ベクトル解析

山上　滋

2009 年 7 月 22 日

目次

1 座標と成分

座標とベクトルの成分表示の違いが説明できるだろうか。この二つは概念的に明確に区別されるべきものであるが、それを律儀に行おうとすると結構な手間がかかるため、ここでは「時刻と時間の違いのようなもの」であるとだけ指摘しておこう。日常用語としては、「時間」という言葉を「時刻」の意味でも使うことが可能であるが、それと同じような意味合いで、座標は成分表示の一種である。（念のため書いておくと、ここで言っている座標というのは、ユークリッド空間のデカルト座標のことであり、極座標を始めとした一般座標のことではない。）

以下、座標（あるいはベクトルの成分表示）においては、(x, y), (x, y, z) という伝統的な表記の他に

$$(x_1, x_2) \text{ とか } (x_1, x_2, x_3)$$

といった添え字方式も併用する。具体的な計算では、伝統的な方式が便利であるが、複数のベクトル成分を添え字なしで扱おうとすると、直ぐに文字が足りなくなるためである。

2 曲線のパラメータ表示

座標を使った曲線の記述の仕方に２つの方法がある。一つは方程式によるもの：

$$\text{円:} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

空間曲線は、２つの方程式の連立で記述される。

もう一つは**パラメータ** (parameter) を使うもので、以下ではこちらを主として扱う。円の場合だと

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

関数 $y = f(x)$ のグラフは、このどちらでもある。

平面を離れて空間内の曲線を表すのみ便利なのは、パラメータ表示の方。一般に、空間の曲線のパラメータ表示とは、

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad a \leq t \leq b.$$

ここで、$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ は t の関数を表し、$\boldsymbol{r}(t)$ は座標点を値とする t の関数である。曲線のパラメータ表示を**経路** (path) とも言う。

注意点：

(i) 曲線 (curve) そのものは、関数 $\boldsymbol{r}(t)$ の像として認識される。

(ii) パラメータ表示（経路）を与えると、曲線には必然的に「向き」が定まる。

(iii) パラメータを「時間」と解釈すると、パラメータ表示（経路）は、点の運動を表わすことになり、その像としての曲線は、いわゆる「軌跡」と呼ばれるものに他ならない。

(iv) 経路の意味で曲線という言葉を使うことも多い。

(v) $\boldsymbol{r}$ を手書きする場合は、太字の代わりに $\vec{r}$ を使うとよいだろう。

定義 2.1 (速度と速さ)**.** 経路 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ に対して、

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) = \boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

を**速度** (velocity)、速度の大きさ

$$\|\boldsymbol{r}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

を**速さ** (speed) と呼ぶ。

例 2.2 (Cycloid)**.** 半径 1 の円が、x 軸上をすべることなく正の方向にころがるとき、$t = 0$ で原点に一致する円周上の一点 P の運動の様子。ただし、円の中心の速さは 1 であるとする。

時刻 t における円の中心の位置は、$(t, 1)$. 点 P の回転角を θ とすると、すべらないことから $\theta = -t - \pi/2$.

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, 1) + (\cos\theta, \sin\theta) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

点 P が x 軸と接するたびに一瞬動きが止まる。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (1 - \cos t, \sin t) = (0, 0) \iff t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots.$$

この動きが一瞬止まる点（すなわち速さが 0 となる点）を**特異点** (singular point) という。特異点以外を**通常点**（regular point）という。

例 2.3 (向有線分)**.** 二点 $P_0 = (a_0, b_0, c_0)$, $P_1 = (a_1, b_1, c_1)$ を結び P_0 から P_1 へ向かう**向有線分** (line segment) のパラメータ表示は、

$$P(t) = tP_1 + (1-t)P_0 = ((1-t)a_0 + ta_1, (1-t)b_0 + tb_1, (1-t)c_0 + tc_1) \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

パラメータの範囲を実数全体に取れば、二点 P_0, P_1 を通る直線のパラメータ表示を得る。

例 2.4. 曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)$ 上の点 $\boldsymbol{r}(a)$ を通る接線の方程式（パラメータ表示）は、$\boldsymbol{r}(t)$ の $t = a$ における一次の近似式

$$(x, y, z) = \phi(a) + t\phi'(a) = (x(a) + tx'(a), y(a) + ty'(a), z(a) + tz'(a))$$

で与えられる。

例 2.5. 経路

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

は**つるまき運動** (helix) を表わす。この螺旋運動の速度と速さは、

$$\boldsymbol{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \qquad \|\boldsymbol{r}'(t)\| = \sqrt{2}.$$

したがって、$\boldsymbol{r}(a)$ を通る接線のパラメータ表示は、

$$(x, y, z) = (\cos a - t\sin a, \sin a + t\cos a, a + t)$$

で与えられる。

問 1. 円 $x^2 + y^2 = 1$ に糸が巻き付いており、その端が $(1, 0)$ にある。糸を張ったまま解いていくとき、端点の描く曲線をパラメータ表示し図示せよ。（伸開線という）。

速さを積分すると**道のり** (distance) が得られる：

$$L = \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\|\, dt.$$

例 2.6.

(i) 円周。
(ii) 線分の長さ。
(iii) サイクロイドの長さ。
(iv) 螺旋の長さ。

平面曲線が極座標を使って、$r = r(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ と書かれるとき、角座標 θ をパラメータとした表示 $(x, y) = r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$ に道のりの式を適用すれば、

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta$$

を得る。

問 2. $r = \sin\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ である曲線の概形を描き、その長さを求めよ。

変数変換 (change of variables) とは、微分可能関数 $t = h(s)$ で h' が連続かつ 0 にならないもの、をいう。このとき、常に $h' > 0$ か常に $h' < 0$ のいずれかである。前者の場合、変数変換は向きを保つという。

経路 $\boldsymbol{r}(t)$ に対して、変数変換 h との合成（関数）$\boldsymbol{r}(h(s))$ は、新たな経路を定める。これを**パラメータの取り換え**という（テキスト 9.3)。

パラメータを取り換えても、その像は同一であるから、同じ曲線を表わす。言いかえると、同じ軌道上の異なる運動を記述するということである。変数変換が向きを保つ場合には、曲線の向きも保たれる。

パラメータの取換えで、速度は次のように変化する。

$$\frac{d\boldsymbol{r}(h(s))}{ds} = \left(\frac{dx}{dt}(h(s))\frac{dh}{ds}, \frac{dy}{dt}(h(s))\frac{dh}{ds}, \frac{dz}{dt}(h(s))\frac{dh}{ds}\right) = h'(s)\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(h(s)).$$

定理 2.7 (Theorem 9B)**.** パラメータを取り換えても、道のりは同じである。以下、道のりを**曲線の長さ**とみなす。

問 3. 向きを変える変数変換に対して、道のり不変性を確かめよ。

問 4. 円の伸開線の長さをほどいた糸の長さで表わせ。

なめらかなパラメータ表示をもたない曲線にも有効な長さの定義も与えておこう。

定義 2.8. 曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ の分割点 $\boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{r}(t_1), \ldots \boldsymbol{r}(t_n)$ $(a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b)$ を結んだ折れ線の長さ

$$\sum_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{r}(t_j) - \boldsymbol{r}(t_{j-1})\|$$

を考え、分割点を細かくしていった場合の極限値を曲線の長さ $|C|$ と定義する。

定理 2.9. 曲線 C がなめらかなパラメータ表示 $\boldsymbol{r}(t)$ をもてば、

$$|C| = \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\|\, dt$$

である。

注意．曲線を折れ線で近似する際の要点は、折れ線が曲線の接線をも（ほとんどいたるところ）近似しているということ。線分を「ギザギザ線」で置き換えたものは長さの近似を与えないことに注意。

例 2.10. アルキメデスが行ったように半径 r 円を内接する正 n 角形で近似しよう。その際の誤差は、

$$2\pi r\left(1-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right) \fallingdotseq \frac{\pi^3 r}{3n^2}.$$

誤差の程度が $O(1/n^2)$ であることに注意しよう。後ほど、円柱の表面積を「多面体近似」する際に、この円方向の誤差を n^2 程度蓄積することで、「ぎさぎざ近似」と同様の効果が現れることを見ることになる。

3 勾配ベクトル

微積分で最も重要な概念は何かと問われたならば何と答える？私なら迷わず一次近似式と答える。これが微分の本質であろうと思われるからであるが、関数 $f(x,y,z)$ であれば、

$$\Delta f(a,b,c) \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\Delta z,$$
$$\Delta f(a,b,c) \equiv f(a+\Delta x,b+\Delta y,c+\Delta z)-f(a,b,c)$$

といった式のことである。これを正確に述べたのがいわゆる全微分であり、無限小量の間の等式

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

とみたのが微分形式である。

変数 (x,y,z) のところに曲線のパラメータ表示 $(x(t),y(t),z(t))$ を代入するならば、いわゆる**鎖則** (chain rule)

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

が得られる。丁寧に書けば、

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t),z(t))=$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}(t).$$

注意 . 左辺は、$f(x,y,z)$ に $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ を代入して t の関数にしたものの微分である。一方、右辺に現れる $f_x((x(t),y(t),z(t))$ は、偏導関数 $f_x(x,y,z)$ (これは (x,y,z) の関数) に $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ を代入した結果を表している。代入

したあとで微分するか、（偏）微分したあとで代入するかで結果が異なることは合成関数の微分の特徴である。

例 3.1. 直方体の２辺がそれぞれ２％増加し、残りの１辺が１％減少したならば、体積は何%増加するか。$V = xyz$ と

$$\Delta V = yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z$$

との比を取って得られる

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

に $\Delta x/x = 0.02$, $\Delta y/y = 0.02$, $\Delta z/z = -0.01$ を代入すると、$\Delta V/V = 0.03$ となるので、約３％増加することがわかる。

問 5. 上の近似計算の誤差を求めよ。（正確には、2.9996 ％の増加である。）

一次の近似式に現れる係数を並べて得られるベクトル

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\mathbf{k}$$

を記号 $\nabla f(a,b,c)$ あるいは $\mathrm{grad} f(a,b,c)$ で表わし、f の (a,b,c) における**勾配ベクトル** (gradient) と呼ぶ。ここで、

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0), \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

は、空間の基本ベクトルである。

注意．gradient は、grade からの派生語で、グレイディエントのような感じで発音するのだが、日本では、なぜかグラディエント（ドイツ語読み？）で通っている。∇ の方は、ナブラ (nabla) と読むのだが、ベクトル解析の創始者（の一人である）J.W. Gibbs に従ってデル (del) というのもおしゃれかも知れない。因みに、‘nabla’ というのは、古代アッシリア語で竪琴（ハープ）を意味するという。さらにどうでもよいことながら、$f(x)$ は、「x の関数 f」という気分で ‘f of x’ と読む。（括弧の存在は無視。）

この新しい記号を使えば、一次近似式は、内積を使って

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\Delta z) \fallingdotseq (a,b,c) + \nabla f(a,b,c)\cdot(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

と書き表わされる。

さて、一次近似式で、とくに変位ベクトル $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ として単位ベクトル $\mathbf{n}$ を取り、その方向をいろいろと変化させると、内積の幾何学的意味から次のことがわかる。

勾配ベクトルは、関数 f の (a, b, c) における最大変化率の方向を表わしその大きさは、最大変化率に等しい。

これをもう少し、幾何学的な形に表現すると次のようになる。実数 h に対して、$f(x, y, z) = h$ という式で表わされる曲面（等位面という）とその上の点 (a, b, c) を考える。いま、h の値を少しだけ変化させて $f(x, y, z) = h + \Delta h$ という曲面も考える。この状況で、勾配ベクトル $\nabla f(a, b, c)$ は、曲面 $f = h$ の (a, b, c) における法線方向を向いており、勾配ベクトルの大きさは、曲面間隔の逆数に比例する（間隔が狭いほど勾配ベクトルは大きい)。実際、$\nabla f(a, b, c)$ が、曲面の接線方向と直交することは、鎖則から従うので、法線ベクトルとなっている。また、この法線と曲面 $f = h + \Delta h$ との交点と点 (a, b, c) を結ぶ変位ベクトルを $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ で表わせば、

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \lambda \nabla f(a, b, c)$$

という表示を用いて、

$$\Delta h = \nabla f(a, b, c) \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \lambda |\nabla f(a, b, c)|^2$$

となるので、

$$|\nabla f(a, b, c)| = \frac{\Delta h}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}$$

を得る。すなわち勾配ベクトルの大きさは、等位面間の距離の逆数に比例する。

以上の説明が有効であるのは、当然のことながら、接平面とか法線とかが意味をもつ $\nabla f(a, b, c) \neq 0$ となる場合で、このような点 (a, b, c) を f の**通常点** (regular point) という。通常点でない点を f の**特異点** (singular point) と呼ぶ。通常点における関数の変化の様子は単純なものであるが、特異点の付近での様子は、千差万別。とは言っても、特異点の中でも性質の良いものがあり、それは、特異点におけるヘッセ行列の正則性で特徴づけられる。一変数関数の場合だと、二階導関数が消えない点ということで、極大または極小の様子が、放物線のそれで記述される。変数が多くなると、この極大・極小が（方向に依存して）混在し、より複雑にはなるが、それでも線型代数の技を使って二次形式の分類に持ち込めば、ほとんど全てのことがわかってしまう。

注意．日本ではあまり使われていないようであるが、関数 $f(x)$ に対して、$\{x; f(x) = c\}$ という形の集合を **level set**（等位集合？）という。とくに、$x \in \mathbb{R}^3$ の場合が**等位面** (level surface) であり、$x \in \mathbb{R}^2$ の場合は**等高線** (level curve or contour line) と呼ばれる。

例 3.2. 等位面 $f(x,y,z)=h$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は、

$$f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0,$$

法線の方程式（パラメータ表示）は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+tf_x(a,b,c) \\ b+tf_y(a,b,c) \\ c+tf_z(a,b,c)) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

微分係数を考える場所を変化させることで導関数が得られるのと同じ理屈で、勾配ベクトルを考える点を変化させると、点ごとにベクトルが定まるという状況が出現する。これを**勾配ベクトル場**と呼ぶ。場所ごとにベクトルが定まっている状況を一般に**ベクトル場** (vector field) と称する。勾配ベクトル場というのは、一般のベクトル場の中にあって、特殊な位置を占めるのであるが、特殊であるがゆえにまた有用でもある。

さて、ベクトル場の典型的な例としては、流体の速度ベクトル場が挙げられる。具体的には、風速ベクトル場が身近な存在であろう。一方、気圧の勾配ベクトル場を考えると、風速ベクトル場は、それに比例すると思いたくなるが、地上の風については、地球の自転による影響も大きく、単純でないのは理科の授業で学んだ通り。

他に「見える」例としては、磁場というものもあり、これは鉄粉をまいた紙の裏から磁石を当てることで確かめられる。

例 3.3. 関数 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の勾配ベクトルを求めると、

$$\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

問 6. r^n の勾配ベクトルを求めよ。

例 3.4. 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は、

$$ax+by+cz=1.$$

問 7. 関数 $f(x,y,z)=x\cos(xy+z)$ の勾配ベクトルおよび曲面 $f(x,y,z)=0$ の点 $(1,\pi/3,\pi/6)$ における接平面の方程式を求めよ。

4 ベクトル場と流線

ベクトル場そのものは、かなり広い意味合いの概念であるが、ここでは、そのうち速度ベクトル場（正確には時間に依存しない場合）とその流線（積分曲線ともいう）について、ごく基本的なことを中心に述べてみよう。

定義 4.1. **ベクトル場** (vector field) とは、ベクトルを値に取る関数のことである。変数の数とベクトルの成分の数は必ずしも一致する必要はない。より正確には、変数の動きうる集合とベクトルの集合との間には、関連があっても良いし無くても構わない。

以上が、数学用語としてのベクトル場の定義であるが、物理等で実際に使われる状況では、変数の作る集合と何らかの関連をもったベクトルを問題にする場合がほとんど（全て？）である。例えば、速度ベクトル場の場合、ベクトルとしては、場の変数（＝空間の点）の変位ベクトルの極限

$$F(a,b,c) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\Delta z) - (a,b,c)}{\Delta t}$$

として関連している。具体的には、場の変数（＝空間の点）を表示する際の座標の選び方に応じてベクトルの成分表示が定まり、座標の取り換えに対しては、ベクトルの成分も同様の変換を受ける、ということである。このような見方は、現実の観測・実験を記述する方法として自然なものであり、観測される様々な数値データを相互に比較する際には、暗黙の了解も含めて必要不可欠と言って良いだろう。これについて詳しく述べると「物理量の座標変換論」といったものになり、これはこれで重要ではあろうが、「数学としてのベクトル解析」からは離れてしまうので、これくらいにしておこう。

例 4.2.

(i) 速度ベクトルは、座標のスケール変換に対して、同じ形のスケール変換を受ける。
(ii) 勾配ベクトルは、座標のスケール変換に対して、逆数の形でのスケール変換を受ける。

形式の上からは、座標を（したがって速度ベクトルを）縦ベクトル表示した場合は、勾配ベクトルは横ベクトルの形に書くのが理に適っている、ということである。

以下では、割り切った数学的定義にしたがってベクトル場を取り扱う。ただし、「変数の数＝ベクトルの成分の数」である場合を専ら扱うものとする。ベクトルの成分はいくつあっても同様であるから、$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$$

というベクトル場を考えよう。ここで、$F_1,\ F_2$ は必要なだけ微分可能な関数であるとする。

注意．変数を並べる際は、縦ベクトル表示で通しておくのが理に適っているいるのだが、書く場所をとることもあり、妥協して、横ベクトルでの表示も許容することにする。（整合性の観点からは、両者は区別されるべきであり、縦横を不用意に同一視すべきではないのであるが。）ということで、上で与えた縦ベクトル表記の代わりに

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

のようにも書くことにする。

まず、勾配ベクトル場の特徴として、

命題 4.3. ベクトル場 $F(x,y)$ が勾配ベクトル場であれば、たすき掛け微分の等式 $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ が成り立つ。

Proof. これは、偏微分の基本事項であるので、ここで「証明」するまでもないことなのだが、どうだろうか。未だに「繰り返し偏微分」の計算も意味も怪しい人はいないと信じたいのだが。仮に、$F_1 = \varphi_x$, $F_2 = \varphi_y$ であったとしよう。そうすると、

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

□

注意．上の命題の逆も「大体」成り立つ。これについては、後ほど詳しく述べる。

偏微分の交換法則については、微積分の教科書で成り立たない例を必ず取り上げることになっているようだが、そういったものを初学者相手にしつこくやるのは、どうであろうか。数学的にも、「超関数」に対する微分作用と思えば、交換法則は成り立つわけであるし。

例 4.4. ベクトル場 $F(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ がいつ勾配ベクトル場であるか調べてみよう。まず、上のたすき掛け微分の関係式から、$\beta = \gamma$ でなければならない。このとき、$\varphi_x = \alpha x + \beta y$ を積分して、$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta xy + f(y)$. これを $\varphi_y = \beta x + \delta y$ に代入すると、$f'(y) = \delta y$、すなわち $f(y) = \delta y^2/2 + c$ となって、F は、関数 $\varphi(x,y) = \alpha x^2/2 + \beta xy + \delta y^2/2 + c$ の勾配ベクトル場であることがわかる。

まとめると、線型ベクトル場

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が勾配ベクトル場であるための必要十分条件は、行列 A が対称行列であること。

問 8. 空間のベクトル場 $F(x_1, x_2, x_3)$ が 3 次の正方行列 L を使って

$$F(x_1, x_2, x_3) = L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

のように与えられている時、F が勾配ベクトル場であるための必要十分条件は L が対称行列であることを示せ。

問 9. ベクトル場 $F(x, y) = (x - y^2, -2xy + 2y^3)$ について、命題の条件が満たされることを確かめ、$F = \nabla f$ となる関数 f を求めよ。

勾配ベクトル場については、元の関数の等高線（あるいは等位面）の情報から、全体の様子を読み取ることができる。一般のベクトル場の場合は、考えている点ごとにベクトルの矢印を表示することで、全体の様子が把握できるだろう。

例 4.5.

(i) 定ベクトル場 (constant vector field) $F(x, y) = (u, v)$.
(ii) 放射状の流れ $F(x, y) = (x, y)$.
(iii) 回転流 $F(x, y) = (-y, x)$.

問 10. 次のベクトル場を図示せよ。(i) $F(x, y) = (x, 0)$, (ii) $F(x, y) = (x, -y)$.

曲線 $(x(t), y(t))$ がベクトル場 $F(x, y)$ の**流線** (flow line, streamline) であるとは、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x(t), y(t)) \\ F_2(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

を満たすこと。正確には、上記微分方程式の解である経路から（パラメータの情報を落として）定められる曲線ということである。流線の他に積分曲線 (integral curve) という用語もよく使われる。流線は、ベクトル場の方向を視覚化する上でとくに威力を発揮するものではあるが、ベクトル場の大きさについての情報までは、与えてくれないことに注意しよう。

例 4.6. 勾配ベクトル場 ∇f の流線は、等高線（等位面）と直交している。

流線の大域的様子は、一般に非常に複雑なもので解析が難しい。以下では、狭い範囲での様子を調べる際の基本について、簡単に説明しよう。

まず、$F(a, b) \neq 0$ となる点 (a, b) の付近では、$F(x, y)$ は、ほとんど $F(a, b)$ に近いの

で（狭い範囲に限定すると一定の風が吹いている)、

$$\frac{dx}{dt} = F_1(a,b), \quad \frac{dy}{dt} = F_2(a,b)$$

を解いて、$x(t) = F_1(a,b)t + x(0)$, $y(t) = F_2(a,b)t + y(0)$ という直線を得る。狭い範囲に限定すると、流線は平行な直線群になっているということである。このように、ベクトル場が消えない点（**通常点**という）の付近の様子は、単純なものである。

これに対して、ベクトル場が消える点（**特異点**という）の付近は、もっと複雑である。まず、特異点では流線がその点に留まり続けることに注意。特異点 (a,b) の付近でのベクトル場の様子を調べる際の常套手段にベクトル場の線型化がある。具体的には、ベクトル場の成分関数の (a,b) における一次近似式

$$F_1(x,y) \fallingdotseq F_{11}(x-a) + F_{12}(y-b), \quad F_2(x,y) \fallingdotseq F_{21}(x-a) + F_{22}(y-b),$$
$$F_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial x}(a,b), \quad F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial y}(a,b), \quad F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(a,b), \quad F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial y}(a,b),$$

を使って、

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

と置き直したものを元のベクトル場の**線型化**（linearization, これもベクトル場）という。

問 11. ベクトル場 $F(x,y) = (x^2 + y, x + y + 2)$ の特異点および特異点における線型化を求めよ。

問 12. ベクトル場 $F(x,y) = (\sin(x+y), \sin(x-y))$ の点 $(\pi/2, \pi/2)$ における様子を調べよ。

問 13. 勾配ベクトル場の場合には、もとの関数のヘッセ行列を考えることに他ならない。このことを確認。

ベクトル場の局所理論においては、次の結果が基本的であるが、時間的制約もあり、深入りはしない。

定理 4.7. 特異点における線型化の行列が正則である（逆行列をもつ）場合には、特異点の付近でのベクトル場の様子は、線型化行列の共役類により決定される。

ここで、2 つの正方行列 A, B が共役であるとは、可逆な行列 T が存在して $B = TAT^{-1}$ と書けること。

例 4.8. 湧き出し・吸い込み・回転

$$A = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\sin\theta \\ a\sin\theta & a\cos\theta \end{pmatrix}, \quad a > 0.$$

問 14. ベクトル場 $F(x,y) = (\sin(x-y), x+y)$ の特異点および（特異点における）線型化を求め、線型化行列の固有値を求めよ。

問 15. ベクトル場 $F(x,y) = (x-1, -y-1)$ を図示し、その流線を求めよ。

ベクトル場の練習としては、

(i) ベクトル場の流れ図で大まかな把握
(ii) 特異点の位置と特異点付近での様子
(iii) 可能ならば、解曲線の様子

がわかればとりあえず良いだろう。

注意 . 微分方程式の解法については、「応用解析」の授業で扱われる。ここで話題にした方向からの微分方程式については、俣野博「常微分方程式入門」（岩波書店)、あたりを見ると良いだろう。

5 線積分

ベクトル場の線積分である。英語でも line integral という。線積分の物理的な解釈として、力学的な仕事の計算がある。仕事＝力×移動量、である。力も移動量もベクトルであるから、×は内積の意味で考える。具体的には、ベクトル場 F と曲線 C が与えられると、その線積分は、リーマン積分風に

$$\int_C F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} F(\boldsymbol{r}_j) \cdot (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_{j-1})$$

と定義されるべきものである。ここで、$\boldsymbol{r}_0, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ は、曲線 C の端点または分点を表わし、$\Delta = \max\{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_{j-1}|; 1 \le j \le n\}$ である。

定理 5.1. 線積分は、曲線 C のパラメータ表示 $\boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ を使って

$$\int_a^b F(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t)\, dt$$

と計算できる。

Proof. 証明の概要は次の通り：

$$\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_{j-1} = \boldsymbol{r}(t_j) - \boldsymbol{r}(t_{j-1}) \fallingdotseq \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t_j)(t_j - t_{j-1})$$

という近似式を使い、変位ベクトルの部分を速度ベクトルを使った式で書き直すと、

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum F(\phi(t_j)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t_j)(t_j - t_{j-1}) = \int_a^b F(\phi(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t)\,dt$$

である。 □

注意．上の証明を数学的に紛れのない形にするには、近似の誤差の評価が必要となる。この部分も難しいことはないのであるが、不等式を使った積分値の評価は、学生の苦手とするところであり、かつこれを丁寧にやったからといって計算できるようになるわけでも線積分に対する感覚が身につくわけでもない。

ということで、通常、誤差評価の議論を省略した説明が多くの教科書でなされている。しかしながら、この省略した部分を「自明」とすることは、数学者の場合、その「良心」が許さないわけで、ついくどくどと証明を書いてしまって、多くの学生に嫌われるという結果に相成る。テキストの著者は、そういった経験に基づいて、数学者の良心と学生の計算力の妥協の産物として、パラメータ表示を定義式にする形を採用したのであろう。個人的には、この「良心」の部分は胡散臭く思っているので、上で概観したような（多くの教科書で採用されている程々の）方式を奨める。

計算例を挙げる前に、もう一つの表記法の説明をしておこう。線積分の記号で、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に対して $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ と書き、形式的に内積の計算を実行すると、

$$\int_C F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$$

という微分形式による表記を得る。これをパラメータを使った計算式に書き改めると

$$\int_a^b \left(F_1(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + F_2(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + F_3(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt} \right) dt$$

となるので、覚えやすい。（Leibniz 記法の威力！）

例 5.2. 線分 $(-t, t+1)$ $(0 \le t \le 1)$ を C とするとき、

$$\int_C (x-y)dx + xydy = \int_0^1 (-t-(t+1))(-1)dt + \int_0^1 (-t)(t+1)dt =$$

さて、パラメータ表示を使った線積分の計算式を改めて眺めてみると、右辺の積分量は、道のパラメータ変換に対して、ほとんど変化しないのであるが、唯一、向きの反転に対して符号を変える。（このことは、線積分の最初の定義からも分る。）すなわち曲線の向きの選び方に依存して決まる量であることに注意しよう。ここが曲線の長さの計算と大きく異なる点である。別の言い方をすれば、線積分の場合、狭い範囲で細かく寄り道をしようが単純に進もうが、最終的に沿う道が同じであれば、同一の結果を与える。より具体的に、$(0,0)$ から $(1,1)$ に至る経路を、直線でとっても、あるいは細かい階段状にとっても（階段の幅を 0 にもっていく極限では）同じ線積分の結果が得られる。

曲線の長さの場合だと、こうは行かない。線積分に対するこのような注意は必要であると思われるのだが、この点について説明してある教科書は意外にも少ない。標語的に、「線積分はベクトル和、長さは（正）スカラー和」である。

問 16. 線積分の値が曲線のパラメータの取り換えでどのように変化するかを、置換積分と関連付けて調べよ。

命題 5.3 (線積分の線型性と加法性)**.**

$$\int_C (aF(\boldsymbol{r}) + bG(\boldsymbol{r})) \cdot d\boldsymbol{r} = a\int_C F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} + b\int_C G(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\int_{C_1+C_2} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r},$$

$$\int_{-C} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

線積分を、ベクトル場 F と曲線 C から実数を作り出す操作と考えて仮に、$\langle F, C\rangle$ と書くことにすると、上の命題の内容は、

$$\langle aF + bG, C\rangle = a\langle F, C\rangle + b\langle G, C\rangle, \quad \langle F, C_1 + C_2\rangle = \langle F, C_1\rangle + \langle F, C_2\rangle$$

のようになる。このベクトル場と図形を関連づける量という見方は非常に有用なもので、後ほど、さらにいくつかのそういった「積分」に出会うことになる。

ここで、「曲線の和」に関連して、区分的になめらかな曲線について一言。曲線として単純正則なものに限るのは、ある意味妥当な制限であるのだが、一方でまた、そういったものだけで済ませようとすると却って不便な状況が生じる。多少、角ばったものも許容するだけの自由度が欲しいときによく使われるのが、**区分的になめらか** (piece-wise smooth) という概念（というほど大げさなものではないが）である。曲線の範囲をここまで広げると、曲線の和を無条件で行えるようになる。これにもまた向きの概念を導入することが可

能で、線積分は、向き付けられた区分的になめらかな道（あるいは曲線）に関する積分とみなされるものであり、命題の後半は、定積分についての積分端変更に関するものと類似の公式が成り立つということである。この加法性と向きの反転に対する応答性が線積分の重要な性質となっている。

問 17. ベクトル場 $F(x,y,z)=(y,z,x)$ を曲線（半径 r の球の経線）

$$C_{r,\phi}: \quad (x,y,z)=(r\sin t\cos\phi, r\sin t\sin\phi, r\cos t), \quad 0\le t\le\pi$$

に沿って線積分せよ。

さて、積分があるところ不等式あり、ということで線積分にまつわるものを一つ挙げておこう。

命題 5.4.

$$\left|\int_C F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\right| \le |C|\,\|F\|_C.$$

ここで、$|C|$ は曲線 C の長さを表わし、$\|F\|_C=\max\{|F(\boldsymbol{r})|;\boldsymbol{r}\in C\}$ である。

定理 5.5. 勾配ベクトル場の線積分は、曲線の始点・終点を使って、

$$\int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{r}=f(\boldsymbol{r}_f)-f(\boldsymbol{r}_i)$$

と計算できる。

逆にベクトル場 F の線積分が曲線の始点・終点のみに依存するとき、F は勾配ベクトル場である。

勾配ベクトル場の線積分の公式は、微積分の基本定理そのものである。力学においては、この性質をもつ力（のベクトル場）を保存力と称し、保存力を（勾配ベクトル場として）与える関数のことを、**位置エネルギー** (potential energy) と呼んでいる。

例 5.6. 物理的に重要な例として、静電場のクーロンポテンシャル $1/r$ がある。これは、原点を特異点に持つ関数になっており、その力は

$$-\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

という逆二乗の法則に従う中心力である。

例 5.7. 分離型ベクトル場

$$F(x,y,z) = (f(x), g(y), h(z))$$

は、原始関数の和として表わされる関数

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy + \int h(z)\,dz$$

の勾配ベクトル場である。

6 グリーンの定理

曲線 C（のパラメータ表示）$\{\boldsymbol{r}(t)\}$ $(a \leq t \leq b)$ で $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$ となっているものを**閉曲線** (closed curve) という。閉曲線に関する線積分は、循環 (circulation) とも呼ばれ、強調して

$$\oint_C F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

と書く。とくに平面のベクトル場の場合は、**周回積分** (contour integral) と称される。

循環という用語を使えば、

「ベクトル場が勾配ベクトル場であるための必要十分条件は、循環が常に 0 となること」

と述べられる。

例 6.1. 分離型ベクトル場の循環は、

$$\oint_C f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz = 0.$$

以下、この節では、平面のベクトル場について考える。

例 6.2. ベクトル場

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の円 $C : (x,y) = (\cos t, \sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に関する周回積分は、

$$\int_0^{2\pi} (-\cos(t+\theta)\sin t + \sin(t+\theta)\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin(t+\theta-t)\,dt = 2\pi\sin\theta.$$

問 18. 幾何学的な意味を考えて（積分計算せずに）、上の例を考えよ。

問 19. ベクトル場 $F(x,y) = r^{-n}(-y,x)$ の円 $C : (a\cos t, a\sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ に関する周回積分を求めよ。また、結果が半径 $a > 0$ に依存しないのは n がどのような場合か。

領域 D とその境界 ∂D の向き。

補題 6.3.

$$\oint_{\partial D} x dy = -\oint_{\partial D} y dx = |D|.$$

Proof. 境界の向きに注意して、通常の積分に帰着させる。 □

定理 6.4 (循環密度)**.**

$$\lim_{D\to p} \frac{1}{|D|} \oint_{\partial D} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(p) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(p).$$

Proof. ベクトル場の（成分の）一次近似式を使い、さらに、勾配ベクトル場の部分とそれ以外の部分に分ける。それ以外の部分には、上の補題を適用する。$p = (a,b)$ とし、$(x,y) \fallingdotseq (a,b)$ に対する近似式

$$F(x,y) \fallingdotseq F(a,b) + F'(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = F(a,b) - F'(a,b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + F'(a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で、

$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

と分けると、

$$G(x,y) = F(a,b) - F'(a,b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、勾配ベクトル場であるので、その循環は 0 となる。したがって、

$$\oint_{\partial D} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \fallingdotseq \omega \oint_{\partial D} (-ydx + xdy) = 2\omega|D|$$

であるが、

$$2\omega = (\beta + \omega) - (\beta - \omega) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(a,b)$$

に注意すれば、求める式を得る。 □

問 20. n 次正方行列 A を対称行列と交代行列の和で表せ。

次の２つを思い出しておこう。

$$\int_{y_-}^{y_+} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = f(x,y_+) - f(x,y_-).$$

$D = \{(x,y); a \le x \le b, \varphi_-(x) \le y \le \varphi_+(x)\}$ のとき、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

定理 6.5 (George Green, 1828)**.**

$$\oint_{\partial D} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Proof. ２つの方法で説明できる。

(i) 周回積分の網目分解による。誤差の評価が必要であるが、詳細は省略。

(ii) 補題の証明を参考に、直接、積分微分の公式に帰着させる。

領域 D が、関数 $y = \varphi_\pm(x)$ $(a \le x \le b)$ を使って、$D = \{(x,y); \varphi_-(x) \le y \le \varphi_+(x)\}$ と表わされるならば、∂D は $\varphi_\pm$ のグラフの差で書けるので、

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} F_1(x,y)\,dx &= \int_a^b \left(F_1(x,\varphi_-(x)) - F_1(x,\varphi_+(x))\right) dx \\
&= -\int_a^b dx \int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)dy \\
&= -\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)\,dxdy.
\end{aligned}$$

□

系 6.6. 平面ベクトル場 F の定義域に「穴」が開いていない場合、F が勾配ベクトル場であるための必要十分条件は $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ である。

例 6.7. ベクトル場 $F(x,y) = (xy, x)$ と領域 $D = \{(x,y); 0 \le x, y \le 1\}$ の場合。

$$\oint_{\partial D} xydx + xdy = \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} (xydx + xdy) = 0 + \int_0^1 dy - \int_0^1 xdx + 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (xy)}{\partial y} \right) dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy(1-x) = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

問 21. $D = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \leq 1\}$ の場合に確かめよ。

グリーンの定理の応用として、線積分は直交折れ線によっても近似されることを注意しておこう。近似曲線と本来の曲線との違いが、面積が無視できる範囲に限定されるならば、線積分も近似されるという事実である。一方で、曲線の長さの場合には、そのような近似は成り立たない。ベクトル和の打ち消し効果に注目。

例 6.8. ベクトル場

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

にグリーンの定理を適用するために、循環密度を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = 0$$

となるので、その重積分の値は 0 である。一方、円盤 $x^2+y^2 \leq 1$ の境界である円 $x^2+y^2=1$ に沿った周回積分は、

$$\int_0^{2\pi} \left(-\sin t(\cos t)' + \cos t(\sin t)' \right) dt = 2\pi$$

となって、一致しない。

問 22. 上の矛盾はどこに原因があるのか？

循環密度は、普通「回転」という用語で表現される。何故に、「回転」と呼ばれるのか説明しておこう。（理由については、付録を見よ。）速度ベクトル場 $F(x,y)$ に従う水流を考える。その中の (a,b) という地点に木の葉をそっと置くと、木の葉は速度 $F(a,b)$ で移動し出すと同時に回転運動を始める。その回転運動の角速度の 2 倍がベクトル場 $F(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における循環密度に他ならない。

後ほど扱う 3 次元ベクトル場の「回転」と呼ばれる量の場合は、（無重力中の） 3 次元水流の中に剛体を置いた際に軽い剛体が行う回転運動の角速度ベクトルの 2 倍を表わしている。

重積分が出てきたので、少し復習しておこう。行列式の幾何学的意味は良いであろうか。カリキュラム上は、「行列代数」・「微積分 II」と二度にわたって学ぶことになっているのだが、腹立たしいことになっていないだろうか。行列式に限らず幾何学的意味を認識することは、数学に対する適切な直観を手に入れることになり、最重要課題の一つである

のだが、代数は代数、幾何は幾何、あるいは解析は解析とお互いを無視すると対応できなくなる。

２次の行列式は、平行四辺形の符号付き面積であり、３次の行列式は、平行六面体の符号付き体積である。この事実を認識するだけで、行列式の値が零であれば、それを構成するベクトルが一次従属になることが直観的に理解できるだろう。重積分との関連でいえば、無限小変換で（微小）直方体が（微小）平行六面体に写される訳で、その体積比は、いわゆるヤコビ行列式の絶対値と相成る。無限小量の集積が積分であると心得れば、これから重積分の変数変換公式がただちに導出される。二重積分の場合を書き下せば、

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

例 6.9. よく使われる極座標変換 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ の場合であれば、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

上の変数変換公式で注目すべきは、ヤコビ行列式を囲む絶対値記号の存在である。１変数の変数変換公式（＝置換積分）の場合、このような絶対値記号は必要なかった。実は、１変数定積分の定義では、積分変数に向きがついていて、それが積分値の符号にも関わってくる（寄与する）という仕組みになっていて、変数変換が向きを反転させる場合にも有効な形になっていたのでる。翻って、上記重積分では、「積分変数に対する向き」（これは面積にも符号をつけるということであるが）が取り入れられておらず、絶対値を含む変数変換公式では、変数変換の「向き」を絶対値で矯正してある。

後で説明するように、積分変数の向きを取り入れて、変数変換の公式から絶対値記号を取り除くことは可能である。その過程で、面積要素あるいは体積要素に向きを定義することになり、曲面積の場合には、「面積ベクトル」の導入へとつながることになる。

もう一つの注意事項として、上記変数変換公式は、「重複のない」変数変換に限って適用できる点である。（１変数の場合は、「重複」があっても、その「向き」が反対になって打ち消し合うので、重複の有無を気にせずに使える。）

例 6.10. 円環 $a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2$ $(0<a<b)$ の面積を、重複のある変数変換 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(a\leq r\leq b, 0\leq\theta\leq 4\pi)$ を機械的に適用して計算すると、

$$\int_a^b \int_0^{4\pi} r d\theta dr = 2\pi(b^2-a^2)$$

となり、正しい値 $\pi(b^2-a^2)$ の２倍になってしまう。

常に重複がないかどうか、あっても無視できるかどうかに注意しながら「分割して統治」することになる。

最後に、変数変換の合成に関するヤコビ行列式の乗法性を復習しておく（面積分のところで必要になる）。

命題 6.11. 変数変換 $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ に変数変換 $(u, v) = (u(s, t), v(s, t))$ を代入して得られる合成変換 $(s, t) \mapsto (x, y)$ に対して、

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}$$

が成り立つ。（右辺第一因数の (u, v) には、$u(s, t)$, $v(s, t)$ を代入して s、t の関数にしておく。）

7　ベクトルの外積と行列式

まずは、直交射影の復習から。単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ を一つ固定し、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{e}$ 方向の成分 $\boldsymbol{v}_e$ とそれに直交する成分 $\boldsymbol{v}_\perp$ に分解すると、

$$\boldsymbol{v}_e = (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{e}.$$

問 23. ベクトル $(-1, 1, -1)$ を曲線 C: $(t, t^2, -t)$ の $t = 1$ における接線方向とそれに垂直な成分とに分解せよ。

面積に「向き」を考えよう。そのためには面積を考える幾何学的対象（図形）をはっきりさせなくてはならない。曲面の面積については後ほど調べることにして、ここでは 3 次元空間内の平面的図形に対する面積を扱う。さて、図形が載っている平面であるが、その法線方向の単位ベクトル（＝大きさが 1 のベクトル）が丁度二つ定まる。そこで、このいずれかを指定することで平面の向きを表わすとみなす。そして、このように向きの定められた平面内の図形 D に対して、その**面積ベクトル** (area vector) を

$$\boldsymbol{D} = |D|\boldsymbol{n}$$

で定める。ここで、$|D|$ は、D の面積を、$\boldsymbol{n}$ は平面の向きを与える単位法線ベクトルを表わす。

空間のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、この二つのベクトルの定める平面の向き $\boldsymbol{n}$ を、右ねじの規則で定める。さらに、この二つのベクトルの張る平行四辺形を考え、その面積ベクト

ルを $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と書いて（読み方は「a クロス b」)、ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の**外積** (outer product) という。定義から、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行であること。また $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ である（外積の交代性)。

問 24. 外積は、結合法則を満たさない。これを確認。

問 25. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成す角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とするとき、

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\theta.$$

定理 7.1. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の成分表示を $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ とするとき、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Proof. 左辺を $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ と書くと、これは平行６面体の符号付き体積に一致することにまず注意する。（符号は、右手系のときプラス、左手系のときマイナスと定める。）このことから、$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ の交代性と線型性が従うので、右辺の行列式に比例する。比例定数が 1 であることは、基本ベクトルを代入して比較すればわかる。 □

系 7.2. 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ それぞれについて線型であり、その成分表示は、

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

注意．ベクトルの外積を幾何学的に定義した場合は、その線型性は証明を要することであるにもかかわらず、当然成り立つ如く計算を始める本の何と多いことよ。ちなみに、内積を幾何学的に導入した場合の線型性の確認は容易である。

問 26.

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}.$$

問 27.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0.$$

例 7.3. ４点 O, A, B, C を頂点とする４面体の体積は、

$$\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\right|$$

である。

問 28. 原点 O と 3 点 $A(1,1,1)$, $B(-1,1,2)$, $C(3,1,1)$ を頂点とする 4 面体の体積を求めよ。

定理 7.4 (多面体面積ベクトル)**.** 多面体で、各面の向きを多面体の内側から外側に向かうように定める。このとき多面体を構成する面の面積ベクトルの総和は零ベクトルである。

Proof. 4 点 O, A, B, C を頂点とする 4 面体について示す。一般の多面体は 4 面体に分割することで、この場合に帰着する。さて、

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$$

とおくと、各面の面積ベクトルは

$$\overrightarrow{OAB} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{OBC} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{OCA} = -\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{ABC} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$$

となるので、外積の線型性と交代性により、これらの総和は零となる。 □

例 7.5. 向きのついた平面図形 D の面積ベクトル $\overrightarrow{D}$ の $\boldsymbol{e}$ 成分は、$\boldsymbol{e}$ と直交する平面への D の射影 $D_\perp$ の定める面積ベクトル $\overrightarrow{D_\perp}$ に等しい。

問 29. 3 点 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ の定める三角形 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

問 30. 3 点 $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(1,2,1)$ を通る平面 H の向きを $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で定めるとき、点 $C(2,1,1)$ は H の表側か裏側か。

8 勾配ベクトルと等位面

空間座標 x, y, z の間に関係式 $f(x,y,z) = 0$ が成り立つような点の集まりはどのような図形を表すだろうか？

例 8.1. (i) $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ は、原点を中心とする半径 $a > 0$ の球面。

(ii) $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$ は、一葉双曲面 (hyperboloid of one sheet).

(iii) $-x^2 - y^2 + z^2 - a^2 = 0$ は、二葉双曲面 (hyperboloid of two sheets).

(iv) $x^2 + y^2 - z = 0$ は、回転放物面 (paraboloid).

曲面の方程式 $f(x,y,z) = h$.

3 変数の関数 $f(x,y,z)$ について考える。特定の点 (a,b,c) の付近の様子は、一次近

似式

$$f(x,y,z) \fallingdotseq f(a,b,c) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c)$$

によって記述される。ただし、右辺が定数関数にならない、すなわち

$$\nabla f(a,b,c) \neq (0,0,0)$$

という前提の下で。このような点を通常点あるいは正則点といい、そうでない点を特異点という。

通常点の付近では、例えば、$f_z \neq 0$ であれば、$f(x,y,z) = f(a,b,c)$ を z について解ける。(陰関数定理)。解いた結果を $z = h(x,y)$ とすると、

$$f(x,y,z) = C \iff z = g(x,y)$$

であるから、関数 g のグラフである。これは、少なくとも g がなめらかな関数であれば、曲面を表す。

9 曲面のパラメータ表示

直線が一個のパラメータで表示されたように、**曲面** (surface) は二個のパラメータ (u,v) によって、

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D$$

のように表示される。ここで、D は uv-平面内の領域を表わす。

例 9.1. 原点を通り、2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ で張られる平行四辺形は、

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}, \qquad 0 \leq u, v \leq 1$$

とパラメータ表示される。

問 31. 三角形 OAB のパラメータ表示を与えよ。ここで、$A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ である。

問 32. 平面のパラメータ表示を与え、それからパラメータ u, v を消去して平面の方程式を導き、それを法線ベクトルによるものと比較せよ。

例 9.2. 半径 $r > 0$ の球面は、

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\cos\phi,\ z = r\cos\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

とパラメータ表示される。（これを球面極座標という。）

さて、曲面のパラメータ表示 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ に対して、２つの接ベクトル

$$\boldsymbol{r}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)), \quad \boldsymbol{r}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$$

は、接平面を張り、その法線ベクトルは、$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ で与えられる。さらに、４点

$$\boldsymbol{r}(u, v), \quad \boldsymbol{r}(u + \Delta u, v), \quad \boldsymbol{r}(u, v + \Delta v), \quad \boldsymbol{r}(u + \Delta u, , v + \Delta v)$$

の作る微小平行四辺形の面積ベクトルとして

$$\Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\, \Delta u\, \Delta v$$

を得る。とくに、微小面積は、$\Delta S = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \Delta u\, \Delta v$ であり、それの総和としての**曲面積** (surface area) は、二重積分

$$\iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, dudv$$

によって与えられる。

例 9.3. 半径 r の球の表面積。

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta), \quad \boldsymbol{r}_\phi = (-r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, 0)$$

$$\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi = r^2\sin\theta(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

$$r^2\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta = 4\pi r^2.$$

問 33. 曲面 $\boldsymbol{r} = (1 - s)(0, 0, t) + s(\cos t, \sin t, t)$ $(0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le \pi)$ を図示し、その曲面積を求めよ。

問 34. 曲面 $\boldsymbol{r} = (u, v, u^2 + v^2)$ $(u^2 + v^2 \le 1)$ を図示し、その曲面積を求めよ。

問 35. 曲面 $x^2 + y^2 + (z/c)^2 = r^2$ のパラメータ表示を与え、その曲面積を求めよ。赤道半径＝６３７８ｋｍ、極半径＝６３５７ｋｍ、表面積$= 5.0995 \times 10^8$ km^2。

問 36. 曲面 $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$ の表面積を表わす関数を $(a,b,c)=(r,r,r)$ のまわりでテーラー展開し、１次の項まで求めよ。

問 37. 曲面 $\boldsymbol{r}=(u+v,u^2-v,u-v^2)$ 上の点 $\boldsymbol{r}(1,2)$ における接平面の方程式を求めよ。（こういう問題なら、いくらでも作れる。）

問 38. パラメータ表示が与えられた曲面の「特異点」は、どのように定義すべきか考え、特異点をもつ曲面の例を与えよ。

問 39. 関数 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ のグラフを x 軸のまわりに回転させた曲面のパラメータ表示を円柱座標を使って与え、曲面積を表す式を導け。

２次元の場合、変数変換は次のようになる。$\mathbb{R}^2$ 内の領域 D, D' と D から D' への全単射 ϕ が変数変換であるとは、

(i) $\phi(u,v)=(\phi_1(u,v),\phi_2(u,v))$ と表すとき、関数 ϕ_1, ϕ_2 は連続微分可能であり、
(ii) ϕ のヤコビ行列式が消えないこと、すなわち $\dfrac{\partial(\phi_1,\phi_2)}{\partial(u,v)}\neq 0$ が成り立つこと

と定義する。このとき、逆写像 $\phi^{-1}:D'\to D$ も変数変換になることが示される。常に $\dfrac{\partial(\phi_1,\phi_2)}{\partial(u,v)}>0$ が成り立つとき、変数変換は「向きを保つ」と称する。次は、重積分の変数変換の公式に他ならない。曲面積を、パラメータ表示を使って定義した以上、必ず確かめておかなければならない。

定理 9.4. 曲面積は、パラメータの取り方に依らない。

例 9.5. 半径 a の半球の表面積を３種類のパラメータ表示で求めてみよう。最初は、球極座標によるもので、既に計算したように $4\pi a^2$。

二つ目は、円筒座標による

$$(x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,\sqrt{a^2-r^2}),\quad 0\le r\le a, 0\le\theta\le 2\pi$$

を使って、

三つ目は、素朴なグラフ表示 $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\le r^2)$ を使って。

シュワルツの提灯 (Schwarz lantern)

10　面積分と流束

曲面の向きについて考えよう。これは「表と裏」を区別することに他ならない。表裏の区別は、狭い範囲であれば、法線ベクトルの方向を指定する（裏から表へ法線を引く）ことと言いかえられる。問題は、広い範囲で有効な向きの定義であるが、狭い範囲での向きの指定が全曲面に亘って矛盾なく定められているとき、**曲面に向きがついている**、と呼ぶことにする。向きがついた曲面の場合、そのパラメータ表示としては、$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ が曲面の向きを向いているものを考えるものとする。

このとき、微小曲面を接平面内の微小平面図形で置き換えて、その面積ベクトル（面積要素という）を $d\boldsymbol{S}$ で表わせば、

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \, dudv$$

となる。

定義 10.1. ベクトル場 $F(x, y, z)$ と向きのついた曲面 S:$(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ に対して、その**面積分** (surface integral) を

$$\iint_S F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D F(\boldsymbol{r}(u, v)) \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) \, dudv$$

で定める。また面積分で表わされた量をベクトル場 F の**流束**とか**流量**(flux) と呼ぶ。

例 10.2. 定ベクトル場 $F(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}$ の平面図形 D に関する面積分はベクトル $\boldsymbol{v}$ に従って単位時間に平面図形 D を裏から表へ抜ける流れの体積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{D}$ （これが流量の意味）に一致する。

一般の流束は、微小な D に対する流量を曲面全体に対して積分したものと解釈される。

問 40. 定ベクトル場 $F(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c}$ の平行四辺形 $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ $(0 \leq u, v \leq 1)$ に関する面積分は、行列式 $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ に等しい。

例 10.3. 平面領域 D の上で定義された関数 $f(x, y)$ に対して、そのグラフ $z = f(x, y)$ の表わす曲面を S_f で表わす。ただし、S_f の向きは、z 軸上方を向いているものとする。このとき、ベクトル場 F の S_f での面積分は、

$$\iint_D \left(F_3(u, v, f(u, v)) - F_1(u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) - F_2(u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right) dudv$$

となる。実際、S_f のパラメータ表示は、$\boldsymbol{r}(u,v) = (u,v,f(u,v))$ $((u,v) \in D)$ で与えられ、

$$\boldsymbol{r}_u = (1,0,f_u), \quad \boldsymbol{r}_v = (0,1,f_v), \quad \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (-f_u,-f_v,1).$$

問 41. $f(x,y) = c(1 - x/a - y/b)$ $(x \geq 0, y \geq 0, x/a + y/b \leq 1)$、ただし $a > 0, b > 0, c > 0$ は正定数、であるときベクトル場 $F(x,y,z) = (x,y,z)$ の曲面 S_f に関する面積分を求めよ。

定理 10.4. 面積分は、曲面のパラメータの取り方に依らない。

Proof. これも、二重積分の変数変換の公式から従う。ここで、パラメータを取り換える際に現れる変数変換は、パラメータが曲面の向きを与えるという条件から、「向きを保つもの」でなければばならない。その結果、現れるヤコビ行列式の値が正となり絶対値記号が不要となることに注意しよう。 □

命題 10.5. 面積分（＝流束）は、線型性と加法性をみたす。ベクトル場 F の（向きのついた）曲面 S に関する面積分を $\langle F, S\rangle$ という記号で表わせば、

$$\langle aF + bG, S\rangle = a\langle F, S\rangle + b\langle G, S\rangle,$$
$$\langle F, S_1 + S_2\rangle = \langle F, S_1\rangle + \langle F, S_2\rangle, \quad \langle F, -S\rangle = -\langle F, S\rangle.$$

例 10.6. 原点と 3 点 $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ によって定められる直方体の各面について、ベクトル場 $F(x,y,z) = (yz,zx,xy)$ の面積分を求めよ。ただし、面の向きは直方体の内部から外部に向かう向きを取るものとする。

例 10.7. 原点を囲む外向きの曲面 S に対して、

$$\int_S \frac{1}{r^3}\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S}$$

を**立体角** (solid angle) という。立体角は、S を半径 1 の球面に投影して得られる曲面の面積に等しい。

曲面のパラメータ表示 $\boldsymbol{r}(u,v)$ に対して、投影面のパラメータ表示は、$\boldsymbol{\rho}(u,v) = \boldsymbol{r}(u,v)/r(u,v)$ で与えられる。

$$\boldsymbol{\rho}_u = \frac{1}{r}\boldsymbol{r}_u - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_u}{r^3}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{\rho}_v = \frac{1}{r}\boldsymbol{r}_v - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_v}{r^3}\boldsymbol{r}$$

および

$$\boldsymbol{\rho}_u \times \boldsymbol{\rho}_v = \frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v - \frac{\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}_v + \frac{\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}_u$$

であるから、

$$|\boldsymbol{\rho}_u \times \boldsymbol{\rho}_v| = \boldsymbol{\rho} \cdot (\boldsymbol{\rho}_u \times \boldsymbol{\rho}_v) = \frac{1}{r^3}\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)$$

より分かる。

問 42. 原点からみた三角形 ABC $(A = (1,0,0),\ B = (0,1,0),\ C = (0,0,1))$ の立体角について、面積分で計算したものと曲面積として計算したものとを比較し、

$$\iint_D \frac{dudv}{(u^2 + v^2 + (1-u-v)^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{2}$$

を示せ。ここで、$D = \{(u,v); u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$ である。

問 43. ベクトル場 $F(x,y,z) = r^{-n}(x,y,z)$ について、半径 $a > 0$ の球面に関する流束を求めよ。結果が a に依存しないのは、n がいかなる場合か。

重積分の変数変換で、

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

であったことを思えば、$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\,dudv$ の部分は形式的に $(dydz, dzdx, dxdy)$ と書きたくならないだろうか。しかし、そのためにはヤコビ行列式の絶対値を外しておく必要があり、そうすると行列式の交代性との整合性から $dxdy = -dydx$ でなければならない（同じ理由で、$dudv = -dvdu$)。このような関係を満たす代数構造は、グラスマン代数と呼ばれるもので、今の場合、通常の積と区別するために、$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ という書き方をする。したがって、正しい表記法は、

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du \wedge dv$$

であり、それを並べた

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v du \wedge dv = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$$

である。面積分は、これを用いて、（積分記号も一つだけにして）

$$\int_S (F_1(x,y,z)dy \wedge dz + F_2(x,y,z)dz \wedge dx + F_3(x,y,z)dx \wedge dy)$$

とも表記される。これは、非常に良い記法で、例えば、微分関係式

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

を $dx \wedge dy$ に代入して形式的に計算すると（グラスマン積の交代性から $du \wedge du = dv \wedge dv = 0$ に注意)、

$$dx \wedge dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) du \wedge dv$$

が自然に出てくる。

こういった計算方法を数学的に整備したものが微分形式 (differential form) と呼ばれるもので、後ほど導入されるベクトル場に対する微分演算はすべてこの微分形式に対する操作の形に書き改めることができ、そうすることで、２・３次元に限定されない積分定理の実体が明らかとなる。

グリーンの定理で、符号の選び方を覚えるのは結構難儀なものであるが、この微分形式を使えば、

$$\oint_{\partial D} (F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy) = \int_D (dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy) = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

のようにして思い出せる。

最後に、添え字表示について一言。具体的な計算を行う際には、これまで使ってきた $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ のような表記が便利であるが、多くの位置ベクトルが関係する積分を書き直すといった計算の場合には、使える文字に不足を来すだけでなく、ベクトル表記そのものが鬱陶しい場面も出てくる。その場合には、$x = (x_1, x_2, x_3)$ といったベクトル強調なしの添え字表記が便利である。これに合わせて、積分要素についても

$$dx = (dx_1, dx_2, dx_3), \quad d_2x = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2), \quad d_3x = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

と書くことにする。したがって、面積分であれば、

$$\int_S F(x) \cdot d^2x = \int_S F_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + F_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + F_3(x)dx_3 \wedge dx_1$$

と規則的な表示を得る。また、パラメータの入った

$$\int_S \frac{1}{|x-y|} F(y) \cdot d_2y$$

のような積分でも紛れがない。

11　流束密度と積分定理

ここでは、**閉曲面** (closed surface) すなわち縁をもたない曲面に関する面積分および流束について考える。閉曲面の場合、曲面で囲まれた（体積が有限である）部分 V が確定す

るので、曲面の向きとしては、内側から外側へ向かう向きを選んでおく。閉曲面はまた、V の境界として確定するので、それを ∂V という記号で表わす。

球体 $V = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ であれば、$\partial V = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 = 1\}$ は、球面である。

問 44. 直方体 $\{(x,y,z); |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c\}$ の境界面を向きも込めて記述せよ。

定理 11.1.

$$\iint_{\partial V} F(x) \cdot d_2 x = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

定義 11.2. 右辺の被積分関数をベクトル場 F の**発散** (divergence) と呼び、$\nabla \cdot F$ または $\operatorname{div} F$ と書く。

Proof. 立体 V を $f(x,y) \leq z \leq g(x,y)$ $((x,y) \in D)$ のように表わせば、境界面は $S_g - S_f$ となっているので、

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial V} F_3 \boldsymbol{e}_3 \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D \left(F_3(x,y,g(x,y)) - F_3(x,y,f(x,y)) \right) dxdy \\
&= \iint_D dxdy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)\, dz \\
&= \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)\, dxdydz.
\end{aligned}$$

同様に、x 方向、y 方向について書きなおしたものを足せば良い。ただし、そのためには、面積分がパラメータの取り方に依存しないことを確かめておく必要がある。 □

注意 . divergence を数学用語に倣って「発散」と訳して使われるようだが、この場合の意味は「広がり散る」ということであるので、流体をイメージして「湧き出し」とでも呼んだ方が良いだろう。というのも、これにマイナス符号をつけた $-\nabla \cdot F$ は、convergence と呼ばれるものであるが、誰も「収束」とは言わない。「湧き出し」に対比させて、「吸い込み」ということはあっても。

例 11.3. 次は、ベクトル場の発散を流束密度として解釈するものである。

$$\nabla \cdot F(p) = \lim_{V \to p} \frac{1}{|V|} \iint_{\partial V} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

逆に、この「微分形」を積分形に書き直せば、上記定理が復元する。

問 45. 閉曲面 S に対して、

$$\int_S d\boldsymbol{S} = 0$$

である。

浮力の計算

質量密度が ρ (一定) で静水圧重力下にある流体の圧力は、「面に垂直で、強さ $\rho gz + p_0$ で与えられる」という主張を使って、浮力の計算をしてみよう。圧力ベクトル場は、

$$\boldsymbol{a} \cdot \int_{\partial V} (\rho gz + p_0) d\boldsymbol{S} = \int_{\partial V} (\rho gz + p_0) \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho g a_3 dxdydz = a_3 \rho g |V|$$

より、鉛直方向上向きに $\rho g|V|$ であることがわかる。

連続の方程式

密度関数 $\rho(t, \boldsymbol{r})$ で与えられる質量分布が速度ベクトル場 $F(t, \boldsymbol{r})$ に従って移動（運動）しているとき、閉曲面 ∂V を通っての質量の単位時間当たりの移動量は、

$$\int_{\partial V} \rho(t, \boldsymbol{r}) F(t, \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}.$$

一方、V 内の質量の変化率は

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \boldsymbol{r})\, dxdydz = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dxdydz$$

であるので、質量保存の関係は、

$$\int_V \nabla \cdot (\rho F)\, dxdydz = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dxdydz$$

となる。したがって、これが、任意の V で成り立つための条件は、

$$\nabla \cdot (\rho F) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

ρ が電荷密度を表わす場合には、ρF は電流密度を表わし、上の等式は、電荷の保存則を表わす。

一般に、密度関数 (density function) ρ と流密度場 (current density) J についての関係式

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

を**連続の方程式** (continuity equation) という。物理量の**保存法則** (conservation law) を表わしていると考えられる。

問 46. 閉曲面 ∂V が原点を内部に含むか否かで分けて、面積分

$$\int_{\partial V} \frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を求めよ。この結果は、きわめてデルタ関数のきわめて有用な表示式を与える。

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} = 4\pi\delta(\boldsymbol{x}).$$

問 47. すべてのなめらかかつ急減少な関数 $f(x,y)$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}^2} G\triangle f\,dxdy = f(0,0)$$

を満たす関数 $G(x,y)$ で $r=\sqrt{x^2+y^2}$ だけに依存するものを求めよ。

12　循環密度と積分定理

再度、循環について取り上げる。ベクトル場の一次近似式の循環を求めてみよう。一次式のうち、定数部分と対称行列部分は勾配ベクトル場となっているので、それらの循環は 0 である。交代行列部分を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

とし、三角形 ABC ($A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$) の周囲 $\partial(\triangle ABC)$ に沿った循環を求めてみると、

$$\int_{\partial(\triangle ABC)} F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \alpha bc + \beta ca + \gamma ab$$

となる。一方、三角形 ABC の面積ベクトルは

$$\overrightarrow{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(bc, ca, ab)$$

であるので、

$$2\alpha = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\quad 2\beta = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\quad 2\gamma = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

と合わせると

$$\int_{\partial(\triangle ABC)} F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = (\nabla\times F)\cdot\overrightarrow{\triangle ABC}$$

となる。ここで、

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

である。この右辺の表わすベクトル場を F の**回転** (rotation, curl) と呼ぶ。上の計算結果は、ベクトル場の回転が、循環密度としての意味を持っていることを示している。

一般に、向きづけられた曲面 S に対して、その**境界** (boundary) ∂S は閉曲線となるのであるが、曲面の法線ベクトルを右ねじでおきかえることで得られる向きを、∂S に定めておく。

定理 12.1 (Stokes)**.**

$$\oint_{\partial S} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Proof.

$$\oint_{\partial S} F_3(x, y, z) dz = \iint_D \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) dudv$$

を示す。これを巡回的に書き直したものを全て加えると定理が得られる。

さて、

$$f(u, v) = F_3(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

と置けば、そして u-v 平面での閉曲線 C: $(u(t), v(t))$ を

$$\partial S : (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$

であるように取ると、グリーンの定理により

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} F_3(x, y, z) dz &= \int_a^b f(u(t), v(t)) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt \\
&= \oint_C f(u, v) \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) dudv.
\end{aligned}$$

これに、

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

を代入して、少し計算すると求める等式が得られる。 □

問 48. 上の証明で示した等式の巡回的書き直しである

$$\oint_{\partial S} F_1(x,y,z)dx = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv,$$

$$\oint_{\partial S} F_2(x,y,z)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right) dudv$$

が成り立つこと、および、それらの総和が定理の内容を与えることを確かめよ。

例 12.2. 線型ベクトル場 $F(x,y,z)$ と空間内の平面領域 D に対して、

$$\oint_{\partial D} F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = (\nabla \times F) \cdot \boldsymbol{D}.$$

注意．$\nabla \times F$ を表わす記号として、他に rot$F$, curl$F$ も良く使われる。特に英語圏では、rot よりも curl が好まれる。英語の rot には「腐敗・堕落」といった悪い意味があるので、忌避されたのだろう。日本（というよりも非英語圏）では、rot と書かれることが多い。（ドイツ語の rot は赤の意。）

Gibbs の本によると、curl という用語は Maxwell が使い始めたらしい。この Gibbs の本であるが、１００年前に出たものが今もそのまま使えるという、すごいものである。その秘密や如何。

定理 12.3. なめらかな境界をもった領域の上で定義されたベクトル場 F に対して、次は同値。

(i) $F = \nabla \times G$ となるベクトル場 G が存在する。
(ii) F の定義域内の任意の閉曲面 S に対して、その流束が消える。

(i) から (ii) は、Stokes の定理でわかるが、逆の (ii) から (i) の方は易しくない。直感を併用した証明もどきを付録で与えておく。それですら、けっこう面倒である。

A 回転量

ベクトル場 $F(x,y)$ の原点における線型近似を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とし、流れの微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を解くと、L が逆行列を持つという条件の下で

$$T_t(x,y) = L^{-1}(e^{tL} - I)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + e^{tL}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を得る。ここで、行列 L を $L = S + A$, ${}^tS = S$, ${}^tA = -A$ と対称な部分と交代な部分に分け、さらに

$$L^{-1}(e^{tL} - I) = tI + O(t^2), \qquad e^{tL} = e^{tA}e^{tS} + O(t^2)$$

を使うと、

$$T_t(x,y) = t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + e^{tA}e^{tS}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(t^2)$$

となる。最初の項の意味は明らかである。次に、e^{tS} の効果を理解するために、行列 S を対角化する座標で考えれば、

$$e^{tS}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、x 方向に $e^{\lambda t}$ 倍、y 方向に $e^{\mu t}$ 倍する伸縮効果を表わすことがわかる。木の葉に対しては、形を維持するための抗力が働きこの効果は相殺されることになる。

最後に e^{tA} の部分であるが、

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

と書き表わせば、角速度 ω の回転を表わすことがわかる。

以上の分析は、3次元回転を記述するという技術的な点はあるものの、3次元の場合にも有効で、速度ベクトル場の回転量が、流れの運動の角速度成分の2倍を表わすことがわかる。

B　デルタ関数

補題 B.1. 有界可測関数 $f(y)$ $(y \in \mathbb{R}^3)$ が $f(y) = O(1/|y|^{2+\epsilon})$ を満たしているとき、積分

$$g(x) = \int_V \frac{f(y)}{|x-y|}\, d_3y$$

は絶対収束し、$x \in \mathbb{R}^3$ の関数を定める。関数 $f(y)$ が $y = a$ で連続であれば、$g(x)$ は $x = a$ で微分可能であり、

$$\nabla g(a) = \int_V \frac{y-a}{|a-y|^3} f(y)\, d_3y.$$

さらに、f が 開集合 U で連続微分可能であれば、∇g も U において連続微分可能であり、

$$\triangle g = -4\pi f \quad \text{on } U$$

が成り立つ。

Proof. 点 $a \in \mathbb{R}^3$ を任意に固定し、滑らかな関数 $0 \leq \rho \leq 1$ で、

$$\rho(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |y-a| \leq \delta, \\ 0 & \text{if } |y-a| \geq 2\delta \end{cases}$$

となるものを取って来て、

$$g(x) = \int_V \frac{\rho(y)f(y)}{|x-y|}\, d_3y + \int_V \frac{(1-\rho(y))f(y)}{|x-y|}\, d_3y$$

とわけると、２つめの積分は、a の付近で x について解析的であり、

$$\nabla \int_V \frac{(1-\rho(y))f(y)}{|x-y|}\, d_3y = \int_V \frac{y-x}{|x-y|^3}(1-\rho(y))f(y)\, d_3y. \tag{1}$$

１つ目の積分が微分可能であることは、次のようにして確かめられる。

$$\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|a-y|} = \int_0^1 dt\, \frac{(a-x)\cdot(tx+(1-t)a-y)}{|tx+(1-t)a-y|^3}$$

に注意して、ベクトル場を

$$F(x) = \int_V d_3y\, \frac{y-x}{|x-y|^3} f(y)\rho(y)$$

により定めると、

$$\int_V \frac{\rho(y)f(y)}{|x-y|}\, d_3y - \int_V \frac{\rho(y)f(y)}{|a-y|}\, d_3y = \int_0^1 dt\, F(tx+(1-t)a)\cdot(x-a)$$

と書ける。そこで、$F(x)$ が $x=a$ で連続であることを示せばよい。積分を球座標を使って書き直すと、

$$F(x) = \int_V d_3y\, \frac{y}{|y|^3}\rho(x+y)f(x+y) = \int_0^\infty dr \int_{|\omega|=1} d\omega\, \rho(x+r\omega)f(x+r\omega)\omega$$

であるから、f の連続性から F の連続性が従う。のみならず、

$$\nabla \int_V \frac{\rho(y)f(y)}{|x-y|}\, d_3y = F(x)$$

であるから、(1) と併せると、求める微分の表示式を得る。

さらにまた、

$$\nabla g(x) = \int_V \frac{y-x}{|x-y|^3}(1-\rho(y))f(y)\,d_3y + \int_0^\infty dr \int_{|\omega|=1} d\omega\,\rho(x+r\omega)f(x+r\omega)\omega$$

であるから、$f(x)$ が $x=a$ の近くで微分可能であれば、$\nabla g(x)$ もそうであり、

$$\begin{aligned}\triangle g(x) &= \int_V \nabla_x \cdot \left(\frac{y-x}{|x-y|^3}\right)(1-\rho(y))f(y)\,d_3y + \int_0^\infty dr \int_{|\omega|=1} d\omega\,\nabla\left(\rho f\right)(x+r\omega)\cdot\omega \\ &= \int_0^\infty dr \int_{|\omega|=1} d\omega\,\nabla\left(\rho f\right)(x+r\omega)\cdot\omega = \int_V \frac{y-x}{|x-y|^3}\cdot\nabla_y(\rho(y)f(y))\,d_3y.\end{aligned}$$

途中で、

$$\nabla_x \cdot \left(\frac{y-x}{|x-y|^3}\right) = 0 \quad (x \neq y)$$

を使い、球座標を直交座標に戻した。さて、

$$\nabla_y \cdot \left(\frac{y-a}{|a-y|^3}\rho(y)f(y)\right) = \frac{y-a}{|a-y|^3}\cdot\nabla_y(\rho(y)f(y)) \quad (y \neq a)$$

を積分して、

$$\begin{aligned}\int_V \frac{y-x}{|x-y|^3}\cdot\nabla_y(\rho(y)f(y))\,d_3y &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-a|\geq\epsilon} \nabla_y \cdot \left(\frac{y-a}{|a-y|^3}\rho(y)f(y)\right)d_3y \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-a|=\epsilon} \rho(y)f(y)\frac{y-a}{|a-y|^3}\cdot d_3y \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\omega|=1} \rho(a+\epsilon\omega)f(a+\epsilon\omega)\,d\omega \\ &= -4\pi f(a).\end{aligned}$$

□

形式的に微分と積分の順番を交換すると、補題の結論の部分は、

$$\int \triangle_x \left(\frac{1}{|x-y|}\right) f(y)\,d_3y = -4\pi f(x)$$

となる。これを解釈したものが、Dirac のデルタ関数と呼ばれるもので、原点一点に集中した総量が 1 の仮想的な密度関数を $\delta(x)$ という記号で表す。数学的には、十分ななめらかさを持った関数 f に対して、

$$\int f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$

という等式が成り立つものとして規定される。このデルタ関数を使えば、上の等式は、

$$\triangle_x \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = -4\pi\delta(x-y)$$

と簡潔に表される。

定理 B.2. なめらかな境界 ∂V をもった有界閉領域 V の上で定義された連続微分可能なベクトル場 $B(x)$ に対して、$x \in V \setminus \partial V$ であるとき、

$$4\pi B(x) = \nabla\times\int_V \frac{(y-x)\times B(y)}{|x-y|^3} d_3y - \nabla\int_V \frac{1}{|x-y|}\nabla\cdot B(y)\, d_3y + \nabla\int_{\partial V} \frac{1}{|x-y|} B(y)\cdot d_2y.$$

Proof. By the assumption and the previous lemma, the vector field

$$A(x) = \nabla\times\int_V \frac{1}{|x-y|}B(y)\, d_3y = \int_V \frac{1}{|x-y|^3}(y-x)\times B(y)\, d_3y$$

is continuously differentiable and the relation $\nabla\times\nabla\times = \nabla(\nabla\cdot) - \triangle$ is used to get

$$\begin{aligned}
\nabla\times A(x) &= \nabla\left(\nabla\cdot\int_V \frac{B(y)}{|x-y|}\, d_3y\right) - \triangle\int_V \frac{B(y)}{|x-y|}\, d_3y \\
&= \nabla\left(\nabla\cdot\int_V \frac{B(y)}{|x-y|}\, d_3y\right) + 4\pi B(x).
\end{aligned}$$

Again by the previous lemma,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\int_V \frac{B(y)}{|x-y|}\, d_3y &= \int_V \frac{(y-x)\cdot B(y)}{|x-y|^3}\, d_3y = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|\geq\epsilon} \frac{(y-x)\cdot B(y)}{|x-y|^3}\, d_3y \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|\geq\epsilon} \nabla_y\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\cdot B(y)\, d_3y \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|\geq\epsilon} \nabla_y\cdot\left(\frac{B(y)}{|x-y|}\right) d_3y + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|\geq\epsilon} \frac{\nabla\cdot B(y)}{|x-y|}\, d_3y \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|\geq\epsilon} \nabla_y\cdot\left(\frac{B(y)}{|x-y|}\right) d_3y + \int_V \frac{\nabla\cdot B(y)}{|x-y|}\, d_3y.
\end{aligned}$$

Now the limit in the last line is

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|\geq\epsilon} \nabla_y\cdot\left(\frac{B(y)}{|x-y|}\right) d_3y &= \int_{\partial V} \frac{1}{|x-y|}B(y)\cdot d_2y - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|=\epsilon} \frac{1}{|x-y|}B(y)\cdot d_2y \\
&= \int_{\partial V} \frac{1}{|x-y|}B(y)\cdot d_2y
\end{aligned}$$

□

定理 B.3. 区分的になめらかな境界をもった連結開領域 W の上で定義されたベクトル場 F が、$\nabla \times A$ の形であるための必要十分条件は、W に含まれる任意の閉曲面 S に対して、

$$\int_S F(x) \cdot d_2 x = 0$$

が成り立つこと。

Proof. 条件が必要であることは、湧き出し定理による。

逆を厳密に確かめることは相当面倒なので、直感を併用した説明を試みる。まず W の境界 ∂W の連結成分は

$$\partial W = \bigsqcup_{i=-m}^{n} \partial_i W$$

の形であるとする。ここで、$\partial_i W$ $(-m \le i \le 0)$ は、W の外側の境界の連結性分を $\partial_i W$ $(1 \le i \le n)$ は、内側の境界のそれを表わす。なお、連結成分 $\partial_i W$ が内側であるとは、閉球と微分同相な閉集合 $\overline{B}$ で $\partial_i W$ を含みかつ $\partial B \subset W$ となるものが存在することをいう。とくに、$\partial_i W$ $(1 \le i \le n)$ は、有界集合である。さらに、各 $\partial_i W$ は、区分的になめらかな曲多面体 K_i の境界 ∂K_i に一致するものとする。

このような状況で、外側の境界の 2 点に注ぎ口と排出口をそれぞれ取り付け W に水を静かに流し定常状態になったところを想像してみると、つぎのようななめらかな微分同相写像の存在がわかる。(注入口・排出口はそれぞれ $t = -\infty$, $t = \infty$ に相当。)

$$\mathbb{R}^3 \setminus L \ni (u, v, t) \mapsto \overrightarrow{r}(u, v, t) \in W$$

ここで、$L = \sqcup_i L_i$, $L_i = \{(u_i, v_i, t); a_i \le t \le b_i\}$ である。(各 L_i は、K_i が線分に縮んだもの (dried up) に相当する。) パラメータを調整することで、$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$ としておく。

ベクトル場 F をこの微分同相写像で引き戻すことで、$W = \mathbb{R}^3 \setminus L$ としておいてよい。さて、$c \notin \cup_i [a_i, b_i]$ に対して、

$$W_c = \mathbb{R}^3 \setminus \left(\bigcup_i (-\infty, b_i] \cup \bigcup_j [a_j, \infty) \right)$$

上のベクトルポテンシャル A で、$A = (A_1, A_2, 0)$ であるものを構成しよう。まず、平面 $t = c$ 上での A を、

$$F_3(u, v, c) = \frac{\partial A_2}{\partial u} - \frac{\partial A_1}{\partial v}$$

であるように選んでおく。そうしておいて、W_c でのベクトル場 $A = (A_1, A_2, 0)$ を

$$\oint_{\partial S} A = \iint_S F$$

が成り立つように定める。ここで、曲面 S は、曲線 $C : (u(s), v(s))$ $(0 \leq s \leq 1)$ から

$$\overrightarrow{r}(s,t) = (u(s), v(s), t), \quad 0 \leq s \leq 1, c \leq t \leq z$$

で定められる strip 状のものとする。

線分 $C : (u + s\Delta u, v + s\Delta v)$ に対しては、

$$\oint_{\partial S} A \approx A_1(u,v,c)\Delta u + A_2(u,v,c)\Delta v - A_1(u,v,z)\Delta u - A_2(u,v,z)\Delta v,$$
$$\iint_S F \approx \Delta v \int_c^z F_1(u,v,t)\,dt - \Delta u \int_c^z F_2(u,v,t)\,dt$$

であるから、これを比較して、

$$A_1(u,v,z) = \int_c^z F_2(u,v,t)\,dt + A_1(u,v,c),$$
$$A_2(u,v,z) = -\int_c^z F_1(u,v,t)\,dt + A_2(u,v,c)$$

を得る。

逆に、この式から (*) が従うので、循環密度公式により、$\nabla \times A$ の (u,v) 成分と F のそれが一致する。垂直方向 (t 方向) の成分については、平面領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して、$D_t = \{(u,v,t); (u,v) \in D\}$ とし、曲面 S

$$\{(u,v,t); (u,v) \in \partial D, c \leq t \leq z\} \cup D_c$$

に Stokes の定理を適用して得られる等式

$$\oint_{\partial S} A = \iint_S F$$

の右辺に、ベクトル場 F に対する「湧き出しなし」の条件を適用すれば、

$$\oint_{D_z} A = \iint D_z F$$

となる。再度、循環密度公式から、これは、∇A の面 $t = z$ の法線成分が、F のそれに一致することを意味する。

$D_z = \{(u,v,z);(u,v)\in D\}$ として、

$$\iint_{D_z} A$$

以上で、W_c におけるベクトルポテンシャル A_c の構成ができた。

あとは、A_c $(c < a_1)$ から出発して、下から上へと段階的に取り除いた形に作り直していこう。そのために、

$$W_{\le c} = \mathbb{R}^3 \setminus \left(\bigcup_i [a_i, b_i] \cup \bigcup_j [a_j, \infty) \right)$$

とおく。開領域 W_c $(b_{k-1} < c < a_k)$ におけるベクトルポテンシャル $A_{\le c}$ が構成できたとしよう。開領域 $W_{c'}$ $(b_k < c' < a_{k+1})$ におけるベクトルポテンシャル $A_{c'}$ と比較して、$W_{c'} \cap W_{\le c}$ におけるベクトル場 $A_{c'} - A_{\le c}$ を考えると、これはスカラーポテンシャル ϕ を持つ。実際、$W_{\le c} \cap W_{c'}$ における閉曲線 C に対して、$W_{\le c}$ と $W_{c'}$ ともに開球の表面から内側に出た有限個の線分を除いたものと微分同相になっていて、したがって、曲面 $S \subset W_{\le c}$ および $S' \subset W_{c'}$ で、その境界がそれぞれ $-C$ および C に一致するものがある。したがって、

$$\oint_C (A_{c'} - A_{\le c}) = \iint_{S'} F + \iint_S F = \iint_{S+S'} F$$

となり、$S + S'$ は、W 内の閉曲面であるから、仮定によりこれは 0 である。

そこで、なめらかな関数 $h(t)$ で

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \le a_k, \\ 1 & \text{if } t \ge b_k \end{cases}$$

となるものを用意して、$A_{\le c} + \nabla(h\phi)$ なるベクトル場を考えると、これは、$t < a_k$ で $A_{\le c}$ に一致するので、$W_{\le c}\{t < a_k\}$ まで、なめらかかつ一意的に拡張でき、また、$t > b_k$ では $\nabla \times (A_{c'} + \nabla(h\phi)) = F$ をみたす。以上を合わせると、$A_{\le c} + \nabla(h\phi)$ は、$W_{\le c'}$ におけるベクトル場 $A_{\le c'}$ に、なめらかかつ一意的に拡張でき、$\nabla \times A_{\le c'} = F$ をみたす。 $\square$