりの下、図法幾何学[9](descriptive geometry) の進展を受けた形で射影幾何学

[9]製図（3 次元図形の 2 次元投影図による記述）の数学的基礎。Monge により 1765 年ごろに与えられた。

= projective geometry (Poncelet, 1822) が確立され、A.F. Möbius の重心座標 (The Barycentric Calculus, 1827) を経て、有効線分の同値類としての幾何ベクトルがイタリアの Bellavitis によって考案された。

Giusto Bellavitis (1835) ”Saggio di applicasioni di un nuovo metodo di Geometria Analitica (Calculo delle equipollenze)”, Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, Padova 5: 244–59.

その後、1860 年ごろまで、いくつかの関連論文を書いているが、[Crowe] によれば、３次元の場合への拡張に失敗したとあり、これは３次元の場合の積の導入についてであろうか。

いずれにせよ、上の論文がきっかけになって、その後、フランス・ドイツを中心に徐々に、その手法が整備され広がっていったということらしい。

4　グラスマンの外延論

かくして Grassmann の登場と相成る。Grassmann 自身は、その父からアイデアを受け継いだということであるが。Crowe2002 によれば、１８３２に始まる研究（思索？）の結果、1840 の ‘Theory of Ebb and Flow’ の著作に最初の成果が記された。そこでは、幾何ベクトルが内積も含めて認識され、Newton の運動方程式が、今、普通に力学の授業で書かれる形で表現されている。のみならず、外積 (exterior product) の萌芽として、向きのついた平行四辺形が論じられているという。

質点（質量 m）の運動を基準点 O からの位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$（時刻 t の関数）として表せば、その速度ベクトルは、微分を使って、

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

で、加速度は速度の微分 $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ として与えられる。さらに質点の運動量（運動の勢い）を $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ で定める。このとき、時刻 t で質点に働く力を $\boldsymbol{f}$ とすれば、運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

が成り立つ。これが今ある力学の教科書に書いてあるニュートンの運動方程式ではあるが、ニュートンはこういったことは書いても言ってもいない。幾何ベクトル（位置ベクトルも）自体がもっとあとの時代のものであることは、前回見たと

おり。くり返しになるが、ニュートンの運動方程式なるものは、プリンキピアが現れて後、多くの人達の労力と長い年月を要して徐々に確立していったというのが、その歴史であった。

Grassmann はその後に続く著作である Ausdehnungslehre[10]（外延論）において、外積を外部に存在する線型量として論じた。ここでベクトルの積について用語の整理をしておくと、一般次元空間における内積と外積は Grassmann による。一方、３次元空間におけるスカラー積とベクトル積は Hamilton による。当初は、Hamilton の流儀（四元数）が強く支持され、Grassmann への理解が進むのはもっと後のことになるが、その過程で、四元数から３次元ベクトルのが分離され、ベクトル解析として整備されたという経緯がある。

スカラー積と内積の区別を曖昧にしても混乱の心配は少ない一方で、ベクトル積と外積は、３次元でも別の概念と思うべきで、両者の間に対応をつける際には、３次元空間の「向き」が必要となる。ベクトルと擬ベクトルの区別と言ってもよい。

さて Grassmann の難解なる外延論 (1844, 1846, 1862) であるが、そこでは、一般のベクトル空間とその上の外積代数に相当するものが展開され、それには３次元幾何ベクトルに対する内積と外積の定式化が特別な場合として含まれる。一般化外積代数の部分は難解であるが、３次元の内積と外積に関する部分は幾何ベクトルを矢印で表しているなど比較的わかりやすい（のちに Gibbs がベクトル解析の整備にあたって参照したというのは、ここの部分であろうか）。その代数構造を解読する形で、今でいうところのベクトル空間の概念が Giuseppe Peano (1858–1932) の 1888 年 の著書 (Geometric Calculus) において完璧に導入された。

なお、グラスマンの外延論であるが、少なくとも、1844 のものは、多くの一流数学者の目にとまったものの、その難解さに、何か意味のあるものを含んでいるらしい、とは思わせても、それ以上の影響は与え難かった。その悪しき印象が、1862 のそれも無視される遠因というべきか。ただ、若い世代に属する Peano は、1862 のそれを読み解くことができて（逆にいうと、読み解くことができる程度にはわかりやすくなっていた)、1870 年代の Cantor の集合論 (Mengelehre) もあるいは刺激になって、Geometric Calculus に結実したように思われる。

以上の幾何ベクトルの重要性・有用性が人口に膾炙するようになるのは、しかしながら、さらに時がたって、Gibbs の Vector Analysis (1901) 以降であった。

[10]Die Wissenshaft der extensiven Grössen oder die Ausdehnunglehre を Principia の如く略して。声に出してみよう、アウス デーヌングス レーレ。最後の「レ」は巻舌で。これを三度唱える。

ちなみに、Cantor の集合論は、１８７４年に始まり、それに続く数年間のことであることを思えば、Peano のベクトル空間の斬新さが際立つ。のみならず、集合の記法で書かれているため、１２０年以上も前の本であるにもかかわらず、今の人が読んでもさほど違和感がない。それが、知られるようになるには、さらに３０年の時を要した。

Giuseppe Peano[11], Calcolo Geometrico secondo l’Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva, Fratelli Bocca Editori, Torino, 1888, pp. XI, 171.

Remark 3. 上でも書いたように、Grassmann は、変位ベクトルの概念およびその二階微分を力のベクトルと同定するという、今、力学の教科書で書かれる形の運動方程式を認識していたようである。ただし、例によって注目されず、Gibbs に引き継がれてようやく普及し始めるようにはなった。いずれにせよ、Newton-Euler-Lagrange-Hamilton の後になってようやく出現した表現形式ではあった。

ちなみに、Newton の扱いは、ユークリッド幾何学的であり（微積分は敢えて表に出さなかった）、座標幾何ですらなかったのであるが、だからこそ運動の第一法則を第二法則と並立させる必要があった。それを座標力学の形として定式化したのが Euler さらには、Euler 伝来の変分法を駆使して、一般座標（拘束系などの）での扱いを容易ならしめるための大幅な書き直しを行ったのが Lagrange であった。解析力学の誕生である。この一般座標に加えて運動量も座標化して装いを新たにしたのが、Hamilton の正準形式。この力学の形式の極致まで到達してもなお、Newton の運動方程式のベクトル表示が得られていなかったという不思議。

まず座標が認識され、その後の長い発展・繁栄ののちに coordinate-free な幾何学が追求されたというのは、面白い。もちろん、coordinate-free な幾何学としては、古くユークリッドのそれがあったのであるが、この度の追求は、座標幾何の成果に触発され支えられた、代数演算・構造を保持しうる形のものに関してであった。

高校では、幾何ベクトルのあとで微積分を習うので、微積分の創始者である Newton は当然、ベクトルの概念をもっていて、運動方程式もベクトル方程式として認識していたのだろうと思い込みがちであるが、それは事実ではなかったということ。歴史は直線的には進まない、複雑な螺旋状の発展かな。

デュドネが、「長い間、運動論と動力学において力や速度の合成に使われていた演算を幾何学に応用しようとしなかったのは驚くべきこと」と感想を述べている。また、「２次元・３次元の座標の使い方は、しばしばごたごたしていて面倒である」とも書いてある。その通りではあろうが、思うに、幾何ベクトルといっても、具体的な計算に乗るのは、その成分表示であり、これはある意味、座標と区別がつかない。幾何ベクトル的な線型性は、直感的には明らかなところもあり、あえて喧伝する必要を感じず、むしろ、幾何学を数の組で代数的あるいは解析的に統制するという新しい方法に、非自明性を感じての、座標（成分）表示派の席巻であったのが実態ではなかったのか。座標（あるいは基底）の取り方の任意性は、一方で、座標変換に対する共変性という微分幾何学的見方も産み、これはこれで、有用であった。一方で、座標の選び方によらない幾何学的実体の回復と記述という点から、今や、高校でも教えられる幾何ベクトルの扱いになったのであろう。教育としては、戦後に属することではある。

[11] 自然数の公理的記述、エスペラント語の提唱者としても知られている。

5　ハミルトンの４元数

複素数を平面と結びつけたようなことを３次元空間でもできないかと思うことは自然である。３次元の有向線分はベクトルとしての意味をもつので、その和とスカラー倍と整合する積の定義が問題となる。複素数にもうひとつの自由度（次元）を付け加えて、数の体系の拡張を試みることになる。しかしながら少し試せば実感できるように、数の体系として分配法則と結合法則を同時に満たすような積が３次元では定めがたいこともわかる。

座標のとり方に依存する形で成分ごとの積を考えると、分配法則と結合法則と交換法則が満たされることは即座にわかるが、そのような安直な方法では２次元の場合に Wessel が考察した複素数が再現しない。

問 5.1. 安直な方法では複素数が得られないことを確かめよ。

紆余曲折の末、1843 年に Hamilton が得た結論は、複素数と平面との対応関係を一旦忘れ、空間ベクトルの基準となる３方向（互いに直交し大きさが 1 の３つのベクトル）$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を３つの虚数単位とみなし、それに実数 1 を積の単位元として付け加えた全部で４次元の数体系である**四元数** (quaternion) を考えるとうまくいくというものであった。すなわち、四元数とは、$q = t + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ (t, x, y, z は実数) の形の「数」[12]を指し、その和と実数倍がベクトル的に定められ（したがって 1 は積の単位元として振る舞う）、四元数どうしの積が分配法則と結合法則の他に Hamilton の関係式

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1 = \boldsymbol{ijk}.$$

を満たすものをいう。

問 5.2. 結合律と分配法則を使って、上の関係式から $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{ji}$ などを導け。とくに、積の交換法則は成り立たない。

ここで、四元数の基本関係式である $ijk = -1$ を「発見」してみよう。ijk は四元数に収まるので、$t + xi + yj + zk$ と表わされるわけであるが、３方向 i, j, k を平等に含む ijk に特定の方向のベクトル成分 $xi + yj + zk$ が現れるのは変なので、$ijk = t$ となるはずである。左から i、右から k を掛けると、$jk = -ti$, $ij = -tk$ を得る。さらに $jk = -ti$ で左から j を掛けた後、右から i を掛ける

[12] より形式的には、実数 t と３次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ の組み $(t, \boldsymbol{v})$ が四元数である。

と $ki=-tj$ もわかる。こうして得られた３つの等式を順繰り掛け、その結果に最後の等式を使うと、

$$-1=ijjkkki=-t^3kij=t^4j^2=-t^4$$

となるので、$t=\pm 1$ でなければならない。$t=-1$ がハミルトンの基本関係式であるが、$t=1$ も実質的に同じものである。というのは、i, j, k の「複素共役」である $-i, -j, -k$ が、$(-i)^2=(-j)^2=(-k)^2=-1$ o よび $(-i)(-j)(-k)=1$ を満たすので、$-i, -j, -k$ を i, j, k に読み替えれば $t=1$ となるからである。

四元数の積が結合法則を満たすことは、多くのパターン（機械的な組み合わせ数は $4^3=64$ 通り）を一々検証する必要があり、単純作業ではあるが視界の悪いものである。一方で、行列代数[13]を使うと次のような実現が可能である。

問 5.3. 次の**パウリ行列**[14] (Pauli matrix)

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

から作られる複素行列 $I=-i\sigma_1$, $J=-i\sigma_2$, $K=-i\sigma_3$ が Hamilton の関係式を満たすことを確かめよ。

四元数はその作り方からスカラー部分とベクトル部分[15]に分かれている。

$$q=t+\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

のように、積を scalar part t と vector part $\boldsymbol{v}$ に分けて表せば、

$$(t+\boldsymbol{v})(t'+\boldsymbol{v'})=tt'-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v'}+t\boldsymbol{v'}+t'\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v'},$$

となる。ここで、$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v'}$ は**スカラー積**、$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v'}$ は**ベクトル積**（クロス積ともいう）と呼ばれるもので、

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v'}=xx'+yy'+zz',\quad \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v'}=(yz'-zy')\boldsymbol{i}+(zx'-xz')\boldsymbol{j}+(xy'-yx')\boldsymbol{k}$$

で与えられる。これらは Hamilton が使い始めた用語であるが、Grassmann が外延論で用いた高次元でも意味のある用語である**内積・外積** (inner product, exterior[16]product) により呼び表わされることも多い。

[13]A. Cayley により 1855 に考案されたもので、四元数発見時にはまだなかったのであるが。

[14]電子の自転角運動量（スピン）を記述するために、W. Pauli により 1927 年に導入された。

[15]実は、scalar と vector という用語はこの四元数の２つの部分を表わすために Hamilton が使い初めたものが、後に一般化されたものである。因みにその語源はラテン語で、それぞれ、はしご—上下の比較—大小が意味をもつ量、運び運ばれるもの—移動量、に由来する。英語としての音は、スケイラァ、ヴェクタァに近い。

[16]inner の対語である outer product は、特殊なテンソル積を表わすのに使われる。

このように、スカラー積もベクトル積も代数的に導入されたのであるが、程なくその幾何学的意味が明らかにされ、

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v'} = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{v'}| \cos\theta, \quad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v'} = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{v'}| \sin\theta\, \boldsymbol{n}$$

という表示も得られた。ただし、$|\boldsymbol{v}|$ はベクトルの大きさを、θ は、２つのベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v'}$ の成す角を、$\boldsymbol{n}$ は、この２つのベクトルのどちらにも直交する単位ベクトルで、$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v'}, \boldsymbol{n}$ が右手系を成すように向きを選んである。

ただ、皮肉にもこのことは四元数と変位ベクトルとの間の食い違いを露呈させるものであり、後に派生したベクトル解析との間に深刻な論争を引き起こすことにもなり、Hamilton はその名声にもかかわらず、幸福とは言い難い晩年を迎えることに相成った。

Remark 4. (t, x, y, z) という思わせぶりな文字遣いは、４次元時空 (space-time) とのつながりを意識したものではあるが、これは実のところ正しくない。実際、四元数体の自己同型群は３次元回転群と同型になり、ローレンツ変換の一部でしかない。これは、四元数の代数構造がスカラーとベクトルを強く分離してしまい、４次元時空の対称性であるローレンツ群を許容できないためである。なお、３次元の回転を記述するには威力を発揮し、近年３Ｄの隆盛とともに再認識されつつある。

さて、ここで再度、物理とベクトルである。力学の場合は、比較的単純な関係にあった。変位ベクトルは有向線分そのものであるし、その時間微分として速度ベクトル、加速度ベクトルが、したがって Newton の法則から、力（ベクトル）までつながる。物理的単位は異なるもののすべては変位ベクトルが形を変えたものであった。その意味で、ベクトルは一種類といっていい状況であった。一方で、幾何ベクトルを１次元的対象から２次元以上の対象へと広げる努力が連綿と続けられ、ついには、Grassmann による高次元ベクトルに至るのであるが、その Grassmann の考えが普及する前に、新たなベクトル的物理現象の発見とその数学的な記述があった。電磁気学である。

今日では、電磁気学の数学＝ベクトル解析、というくらい、両者は不可分の関係にあるのだが、その途中経過は、きわめて人間模様的である。具体的には、Gibbs, Heaviside を始めとする「ベクトル派」と Hamilton の流れをくむ「四元数派」との間に激しい論争が巻き起こた。

Hamilton-Tait vs. Gibbs-Heaviside
debate の経過については、次の論文が詳しい。

John N. Shutt, Quaternions: A Case Study in the Selection of Tools for Mathematical Physics http://fexpr.blogspot.jp/2014/03/the-great-vectors-versus-quaternions.html

この両者の間に Maxwell が当然ながらいたわけであるが、当初、座標成分の形で書き表わされていた電磁場の方程式 (1864[17]) は、その方程式に現れる特徴ある量の組合せが、quaternion における scalar part と vector part に一致していたということから、quaternion を用いた記述がまず摸索されたようである。ところが、そのうち、必要なのは quaternion そのものではなく、3 次元ベクトルのいわゆるスカラー積とベクトル積であるということに Gibbs らが気付き、quaterion を排除した記述を志向したことから、両者に論争が起こった。その頃は、Hamilton も Maxwell も亡き後（Maxwell が若くしてなくなったのは、本当にもったいなかった）ということもあり、論争の中心は、quaternion に関して Hamilton の後継者を任じていた Tait を中心に繰り広げられた。

結果は、現在の教科書にあるように、Gibbs-Heaviside 側に軍配が上がったわけであるが、そのベクトル派が勝利を収める過程で、ベクトルにも 2 種類あることが認識されるようになってきたのは、論争もあながち無駄ではなかったというべきか。具体的には、電場（電界）ベクトルと磁場（磁界）ベクトルで、この 2 つ（極性ベクトルと軸性ベクトル）は空間をひっくり返す操作（鏡に写す操作でもよい）に関して異なる振る舞いをする。

ただし、当事者は大変。温厚な Gibbs 先生も不快感をにじませた手紙を残している。スライド資料の該当箇所を見よ。

問 5.4. 電場に対する電荷に該当する、磁場に対する磁荷が仮にあったとして、それが空間反転に関してどのように振る舞うことになるか考察せよ。

ここで、Weyl 式のユークリッド空間（アフィン空間）を「行列あれこれ」から引いてみよう。これについて日本語で書いてあるものはあまり多くないのだが、ひとつだけ、砂田利一「数学から見た物体と運動」(岩波、2004) を挙げておこう。

6 直線と平面の幾何学

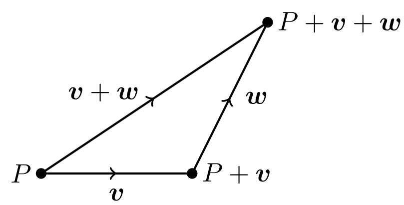
「ベクトルというのは、平行移動のことなんだ」— Hermann Weyl

高校では、有向線分の同値類として（幾何）ベクトルを学んだ。これはこれで良いのであるが、ベクトルを移動量と考えることでより多くのことが見えてくる。移動量としてのベクトルは特定の点と無関係に考えられるべきもので、例え

[17] 日本では、池田屋事件、蛤御門の変。

ば、一定の向きと速さで流れる風は、場所と独立したベクトルと見ることができる。ただし、始点 P と終点 Q の 2 点が指定されると、点 P から点 Q への移動量としてベクトル[18](変位ベクトル, displacement vector という) $\boldsymbol{v}$ が決まる、という繋がりはもちろんある。これを $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$ のように書くことは周知のとおり。

逆に点 P とベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、P をベクトル $\boldsymbol{v}$ に従って移動させて得られる点 Q が定まる。これを $Q = P + \boldsymbol{v}$ のように書く。こちらは、なぜか高校では（大学でも？）出てこないのであるが、便利な書き方で、ベクトルの和の平行四辺形則が、$(P+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = P+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ という結合法則もどきに昇華する。そういう代数規則の辻褄が合うようになっているので、$\boldsymbol{v} = Q - P$ すなわち $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ と書いても一向に差し支えない。



もっと大胆に、点の純一次式（定数項のない一次式）$t_1P_1+\cdots+t_nP_n$ ($t_1, \cdots, t_n$ は実数) なるものを考えることも可能で、$t_1 + \cdots + t_n = 1$ のときは点を[19]、$t_1+\cdots+t_n = 0$ のときは幾何ベクトルを表すことがわかる。いずれにせよ、点の純一次式の計算は自由に行って良く、そのなかで、係数の和が 1 の塊は点とみなすことができ、係数の和が 0 の塊はベクトルと同定して良い、ということである。

世間でこのような計算が流行らない理由は、次のような疑問に魂を奪われると人間としての存在そのものが危うくなる、ということを恐れた為政者が巧妙に操作した結果なのかも知れない。

問 6.1. $t_1 + \cdots + t_n$ が 0 でも 1 でもないときの $t_1P_1 + \cdots + t_nP_n$ は何を意味するか。

なお、点 $t_1P_1 + \cdots + t_nP_n$ ($t_1 + \cdots + t_n = 1, t_j \geq 0$) を、$P_1, \cdots, P_n$ の**凸結合** (convex combination) という。

[18]ベクトルであることを強調して、$\vec{v}$ とか $\boldsymbol{v}$ のように書いたりするが、面倒なときは、普通の文字でベクトルを表すこともある。以下では、矢印と太文字の両方を特にこだわりなく使用する。
[19]Möbius の重心座標と呼ばれるもので、幾何ベクトル一歩手前の 1827 年に発表されるも注目されず。

問 6.2. 点の集合 C が凸であるとは、$P, Q \in C \Longrightarrow tP+(1-t)Q \in C$ $(0 \le t \le 1)$ となること。点 $P_1, \cdots, P_n$ の凸結合全体は $P_1, \cdots, P_n$ を含む最小の凸集合である。$n = 2, 3, 4$ の場合を順に調べてみよ。

さて、点を一つ選んでそれを基準点とみなすと、他の点とベクトルの間には一対一の対応がつくので、点をベクトルで表すことができる。ベクトルをこのように解釈したものが**位置ベクトル** (position vector) である。平面の場合は、移動の自由度は２つ、空間の場合は３つあり、２次元あるいは３次元という言葉[20]で区別される。そこで、空間の場合であれば、独立な３つの変位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を指定しておくことにより、すべてのベクトルが $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の形に表わされる。（ここの $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は四元数とは区別すべきものではあるが、歴史的経緯から同じ記号が使われる。）いいかえると、空間ベクトルは、３つの数の組 (x, y, z) で指定することができる。これをベクトルの成分表示といい、個々の数はベクトルの**成分** (component) と呼ばれる。

これを位置ベクトルに適用することで、空間の点が３つの数の組で指定されることになる。すなわち、基準点 O と基準ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を指定することで、空間の点が３つの数の組と同定される。基準系を別のものに取り替えると、同じ点に別の３つぐみが対応する。このときの数の間の関係式は一次式で表わされ、**座標変換** (coordinate transformation) と呼ばれる。以上が、座標幾何の仕組みと付随するベクトルの成分表示の関係である。簡単のために平面すなわち２次元の場合であれば、

$$\boldsymbol{i}' = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j}' = c\boldsymbol{i} + d\boldsymbol{j}, \quad O' - O = s\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}$$

を

$$P - O = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}, \quad P - O' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'$$

に代入して少し計算すると、

$$x = ax' + cy' + s, \quad y = bx' + dy' + t.$$

これが座標変換の関係式。とくに $O' = O$ すなわち $s = t = 0$ とすると、ベクトルの成分変換の関係式となる。こちらは純一次式であることに注意。

ここまでは、二点間の距離の情報は一切使っていない。現実の空間は距離が意味を持つようなものになっていて、これは別の言い方をすると、移動量の大きさ

[20]物理量の次元とは意味合いが異なることに注意。

（長さ）という正の数 $|\boldsymbol{v}|$ が決まるということ。これと 2 つのベクトルの成す角 θ を使って $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|\cos\theta$ とおけば、これがいわゆる**内積**[21] (inner product) の性質を満たすのであった (角を使わず、長さの情報だけから内積を得る方法については「ベクトルあれこれ」付録参照)。こういった内積の情報があれば、基準ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ として、大きさが 1 で互いに直交するものを取ることは自然なことであるので、以下、そうしておく。ちなみに、大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) と呼び習わしている。そうすることで、座標 (x, y, z) は距離の情報もあわせ持つことになり、例えば 2 点 (x, y, z), (x', y', z') の間の距離は、

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

によって計算される。これすなわち、**デカルト座標** (Cartesian coordinates) である。これに呼応して、ベクトルの内積は、その成分表示 $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\boldsymbol{v'} = (\alpha', \beta', \gamma')$ を使って、

$$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v'}) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

と表わされることになる。

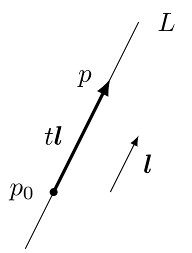
歴史的には、ベクトルの概念よりも座標の概念がはるかに古いのであるが、それは、素朴なものほど認識に時間がかかる、ということを意味するのであろう。

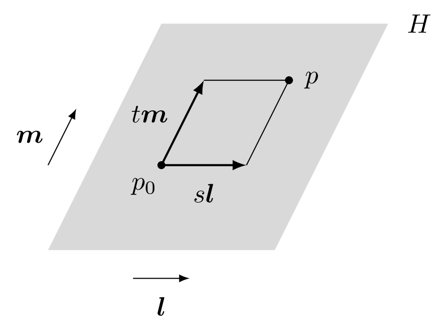
さて、ユークリッド幾何が成り立つ場所としての空間を数学的に記述する一つの方法は、デカルト座標を使用するものである。ただし、幾何学的諸性質が座標系のとり方に依らないことを確かめる必要が生じる。すなわち、座標変換で不変な性質であることが要求される。これは、ある意味現実の観測手段と幾何学的実体を結びつける堅実な方法で、広く物理学等で採用される立場である。一方で、座標系のとり方は人為的なもので本質ではない、という見方に立てば、座標に依存しない記述というのもあってしかるべきである。その一つが Hermann Weyl によるユークリッド空間の作り方[22]で、移動ベクトル全体 V を代数的構造を有するものとしてまず定式化し、さらに内積の情報を付与したもの（内積空間とよばれる）を用意しておく。その上で、**ユークリッド空間** (Euclidean space) とは、内積空間のベクトルが平行移動を引き起こすような点の集まりであるとする、というものである。この Weyl 方式のユークリッド空間において、基準点と基準ベクトルを指定すれば、先に見たように、デカルト座標が出現するという仕組みになっている。

[21] 内積を表す記号としては、$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ のほかに、このような括弧記号もよく使われる、

[22] Raum, Zeit, Materie, Springer, 1919.

ユークリッド空間における幾何学の重要な構成要素として、点の他に直線と平面がある。これらを、ベクトル的方法で記述してみよう。以下、ユークリッド空間の点はアルファベット小文字で表すことにする。直線 L に対して、L を L に移すベクトル全体 ΔL を考えると、$\Delta L = \{p - q; p, q \in L\}$ であり、これはまた $\mathbb{R}\boldsymbol{l} = \{s\boldsymbol{l}; s \in \mathbb{R}\}$ の形である。そして、L の点 p_0 を一つ用意すれば、L の他の点 p は、$p = p_0 + t\boldsymbol{l}$ $(t \in \mathbb{R})$ と表わされる。逆に、点 p_0 とベクトル $\boldsymbol{l} \neq 0$ に対して、このような点全体が一つの直線を表す。直線が、実数をパラメータとする一次式の形で表わされることになる。これを**直線のパラメータ表示** (the parametric form of a line) と呼ぶ。



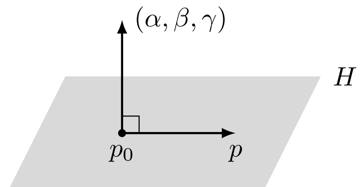


次に、平面 H を考えよう。同じく、H を H に移すベクトル全体を $\Delta H = \{p - q; p, q \in H\}$ で表せば、ΔH は2次元的な集まりになっていて、2つの独立なベクトル $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$ を使って、$\Delta H = \mathbb{R}\boldsymbol{l} + \mathbb{R}\boldsymbol{m}$ のように[23]表わされる。したがって、H 内の点 p_0 を一つ用意すれば、H の一般的な点は $p = p_0 + s\boldsymbol{l} + t\boldsymbol{m}$ のように2つの実数 s, t を用いて表示される。これを**平面のパラメータ表示** (the parametric form of a plane) という。

直線と平面のベクトル表示がわかったので、デカルト座標を用いた表示について調べよう。こちらは、まず平面の方から考える。デカルト座標では、点 p は実数の組 (x, y, z) で表わされるのであった。そこで、この3つの座標の間にどのような関係式が成り立つとき平面を表すか考えてみる。そのために、ΔH と直交するベクトル (α, β, γ) を用意し、p_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) とすれば、$(p - p_0) \perp (\alpha, \beta, \gamma)$ が求める条件となる。すなわち、$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$ である。これを**平面の方程式** (the equation of a plane) とよぶ。逆に、一次方程式 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ をみたす点全体というのは、その一つの解を (x_0, y_0, z_0) とする

[23]ベクトル $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$ の純一次式 $s\boldsymbol{l} + t\boldsymbol{m}$ 全体 $(s, t$ は実数) をこのような記号で表す。

とき、$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0$ の形に書き直せるので、点 (x_0,y_0,z_0) を通り、ベクトル (α,β,γ) を**法線ベクトル**[24] とする平面を表す。まとめると、デカルト座標系において、平面は一次方程式で表わされる。



次に直線を考えよう。この場合は、$\Delta L=\mathbb{R}\boldsymbol{l}$ に垂直なベクトルとして、独立なものを２つ (α,β,γ), (α',β',γ') とることができるので、$p_0=(x_0,y_0,z_0)\in L$ を一つ用意しておけば、L の一般の点 $p(x,y,z)$ は、２つの一次方程式

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0,\quad \alpha'(x-x_0)+\beta'(y-y_0)+\gamma'(z-z_0)=0$$

を同時に満たすことになる。逆に、連立一次方程式

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta,\quad \alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\delta'$$

の解は、平行でない２つの平面の共通部分として、直線を表す。

Example 6.1. パラメータ表示から方程式へ、方程式からパラメータ表示へ。

(i) パラメータ表示 $L:(x,y,z)=(1,2,3)+t(3,2,1)$, $H:(x,y,z)=(1,1,-1)+s(-1,1,1)+t(1,-1,1)$ から方程式を導く。

(ii) 方程式 $L: x+2y+3z=-1, -x+y=1$, $H:\sqrt{2}x-y+2z=3$ からパラメータ表示を導く。

問 6.3. 問題を自由に設定して稽古せよ。答えは他所にはない、自らの中にこそ見出すべきもの。

平面 H と空間内の点 q が与えられると、二点間の距離 $|p-q|$ を最小にする点 $p\in H$ がちょうど一つ存在する。いわゆる垂線の足 (foot of perpendicular) とよばれるものである。直感的には明らかな事実であるが、これを Weyl 方式で

[24] normal vector の訳であることから、法ベクトルと呼ぶ人もいる。normal の語源をたどれば直角定規に行き着くので良いとして、「法」の字には直角ないし垂直の意味はない。おそらく、normal に含まれる基準・標準の意味に引きづられて、法の字をあてたものであろうが、有理数と同類の誤訳か。数学用語としては垂直ベクトルでよかったような。

「証明」してみよう。そのために、$\Delta H = \mathbb{R}\boldsymbol{l} + \mathbb{R}\boldsymbol{m}$ で、$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を互いに直交する単位ベクトルとし、さらに ΔH に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用意する。その上で、

$$q - p_0 = u\boldsymbol{l} + v\boldsymbol{m} + w\boldsymbol{n}, \quad p - p_0 = s\boldsymbol{l} + t\boldsymbol{m}$$

とする。ここで、s, t は H 上の点 p を表示するためのパラメータである。このとき、

$$|q - p|^2 = |(u - s)\boldsymbol{l} + (v - t)\boldsymbol{m} + w\boldsymbol{n}|^2 = (s - u)^2 + (t - v)^2 + w^2$$

であるから、これが最小になるのは $(s, t) = (u, v)$ の場合で、そのときの点 p は条件 $(p - q) \perp \Delta H$ で特徴づけられる。また、その最小値は $|p - q| = |w|$ となる。一方、点 q のデカルト座標を (a, b, c), H の方程式を $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ とするとき、ベクトル $q - p_0$ の成分表示が $(a - x_0, b - y_0, c - z_0)$ となるので、$\boldsymbol{n} = (\alpha, \beta, \zeta)/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ と取れる（「(α, β, γ) は H の法線ベクトル」を思い出せ) ことに注意して、

$$w = (\boldsymbol{n}|u\boldsymbol{l}+v\boldsymbol{m}+w\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n}|q-p_0) = \frac{\alpha(a - x_0) + \beta(b - y_0) + \gamma(c - z_0)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

と計算すれば、点 $q(a, b, c)$ と平面 $H : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ 上の点の距離の最小値（点と平面の間の距離）が、

$$\frac{|\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

のように表わされることもわかる。

問 6.4. ($\sharp$) 直線 $L : x + 2y + 3z = -1, -x + y = 1$ 上の点で、点 $q(1, 1, 0)$ との距離が最小となるものを求めよ。

連立一次方程式の幾何学的意味

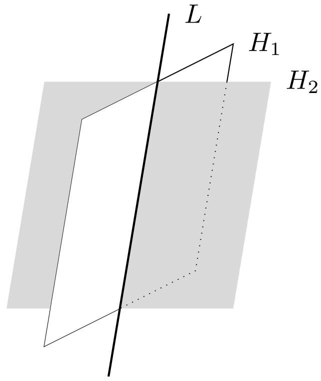
座標平面において、直線が一次方程式 $ax + by = s$ の形で表されることは周知のとおり。その見方に立てば、連立一次方程式

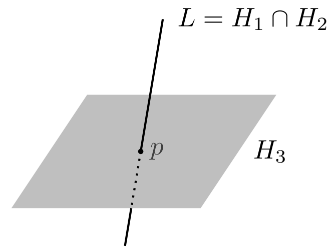
$$ax + by = s, \quad cx + dy = t$$

を解くということは、2つの直線 $ax + by = s$ と $cx + dy = t$ の交点の座標を求めることに他ならない。この交点があるかないか、あれば一つかどうかは、直線

の位置関係で次のように決まる。2 直線が平行でない場合：$ad \neq bc$ のとき、交点はちょうどひとつだけ存在する。2 直線が平行である場合：$ad = bc$ のとき、交点はないので、連立一次方程式は解をもたない。ただし、例外があって、2 直線が一致する場合、すなわち (a, b, s) と (c, d, t) が比例するときは、解は無数に存在する。

以上の幾何学的解釈を座標空間にまで広げてみよう。最初に、2 平面 $\alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j z = \delta_j$ $(j = 1, 2)$ の位置関係を調べる。平行でない場合、すなわち $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ と $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ が比例しないときは、平面の共通部分として、空間内の直線 L が得られるので、解は直線の点に相当するだけ沢山（不定）存在する。平行であるときは共通部分がないので、この段階で連立方程式は解がないとわかる。





次に互いに異なる 3 平面の位置関係について。3 つの法線ベクトル $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ が独立な方向を表している場合：3 平面の交点が一点 p に定まるので、連立一次方程式はちょうど一つの解をもつことがわかる。それ以外の位置関係は、2 平面が平行で残りの平面が平行にならない場合。3 平面が平行である場合。この 2 つは、ともに連立一次方程式に解がない。どの 2 つの平面も平行でなくかつ共通解がないものとして、三角柱の側面を構成する場合がある。

最後に、三角柱が細くなった極限として直線が現れるとき、すなわち 3 平面がひとつの直線を共有する場合：これは、連立一次方程式の解が沢山ある場合（解不定）である。

この解のあるなしと、3 つの法線ベクトルの広がりが 1 次元的、2 次元的、3 次元的のいずれであるかを組み合わせることで、すべての場合を識別することができる。

問 6.5. ($\sharp$) 原点と点 $(1, 1, 1)$ を結ぶ直線 L について、L を共有する 3 平面を表す連立一次方程式を一組作れ。

以上、三元連立一次方程式の解の存在の様子が幾何学的に解釈できることを見てきた。一方、連立一次方程式自体は未知数がいくつあっても考えることができて、その解の様子を代数の技で調べてみると、3 次元ユークリッド幾何の直感が、実に、高次元の場合にまで広く有効であるという事実に行き当たる。これが、いわゆる線型代数（行列代数）における「抽象の直感」とでも言うべきもので、視覚的直感は、そのための確かな手がかりをもたらしてくれる。

7 座標変換とベクトル

ここからは行列の基本知識を前提とする。

ものの名前を何個か並べたものをリストと (list) いうことは、既に承知のことと思うが、「並べる」ということの意味を尋ねられたらどうか。何（の名前）を並べるかは置いておいて、どう並べるかを説明することは意外に難しい。通常は、幾何学的な場所の情報と結びつけて考えることが多い。一列に並べる、縦に並べる、横に並べる、縦横に並べる等。しかしながら、それに拘る必要は無く、むしろこだわり過ぎぬ方が便利でもある。

結論は、並べる場所の代わりに何らかの目印＝**ラベル** (label) を用意するとよい。別の言い方をすると、ラベルそのものを数学的な対象と捉えるということで、ラベルの集まりを一つの集合と考える。ラベルという代わりに**添え字** (index) ということも多く、そのときは添え字集合 (index set) ということになる。並べる対象 a に添え字 $i \in I$ を添えて a_i のように区別したものが、この場合のリストであり、リスト自体は $(a_i)_{i \in I}$ という記号で表わされる。i の範囲として何を考えるかがはっきりしているときは、(a_i) と略記する。

具体的として、一列に並べるのであれば、添え字集合として $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ のような自然数の集まりを考えるのは自然で、この場合のリスト (a_i) は、$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ のようにも書く。ということで並べるものが数の場合には「数列」に他ならない。なお数列を表わす記号として、$\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を使うことが多いのであるが、これは避けた方がよい。というのは、例えば、$a_i = (-1)^i$ $(1 \leq i \leq n)$ であれば、$(a_i) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n)$ のように、∓ 1 を交互に並べた列を表わすことになるが、$\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ をうっかり $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ と略してしまうと、こちら

は集合を表わす記号となってしまい、数の集合 $\{-1,1,-1,\ldots,(-1)^n\}=\{1,-1\}$ と紛れるため。

こういった言葉遣いを用意しておけば、座標の意味を説明するのも楽である。復習すると、（3次元）ユークリッド空間であれば、基準点 O と3つの基準ベクトルの集まりすなわち変位ベクトル空間の正規直交規定（これもリスト）$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ を並べ合せた[25]$(O,\boldsymbol{e})$ を**座標系** (coordinate system) といい、座標系が指定されると、空間の点 P を $P=O+x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$ のように3つの実数の組み (x_1,x_2,x_3) で表わすことができる。これを点 P の座標系 $(O,\boldsymbol{e})$ に関する**デカルト座標** (Cartegian coordinates[26]) という。

座標系はまた、平行移動量としての「変位ベクトル＝幾何ベクトル」の成分表示も可能にする。$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$ のように。

一般に、座標系を指定するごとに、「物理量」が数の集まり（組み）として表わされる、という見方が可能である。これは実際の測定とも整合する考え方で、広く用いられる実用的な方法でもある。

この数の集まりであるが、当然のことながら基準とする座標系の選び方に依存する。その依存性を具体的に記述するのが座標変換という考え方で、今の場合であれば、新旧の座標をそれぞれ、$x'=(x'_1,x'_2,x'_3)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$ と表せば、§6 の最初と同様の議論により、一次式による表示

$$x_1=t_{11}x'_1+t_{12}x'_2+t_{13}x'_3+s_1$$
$$x_2=t_{21}x'_1+t_{22}x'_2+t_{23}x'_3+s_2$$
$$x_3=t_{31}x'_1+t_{32}x'_2+t_{33}x'_3+s_3$$

を得る。ここで、$T=(t_{jk})_{1\le j,k\le 3}$ は直交行列を成し、行列表記を使えば、

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}$$

と書き表される。これが新旧座標系を結ぶ**座標変換** (coordinate transformation) と呼ばれるものである。上では、旧座標を新座標で表したが、逆行列 $T^{-1}={}^tT$ を使って新座標を旧座標で表わすこともでき、

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}={}^tT\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-{}^tT\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}$$

[25] リストは入れ子にして使うこともできる。

[26] 座標を構成する個々の数（成分）が coordinate であるが、組みとしての座標は複数形で呼ばれる。

となる。

変位ベクトルの成分表示についても同様のことが成り立ち、こちらは座標原点 O の選び方には依らず、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

という変換規則となる。

この座標変換に基づく「ベクトル」の記述は実用的かつ現実的でもあり、変位ベクトル以外にも、速度・加速度ベクトルあるいは力のベクトルの成分表示を可能ならしめる。このように、変位ベクトルと同じ変換規則を満たすベクトルは**極性ベクトル** (polar vector) と呼ばれる。他に電場（電界）ベクトルもその仲間である。

こういった座標に依存する形で 3 つの数の集まりが定まり、それが規則正しく変換されるものとして、他に**軸性ベクトル** (axial vector) と呼ばれるものがある。これは、新旧座標に関する成分を (a_1', a_2', a_3'), (a_1, a_2, a_3) で表わすとき、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \det(T) T \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \det(T)^t T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

のように変換されるものをいう。ここで $\det(T)$ は行列式を表わす。

いまの状況では T は直交行列 ${}^tT = E = T^tT$ であることから、$\det(T) = \pm 1$ となり、T が回転を表わす場合は 1、鏡像変換に相当する（ものを含む）場合は -1 である。とくに $T = -E$（E は単位行列）と選べば $\det(T) = -1$ となるので、軸性ベクトルの成分は変化しない（極性ベクトルだと、成分の符号が反対になる）。

軸性ベクトルの典型例が磁場（磁界）ベクトルで、鏡像変換に対する振る舞いが、変位ベクトルと（符号が）反対になる（質問と解説 2 参照）。他に、角運動量 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ が軸性ベクトルであり、一般に、極性ベクトルどうしのベクトル積が軸性ベクトルとなる。

問 7.1. 直交行列の行列式の値は ± 1 である。

ここで、ベクトル積の定義が座標系の向きの取り方に依存するものであることを確認しておこう。一般に、空間の向きとは、グラスマン的には、外積を使って得られる、$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ なる「体積要素」の「向き」のことである。座標変換の

下、$e_1' \wedge e_2' \wedge e_3' = \det(T) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ となることから、この「体積要素」は ± 1 の違いを除いて定まるものであり、２つの「向き」の選び方が可能である。

この「体積要素」なるものは、３次元空間の外にあるベクトルであることからわかりにくくなってはいるが、２次元（部分空間）の場合に同様のことを考えると、基準ベクトル $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ には面積ベクトル $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ が対応し、異なる基準ベクトル $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')$ は、それがもとの基準系から回転で得られるか、反転が必要であるかで、$\boldsymbol{e}_1' \wedge \boldsymbol{e}_2' = \pm \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ となる。これは、基準ベクトルの定める平面の向き（表か裏か）を定めているものと解釈したものが面ベクトルとしての $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ である。ここで、どちらが表でどちらが裏かは、２次元だけを見ていては決めようがないことに注意。

ということで、次元の違いにかかわらず回転の操作（正確には $\det(T) = 1$ である座標変換）で結び付けられる座標系は同一の向きを定めている。とくに右手（左手）を回転させて得られる一連の座標系を**右手系**（**左手系**）と呼ぶ習慣であるが、この区別は人間の身体的特徴を基準とったもので、数学的というよりは物理的（あるいは心理的）なものであり、便宜的に定めているに過ぎない。虚数単位として i の代わりに $-i$ を採用しても数学的には区別できないということに相当する事実である。（物理現象を高度に突き詰めていくと、物理的空間は、右左を区別できる仕掛けにはなっているようであるが。）

空間の幾何ベクトルのベクトル積の定義では、この座標系の向き（右手系）に依拠した形で「面積ベクトル」の向きが定められている。これが、「体積要素」の（向きの）取り方によっているという意味である。

ついでに述べると、数学（とくに線型代数）では、数のことをスカラーと呼ぶのであるが、物理では単なる数以上の意味でスカラーという言葉を使う。これを座標変換と結びつけて説明すると、次の通り。

座標系に依存する形で一つの数が定まり、別の座標系を基準にしても同じ数が得られるとき、その数を**スカラー**という。一方、座標系に依存して定まる数で、新旧座標系に関するものを s', s で表わすとき、$s' = \det(T) s$ となっているものを**擬スカラー** (pseudo-scalar) という。これは、座標をひっくり返すと符号が反対になる量ということで、現実的な例があるのかどうか。

質量とか電荷はスカラー量である一方、磁荷は（もし存在すれば）擬スカラー (pseudo-scalar) である。

問 7.2. 磁荷が擬スカラーであるのはどうしてか。

8　ベクトル空間と内積

ベクトルに大きさの情報を付与する手っ取り早くも有用な手段に内積がある。数を並べたものであれば、積和という形を取るので、それで済ます場合も多いのであるが、ここはやはりグラスマンに敬意を表して、幾何ベクトルの代数化・抽象化・一般化からはじめよう。

まずは、すべてのベクトルが共通に持っていると思われる性質の抽出である。これは大抵の線型代数教科書に取り上げられているもので線型性と称されるものであるが、一次結合の存在と性質といってもよい。現代的な扱いでは、それを許容する数学的対象としてのベクトルの集団をまず指定するところから話が始まるのであるが、どのように理解するかグラスマンの外延論に触発された形でそれを集合の形で明確に定式化したのは、ペアノであった。その内容はしばらく忘れらていたのであるが、Weyl が 1918 年に著した Raum, Zeit und Materie の数学的基礎の一部として再度（独立に？）取り上げられた。

それは、ベクトル（の集団）をその計算規則により特徴づけるもので、和とスカラー倍の演算規則を公理化したものとなっている。ということで、集合の言葉遣いの補強から入ろう。

8.1　集合と写像のさわり

これを少しだけ紹介。詳しくは「集合入門２０１８」参照。

数学的な「もの」の集まりを集合という。「数学的な」の意味するところは、識別可能性であろうか。ともかくも数の集まりとか、数を並べた横ベクトルの集まりとか。ものの集まりには「個数」が伴い、それが有限であるか無限であるかで、 有限集合・無限集合という分け方をする。集合 $\{\pi, e, \sqrt{2}\}$ は個数 3 の有限集合である一方で、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は無限集合である。

既存の集合から新たな集合を作り出す常套手段に、「並べる」というのがある。2 種類の集合 A, B（$A = B$ であってもよい）があるとき、$a \in A$ と $b \in B$ を並べた (a, b) 全体が一つの集合を作る。これを積集合 (product set) といい、$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ と書く[27]。この場合の識別の仕方は、$(a, b) = (a', b') \iff a = a', b = b'$ というもの。

この「並べる」操作は、複数の集合 $A_1, \dots, A_n$ についても可能で、得られた集合は $A_1 \times \cdots \times A_n$ と書かれ、$A_1, \dots, A_n$ が全て A に一致するときは、A^n と

[27]ベクトル積と同じ記号である。

略記する。とくに $\mathbb{R}^n$ は実数を n 個並べたもの全体であり、$\mathbb{R}^3$ は 3 次元ユークリッド空間の座標として得られるものでもある。

単に並べただけのものを「積」と呼ぶのは、集合の個数を $|A|$ などで表わすとき、$|A \times B| = |A||B|$ となることに由来する。

さて、こういったもの同士の結びつきを記述する際に重宝するのが、写像の考えかた。

集合 A の要素 a ごとに B の要素 b が定まっているとき、その対応のさせ方を写像といい、$f : A \to B,\ a \mapsto b = f(a)$ のように書く。

例えば、n 個の数値データ $(a_1, \dots, a_n)$ から平均 m と積 p を並べたもの (m, p) は、$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ を決めるごとに $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ を定める写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, $f(a_1, \dots, a_n) = ((a_1 + \dots + a_n)/n, a_1 \dots a_n)$ である。

この写像の記号を使えば、横ベクトルの和は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (v, w) \mapsto v + w \in\to \mathbb{R}^n$ なる写像として理解される。

以上、データを並べたり、加工したり並べなおしたりする操作が集合と写像の言葉で効率よく記述できることが推測されよう。

写像と集合にまつわる便利な操作・記号については、集合についての教科書を見ていただくことにして、

もう一つだけ記号を導入すると、集合 A から集合 B への写像全体（の作る集合）を A^B という記号で表わす。記号の由来は、A, B が有限集合のとき、$|A^B| = |A|^{|B|}$ であることによる。とくに、$B = \mathbb{R}$ のとき、$\mathbb{R}^A$ は A の上で定義された実数値関数全体を表わす。

8.2 ベクトル空間の定義とその言葉遣い

ベクトル空間の一般論は、グラスマンの外延論を読み解く過程で、G. Peano により明治時代半ばに創始された。以下は、その始まり部分を「行列代数あれこれ」から抜書したもの。

さて、幾何ベクトル空間を手本に、改めて一般のベクトル空間を導入しよう。その際、考える数の範囲は加減乗除ができればよいので、そのようなもの（体[28]

[28]体 (field) という考えは、代数方程式の解の公式の研究をきっかけに徐々に認識されたもので、多項式の根から加減乗除をくり返して得られる数全体が典型的な例である。そのような意味での体はすべての有理数を含むので、無限性を有するものであるが、偶数全体を 0 で、奇数全体を 1 で代表させて得られる二元集合は、やはり加減乗除が可能な集団を作り、最も小さい体を提供する。他にも素数に関係した有限体とかがよく知られていて、これらが数学者のおもちゃではなく情報理論の様々なところで活用される。

と呼ばれる）を一つ用意し、$\mathbb{K}$ と書く[29]。具体的には、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$（実数全体）あるいは $\mathbb{K}=\mathbb{C}$（複素数全体）を念頭において、当面は（あるいは永久に）不自由しない。体 $\mathbb{K}$ の元をベクトルとの対比で、**スカラー** (scalar) ともいう。

$\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間** (vector space) とは、ベクトルと称されるものの集まり（集合）V に和 $v, w \in V \Longrightarrow v+w \in V$ とスカラー倍 $\alpha \in \mathbb{K}, v \in V \Longrightarrow \alpha v \in V$ が定められていて、以下の条件を満たすもの[30] をいう。

(i) $(u+v)+w=u+(v+w)$, $v+w=w+v$.

(ii) **零ベクトル** (zero vector) と呼ばれる特別な $\mathbf{0} \in V$ があって、すべての $v \in V$ に対して、$0v=\mathbf{0}$.

(iii) すべての $v \in V$ に対して、$1v=v$.

(iv) $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$, $(\alpha+\beta)v=(\alpha v)+(\beta v)$, $\alpha(v+w)=(\alpha v)+(\alpha w)$.

性質 (i) により、ベクトルの足し算は何個であっても括弧を省略できるし、和の順番を気にする必要もない。零ベクトルは、しばしば 0 で代用され、和に関して零のように振る舞う $v+\mathbf{0}=1v+0v=(1+0)v=v$ ことに注意。ベクトル $(-1)v$ は、$-v$ とも書かれ、$w+(-v)=w-v$ のように略記される。$v-v=1v+(-1)v=(1-1)v=\mathbf{0}$ に注意。

このような意味での抽象的なベクトルの集団において、有限個のベクトルの集まり $v_1, \dots, v_r$ と**一次結合** (linear combination) とは、スカラー $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を使って

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$$

と表わされるベクトルのことをいう。これは点の凸結合にも対応するベクトルに対するきわめて基本的な操作であり、上で述べたベクトル空間の公理（基本性質）は、こういった一次結合の代数計算が矛盾なく実行できることを保証するものとなっている。

ベクトル空間 V の部分集合 $W \subset V$ で、零ベクトルを含み、和とスカラー倍ではみ出さないものを V の**部分空間** (subspace) と呼ぶ。このとき、W 自身がベクトル空間となっていることに注意。

[29]体（からだ）を意味するドイツ語 Körper の頭文字。

[30]このように、数学では代数構造に着目して「ベクトル」という用語を使っていて、「大きさと向きをもつ量」という素朴な意味でのベクトルの概念とはずれがあることに注意する。例えば、力学における速度や力は「大きさと向きをもつ量」には違いはないが、その物理的効果という観点からは空間点に束縛された量と見るのが妥当で、したがって、異なる空間点に結び付けられたベクトルどうしの和が、仮にそれが可能であっても、何を意味するかは自明ではない。

Remark 5. ベクトルのスカラー倍は、スカラーをベクトルの左に書くのが慣例であるが、行列代数との整合性を考えると右に配置するのが合理的である。そこで、左からのスカラー倍に対して、右からのスカラー倍を $v\alpha = \alpha v$ と定めると、$\alpha(v\beta) = (\alpha v)\beta$, $v(\alpha\beta) = (v\alpha)\beta$ のように左右からのスカラー倍がかみ合い便利である。なお、この左右のかみ合いにおいて、スカラーどうしの積についての交換法則が使われていることに注意。

問 8.1. 当然とも思えるベクトルの計算

$$2(v+3w)-(v-w)=v+7w$$

が成立する理由を公理系に則して述べよ。

問 8.2. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ($\alpha \in \mathbb{K}$ は何でも) である。なぜか。

問 8.3. 幾何ベクトルが上記性質をみたすことを確認。また、与えられた平面に対して、その平面を保つ幾何ベクトル（平行移動）全体が部分空間を構成することも確認。

問 8.4. V の部分空間 W, W' に対して、$W \cup W'$ が部分空間となるのは、$W \subset W'$ または $W \supset W'$ の場合に限る。

Example 8.1.

(i) 空間内のある点に作用する力全体は、力の合成に関する平行四辺形則と力の定数倍を和とスカラー倍として、ベクトル空間を形成する。このことは、力と幾何ベクトルの関係を暗示するものであるが、それを明示的に述べたものがいわゆるニュートンの運動方程式[31]に他ならない。

(ii) 行列の作るベクトル空間 $M_{m,n}(\mathbb{K})$。とくに、列ベクトル空間 $\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$ と行ベクトル空間 ${}^t\mathbb{K}^n = M_{1,n}(\mathbb{K})$。

(iii) 関数の作るベクトル空間 $\mathbb{K}^X$ とその部分空間 $\mathbb{K}X$。ここで、$\mathbb{K}X$ は、有限集合で支えられた関数 $f: X \to \mathbb{K}$ 全体を表す。とくに、数列の作るベクトル空間 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ とその部分空間 $\mathbb{K}\mathbb{N}$。

[31]Newton 自身は、運動の法則を、微分も座標も使わないユークリッド幾何的手法で述べている (1687)。それを座標と微分による形に書き改めたのが Euler (1750) で、今の力学の教科書にあるような変位ベクトルの時間に関する２階微分が力に比例する（比例定数＝慣性質量）という定式化は Grassmann (1840) による。実に１５０年余におよぶ紆余曲折であった。

(iv) 形式的冪級数の作るベクトル空間 $\mathbb{K}[[t]]$ と多項式の作る部分空間 $\mathbb{K}[t] \subset \mathbb{K}[[t]]$。

(v) 収束半径が $r \geq 0$ よりも大きい冪級数の作る部分空間 $\mathbb{C}_r[[t]] \subset \mathbb{C}[[t]]$。$\sum_{n\geq 0} c_n t^n \in \mathbb{C}_r[[t]] \iff \limsup |c_n|^{1/n} < 1/r$ である。入れ子関係 $\mathbb{C}[t] \subset \mathbb{C}_\infty[[t]] \subset \mathbb{C}_r[[t]] \subset \mathbb{C}_0[[t]]$ に注意。

8.3 内積の幾何学（行列代数あれこれ §13）

多変量（数ベクトル）と内積。データの間の距離と角度。相関係数の意味と性質。**内積** (inner product) とベクトルの大きさ（長さ）、

$$(x|y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad \|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}.$$

は内積の性質：対称性 $(x|y) = (y|x)$、分配法則、正定値性 $(x|x) > 0$ $(x \neq 0)$、等質性 $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ を満たす。

一般に、部分空間 $E \subset \mathbb{R}^n$ のベクトル $v, v' \in E$ に対して実数 $\langle v|v' \rangle$ が定められ、(i) 対称性、(ii) 分配法則、(iii) 正定値性 $\langle v|v \rangle > 0$ $(0 \neq v \in E)$ をみたすものを E 上の**内積** (inner product) という。

内積の不等式（コーシー・シュワルツの不等式）：$x, y \in E$ の内積について、

$$|\langle x|y \rangle|^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$$

が成り立つ。

Proof. 内積の不等式の証明はいくつか知られているが、Hermann Schwarz による簡明かつ印象的な方法を紹介しよう。

もし $\langle x|x \rangle = 0$ であれば、$x = 0$（零ベクトル）であるから、$\langle x|y \rangle = 0$ となるので正しい。そこで、$\langle x|x \rangle > 0$ とする。実数のパラメータ t について成り立つ不等式

$$0 \leq \langle tx + y|tx + y \rangle = \langle x|x \rangle t^2 + 2\langle x|y \rangle t + \langle y|y \rangle$$

が二次式についてのものであることに注意し、

$$\langle x|x \rangle t^2 + 2\langle x|y \rangle t + \langle y|y \rangle = \langle x|x \rangle \left(t + \frac{\langle x|y \rangle}{\langle x|x \rangle} \right)^2 - \frac{\langle x|y \rangle^2}{\langle x|x \rangle} + \langle y|y \rangle$$

と書き直す。この二次式の最小値が $t = -\langle x|y\rangle/\langle x|x\rangle$ とときで、その最小値が 0 以上であることから、

$$-\frac{\langle x|y\rangle^2}{\langle x|x\rangle} + \langle y|y\rangle \geq 0 \iff |\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle.$$

とくに等式が成り立つのは、$\langle tx + ytx + y\rangle = 0 \iff y = -tx$ となる実数 t がある場合、すなわち x と y が平行な場合に限る。

次に $\langle x|x\rangle = 0$ とすると、不等式 $2\langle x|y\rangle t + \langle y|y\rangle \geq 0$ がすべての実数 t で正しいことから、$\langle x|y\rangle = 0$ でなければならないので、この場合も内積の不等式が $0 \leq 0$ の形で成り立つ。 □

とくに内積に関連して、ベクトル $x \neq 0$ と $y \neq 0$ の成す角 θ を

$$\cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

で定める。また、$(x|y) = 0$ のとき**直交**する (orthogonal) といい、$x \perp y$ と書く。便宜上、零ベクトルは、あらゆるベクトルに直交すると約束する。内積の不等式から三角不等式：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Example 8.2. ベクトル $x(j)$ $(1 \leq j \leq r)$ に対して、$\sum_j \|x - x(j)\|^2$ を最小にする x を求める。

問 8.5. すべての x_j が単位ベクトルのとき、二乗和の最小値が最大になるような x_j の配列について調べよ。

n 個の組データ $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ について考える。血圧と体重、数学の成績と英語の成績、など。こういった二種類の数値データの**散布図** (scatter plot) とは、xy 平面上に n 個の点を図示したもの。右上がりと右下がりの雲が現れるとき、正の相関あるいは負の相関がある、といった言い方をする。。

x_i, y_i の**平均値** (mean)・**分散** (variance)・**標準偏差** (standard deviation)

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i, \quad V_x = \frac{1}{n}(x_i - \overline{x})^2,\ V_y = \frac{1}{n}(y_i - \overline{y})^2, \quad \sigma_x = \sqrt{V_x},\ \sigma_y = \sqrt{V_y}$$

x_i, $\overline{x}$, σ_x は同じ単位（次元）をもつ量。さらに、**共分散** (covariance) と**相関係数** (correlation coefficient) を

$$V_{x,y} = \frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}), \quad \rho_{x,y} = \frac{V_{x,y}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

で定める。相関係数は、単位のつかない無次元量（比）であることに注意。

偏差ベクトル $\xi = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_i - \overline{x})$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{n}}(y_i - \overline{y})$ に内積の不等式を使うと、

$$-1 \leq \rho_{x,y} = \frac{(\xi|\eta)}{\|\xi\|\,\|\eta\|} \leq 1.$$

相関係数 $\rho_{x,y}$ は 1 に近いほど正の相関が強い（高い）、-1 に近いほど負の相関が強い（高い）、ことになり、x, y のデータの増減が同調する傾向の強さを表す指標となっている。

とくに、極端な $\rho_{x,y} = \pm 1$ というのは、内積の不等式で等号が成り立つ場合であるから、$(y_i - \overline{y}) = t(x_i - \overline{x})$ $(1 \leq i \leq n)$ となる実数 t が存在し、$(\xi|\eta) = t(\xi|\xi)$, $\|\eta\| = |t|\|\xi\|$ より、$\rho_{x,y} = \frac{t}{|t|}$ である。すなわち、$y_i = t(x_i - \overline{x}) + \overline{y}$ $(t > 0 \iff \rho_{x,y} = 1)$ あるいは $y_i = t(x_i - \overline{x}) + \overline{y}$ $(t < 0 \iff \rho_{x,y} = -1)$ のように、散布図のデータが傾きが正または負のある直線上に集中することになる。

問 8.6. $\rho_{x,y} = 0$ のとき、x と y は相関がない（無関係）と言ってよいか。

Remark 6. 日本語の本では（日本語以外でも？）、この相関係数が 0 であることを「無相関」あるいは「相関がない」と呼んでいるものがかなりあり、相関係数 0 ＝無関係であるという誤解を広めているような。例えば、散布図が円周に集中しているような場合、相関係数は 0 に近くはなっても、二つの量には密接な関係があることになり、それを相関がないと言って片付けるのは危険である。

この辺のことは統計でいうところの「帰無仮説」(null hypothesis) の意味にも通ずると思われるが、同じような変な慣習がはびこっているような。「本に書いてあるから」と言って思考停止せず自分の理性に照らして判断を。

9　複素関数とフーリエ解析

複素平面との関連でオイラーの関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に触れた。この式が象徴するように周期現象を記述する三角関数の正しい実体は複素指数関数にある。また周期現象は波としての特性を有し、とりわけ干渉の効果は三角関数そのものとよりは複素指数により理解するのが便利である。この形式上の実用性は、実は自然の本質に深く根ざしていることは量子力学の出現により明らかとなった。そういった諸々を扱う数学にフーリエ級数（とフーリエ変換）がある。以下では、このことを内積の観点から捉えてみたい。周期現象は、空間的にも起こり得るが、

振動という観点からは時間的なものがとりわけ重要である。ということで、e^{it} という t の関数を時間 t を変数とした複素平面内の運動とみなす。

問 9.1. e^{int} $(n = \pm 1, \mp 2, \pm 3)$ のとき、これがどのような運動であるか認識せよ。

1 変数の微積分は、関数の値が複素数であっても同じように展開することができる。とくに、次の基本定理が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),\ F'(t) = f(t).$$

Example 9.1. 複素数 $\lambda \neq 0$ に対して、

$$\int e^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}, \quad \int te^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}te^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda t}$$

とくに $\lambda = i$ の場合、

$$\int te^{it}\,dt = -ite^{it} + e^{it}$$

となるので、その実部・虚部を比較して、

$$\int t\cos t\,dt = t\sin t + \cos t,$$
$$\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \sin t$$

といった使い方もできる。

周期が 2π の複素数を値に取る周期関数全体は、複素数倍を許すベクトル空間（実ベクトル空間との対比で複素ベクトル空間という）となる。そのような関数 $f(t)$ $(f(t+2\pi) = f(t))$ の周期積分を

$$\oint f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

で定める。そうして $L^2 = \{f; \oint |f(t)|^2\,dt < \infty\}$ とすると、L^2 も複素ベクトル空間である。（L^2 は、二乗積分可能な関数全体を表わす標準的な記号である。）

問 9.2. 複素数 z, w に対して、$|z+w|^2 \leq 2(|z|^2 + |w|^2)$ を示し、L^2 が複素ベクトル空間であることを確かめよ。

複素ベクトル空間にも実ベクトル空間と同様の内積を考えることができる。ただき、今度は、内積の分配法則を

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|g) = \overline{\lambda_1}(f_1|g) + \overline{\lambda_2}(f_2|g), \quad (f|\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1(f|g_1) + \lambda_2(f|g_2)$$

（λ_1, λ_2 は複素数）とし、対称性の代わりにエルミート性 $(f|g) = \overline{(g|f)}$ を要求する。正値性は変わらず。左の分配法則で共役複素数が現れるのは一見奇妙に思えるかもしれないが、こうしておかないと正値性と整合するものが作れない。

Example 9.2. 数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の標準内積

$$(v|w) = \sum_{j=1}^{n} \overline{v_j} w_j.$$

関数空間 L^2 の内積

$$(f|g) = \oint \overline{f(t)} g(t)\, dt.$$

内積空間のベクトル列 (v_n) が**正規直交系** (orthonormal system) とは、$(v_j|v_k) = \delta_{j,k}$ であることと定める。

Example 9.3. $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ は正規直交系である。というのは、$n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ について

$$\int_0^{2\pi} e^{int}\, dt = \left[\frac{1}{\lambda} e^{int}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{in}(e^{2\pi in} - 1) = 0$$

であり、$n = 0$ については 2π となるから。

Definition 9.4.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

の形の関数を**フーリエ級数** (Fourier series) という。ここで和はすべての整数 n について取る。

周期 2π の周期関数 f に対して、$(e_n|f)$ を f の**フーリエ係数**という。

正規直交系 (e_k) に対して、ベクトル v の (e_k) への射影を

$$v' = \sum_k (e_k|v) e_k$$

で定めると、

$$(e_j|v - v') = (e_j|v) - \sum_k (e_k|v)(e_j|e_k) = (e_j|v) - (e_j|v) = 0$$

となる。すなわち、$v - v'$ はすべての e_k と直交し、

$$\sum_k |(e_k|v)|^2 = \|v'\|^2 \leq \|v'\|^2 + \|v - v'\|^2 = \|v\|^2$$

が成り立つ。

さらに、ベクトル $v - \sum_k z_k e_k$ （z_k は複素数）の大きさは、

$$\|v - \sum_k z_k e_k\|^2 = \|v - v' + \sum_k ((e_k|v) - z_k)e_k\|^2 = \|v - v'\|^2 + \sum_k |(e_k|v) - z_k|^2$$

となるので、$\sum_k z_k e_k$ の中で v にもっとも近いのが v' であるとわかる。

Example 9.5. t $(-\pi < t \leq \pi)$ をくり返した周期関数（のこぎり歯）を $f \in L^2$ とすると、$n \neq 0$ のとき、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} t\, dt = -\frac{1}{in}\Big[te^{-int}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{(in)^2}\Big[e^{-int}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi i\frac{(-1)^n}{n}$$

より、

$$(e_n|f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi} i\frac{(-1)^n}{n}$$

であり、$(e_0|f) = 0$ となる。

すべてのベクトル v に対して、

$$(v|v) = \sum_k |(e_k|v)|^2 \iff \|v - \sum_k (e_k|v)e_k\| = 0$$

となるような (e_k) は**正規直交基底** (orthonormal basis) と呼ばれる。

Theorem 9.6. $(e^{int}/\sqrt{2\pi})_{n=0,\pm1,\pm2,\dots}$ は L^2 の正規直交系である。（二乗積分可能な関数は、フーリエ級数で近似できる。）

Corollary 9.7. $f, g \in L^2$ に対して、

$$(f|g) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{(e_j|f)}(e_j|g) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \overline{e_j|f)}(e_j|g).$$

Proof. 次の等式

$$\begin{aligned}\Big(f - \sum_{j=-n}^{n} (e_j|f)e_j\Big|g - \sum_{k=-n}^{n} (e_k|g)e_k\Big) &= (f|g) - \sum_j \overline{(e_j|f)}(e_j|g) - \sum_k (f|e_k)(e_k|g) \\ &\quad + \sum_{j,k} \overline{(e_j|f)}(e_k|g)(e_j|e_k) \\ &= (f|g) - \sum_j \overline{(e_j|f)}(e_j|g) - \sum_k \overline{(e_k|f)}(e_k|g) \\ &\quad + \sum_k \overline{(e_k|f)}(e_k|g) \\ &= (f|g) - \sum_{j=-n}^{n} \overline{(e_j|f)}(e_j|g)\end{aligned}$$

で左辺の絶対値が内積の不等式により

$$\|f - \sum_{j=-n}^{n} (e_j|f)e_j\| \, \|g - \sum_{k=-n}^{n} (e_k|g)e_k\|$$

で押えられるので、極限 $n \to \infty$ を取れば、求める等式が得られる。 □

Example 9.8 (Euler)**.** のこぎり歯の場合、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(e_n|f)|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} 2\pi \frac{1}{n^2} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

と

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = 2\int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{2}{3}\pi^3$$

を比較して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

がわかる。

Remark 7. Euler のもとの証明は正弦関数の「無限因数分解」を利用するという、これも巧みなものであった。

問 9.3. t^2 $(-\pi \le t \le \pi)$ を周期的に拡張した関数のフーリエ係数からどのような等式が得られるか。

こういった技は覚えて使うだけでも役に立つが、真に新しいことを見出そうと思ったら、その心の部分も学ぶべきである。