SUPPLEMENTS FOR MATH TEACHERS
数学は単純なのがよい—せめて数学だけは

山上　滋

Contents

解析学特論（基礎解析）　大学院

目的：ベクトルは、日常語としても使われる程、人口に膾炙したものとなっているが、その数学教育の中における位置づけについて、その発展の歴史的流れにも配慮しつつ理解を深める。

到達目標：ベクトルの概念の自然科学における発展の流れを知る。その背景の下、数学概念としてのベクトルの確かな理解とその運用方法を修得する。

以下の項目のいくつかについて演習もまじえて学習し、ベクトルの考え方に対する理解を深める。

(i) ベクトルの歴史
(ii) 座標とベクトル
(iii) ベクトル空間とアフィン空間
(iv) ユークリッド空間と剛体運動
(v) 平面の回転と複素数
(vi) 空間の回転と四元数
(vii) ベクトルの内積と外積
(viii) 極性ベクトルと軸性ベクトル
(ix) 角速度とベクトル
(x) 座標変換とベクトル
(xi) 回転群とその表現
(xii) 群の表現とテンソル圏
(xiii) テンソル圏と分岐則代数
(xiv) 平面図式とテンソル圏
(xv) Temperley-Lieb 圏の構造

教科書等：教科書は使わない。参考文献は授業の中で提示する。

評価方法：演習に対する取り組みと提出レポートによる。

数学の教師であれば、当然その理由・背景を知っておくべきにも関わらず、知らずに卒業する可能性が高い話題：

- 正多角形の作図問題
- 円周率の超越性

- 推定と検定
- ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何
- 集合論の歴史

今回は、作図問題をネタに、ベクトルの前菜に始まり、メインはフーリエ懐石風で、最後はヒルベルトの第三問題で締めるという、ミニコース仕立て。

参考書：代数の部分については、
佐武一郎「代数学への誘い」、遊星社
小野孝「数論序説」、§17, §18.
S.G. ギンディキン「ガウスが切り開いた道」

ヒルベルトの問題については、
Abhijit Champanerkar, Scissors congruence and Hilbert's 3rd problem. (scissors-slides.pdf)

http://www.math.csi.cuny.edu/abhijit/talks.html

http://www.math.ucla.edu/~pak/geompol8.pdf

フーリエ解析については、

http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/fourier/fourier.pdf

1. ベクトルあれこれ

ベクトルの歴史、といった話を一度してみたかった。それだけで、本が一冊、書けそうであるが、そういった本が実際あるのかどうか。Amazon で調べてみると、Robin Cook の小説がまず出てくる。Google で検索して見ると、

http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space
http://www.math.ucdavis.edu/~temple/
MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.pdf

が見つかる。少しだけまとめてみよう。題して、ベクトル小史。

ベクトルといえば何と言っても力のつりあい。これは理科だから関係ない、などと言ってはいけない。ゆとり教育は馬鹿げていても、統合教育は重要だ。しかし、教師のスキルが要求される。

balance of forces: Simon Stevin (1548/49–1620)
parallelogram law for force: Pierre Varignon (1654–1722)
Newton's law: Isaac Newton (1642–1727)

力の合成の法則は、このような経過をたどって確立された。もちろん、Newton も大いに利用しているのであるが、力のベクトルとしての性質は、数学でいうところのベクトルと完全に同じではない。力の作用点を考えれば明らか。作用点は、作用直線の上でのみ移動可能であるので、力＝直線＋ベクトル、と見るのが正しいであろう。それでは、高校数学で教わる有向線分の同値類としてのベクトルの起源はどの辺にあるのか。これが、意外と複雑である。

少し話は飛んで、座標とベクトルの成分の違いは、どう教えているのだろうか。これは数を並べた直積集合との関係ということでもある。

歴史的に定まった評価では、Fermat と Descarte が座標を導入したことになっている (1636 頃)。その時点では、有向線分とかいう考え方は未だなかったわけで、座標の方が早かったと言える。ただ、その座標というのも、Fermat が利用したのは、原点から x 軸を引いて、次に x 軸上の点から垂直に y 軸を引く、という形のもので、変位ベクトルに近いものであった。もちろん、この場合もベクトルの合成規則（平行四辺形則）を認めれば、x, y の移動の順序によらずに点を表すことができるので、違いはないとも言えるが、これは後の時代からの見方を逆入させた解釈とも言える。

いずれにせよ、これ以降、座標優位が続く。複素平面のアイデアもそういった流れの中で見出された。さらには、３次元座標に積の構造を導入する努力がなされ、Hamilton の quaternion で、一応の決着を見た。

この当然とも思われる座標に依存しない幾何学的実体の数学的記述は、しかしながら、１９世紀まで待たなければならなかった。最も古い記録としては、Bolzano（あの Bolzano である）が、座標に依らない３次元幾何の記述を１８０４年ごろに試み、その後 synthetic geometry と呼ばれるものが認識され、Möbius の点の凸結合の考え方 (1827) を経て、有効線分の同値類としての幾何ベクトルが Bellavitis によって考案された (1832)。さらに Grassmann の難解な著作などを経て、今でいうところのベクトル空間の概念が Peano の１８８８年 の本で導入された。ちなみに、Cantor の集合論は、１８７４年に始まり、それに続く数年間のことであることを思えば、Peano のベクトル空間の斬新さが際立つ。

まず座標が認識され、その後 coordinate-free な幾何学が追求されたというのは、面白い。もちろん、coordinatefree な幾何学としては、古くユークリッドのそれがあったのであるが、この度の追求は、座標幾何の成果に触発された、代数演算・構造を保持しうる形のものに関してであった。

ベクトルの歴史はこれくらいにしておいて、ここで、抽象的なベクトル空間の定義を復習しておく。このような定義に到達するまでに、どのような労苦があったかに思い致すべきである。一方で、問わずにはいられぬであろう。このような定義をして何が嬉しいのかと。その前に、基底と次元についても復習しておく。３次元空間の幾何ベクトルの場合は、これは座標を設定するための３つの独立な方向と単位の指定であることを確認しておく。

この、幾何学の抽象化でもあったベクトル空間が、実は、方程式のべき根を使った解法を分析する上で極めて強力なものであるという事実。

次元に関連して、集合の個数、とくに可算集合と非可算集合の違いに注意した上で、$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の次元を問う。

部分体と拡大体、その相対的な大きさを測るためにベクトル空間の次元が使える。次の積公式が成り立つ。部分体の入れ子 $K \subset L \subset M$ に対して、

$$\dim_K M = \dim_K L \dim_L M.$$

これは、m 個の籠に、りんごがそれぞれ l 個入ってます。りんごは、全部でいくつあるでしょうか、といった類の算数の問題と同じ。見かけは、高級そうでも。

加減乗除ができる数の集まりが体であった。複素数のそのような集まりを考える。数体 ($\mathbb{C}$ の部分体) という。これは、複素平面上の点の集まりで、加減乗除の操作で閉じているものと言っても良い。その全体像は、通常見え難い。有理数全体。２次体の例。稠密性など。

Exercise 1. 0 以外の数を含むそのような集まりは、必ずすべての有理数を含む。なぜか。

Exercise 2. 数体 K は、$K \subset \mathbb{R}$ でなければ、$\mathbb{C}$ の中で稠密である。これを示せ。

二次拡大は、K の元を係数とする適当な二次方程式の解 ζ を使って $K = K + K\zeta$ と書ける。逆に、K 上既約な二次式の解 ζ に対して、$K + K\zeta$ は、K の二次拡大となる。

Exercise 3. 実数 a, b に対して、$\pm\sqrt{a+ib}$ を具体的に求めよ。

次元の思わぬ効用

正多角形の複素数表示。正７角形が作図できないこと。

$$z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

$$\dim \mathbb{Q}(e^{2\pi i/7}) = 6$$

図形と方程式。例：２つの円の交点を求める過程を見ると、まず交点を通る直線の方程式を見出し、次に円と直線の交点を求めている。連立一次方程式の解放とその幾何学的解釈。高校数学に、平面の方程式の復活を！

Proposition 1.1. $\mathbb{Q}$ 上既約な多項式 f の根の一つを ζ とするとき、$\dim \mathbb{Q}(\zeta) = \deg(f)$ である。

Theorem 1.2. $\mathbb{Q}$ から作図によって得られる点 z は、二次拡大を次々と繰り返して得られる拡大体 $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{n-1} \subset K_n$ のどれかに含まれる。逆に、このような拡大体に含まれる数は、作図可能である。

とくに $\mathbb{Q}$ から作図可能な (constructible) 複素数全体 C は体をなす。

Corollary 1.3. 正 2^n 角形は作図可能である。

正７角形が作図できないこと。そのためには、次の事実を使う。

Theorem 1.4 (Gauss)**.** 素数 p に対して、t の多項式 $t^{p-1} + \cdots + t + 1$ は、$\mathbb{Q}$ 上既約である。言い換えると、$\zeta = e^{2\pi i/p}$ に対して、$1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-1}$ は、$\mathbb{Q}$ 上一次独立。

ガウスの証明は、1 の冪根の対称性に基づく面倒なものである。より簡明な証明は、これもガウスによる原始多項式の性質と Schönemann-Eisenstein の判定法を使うものである。

Theorem 1.5. 整数係数の多項式 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ がある素数 p に対して、$a_j \equiv 0 \mod p$ $(1 \leq j \leq n)$, $a_n \not\equiv 0 \mod p^2$ を満たせば、$\mathbb{Q}$ 上既約である。

Proof. もし、$\mathbb{Q}$ 上可約であれば、

$$a_0(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) = (b_0 x^l + \cdots + b_l)(c_0 x^m + \cdots + c_m)$$

と書ける。ここで、係数はすべて整数。a_0 の素因数 q に対して、両辺を体 $\mathbb{Z}_q$ 上の多項式と思うと、$b_0 \equiv b_1 \equiv \dots b_l \equiv 0 \mod q$ であるか、$c_0 \equiv c_1 \equiv \dots c_m \equiv 0 \mod q$ でなければならない。そこで、両辺を q で割っておくことで、a_0 は素因数を含まない、すなわち $a_0 = \pm 1$ であるとしてよい。$a_0 = -1$ の場合は、両辺に -1 を掛けることで、$a_0 = 1$ と仮定してよい。このとき、x^n の係数を比較すると $1 = b_0 c_0$ となるので、$b_0 = c_0 = 1$ としてよい。

次に、この分解式を $\mathbb{Z}_p$ で考えると、仮定により、左辺は x^n に一致するので、右辺の因子はそれぞれ、x^l, x^m でなければならない。したがって、$b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m$ は全て p の倍数である。そうすると、$a_n = b_l c_m$ は、p^2 の倍数となり、仮定に反する。 □

さて、$h(x) = x^{p-1} + \cdots + 1$ の既約性は、次のようにしてわかる。まず、$f(x) \mapsto f(x+1)$ は、$\mathbb{Q}[x]$ の自己同型を与えるので、$h(x+1)$ が既約であることを示せば良い。二項係数 $\binom{p}{k}$ $(1 \leq k \leq p-1)$ は、p で割り切れるので、

$$h(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} \equiv x^{p-1} \mod p.$$

さらに、$h(1) = p$ は、p^2 で割り切れない。

Exercise 4. 逆を示せ。すなわち、素数でない $n \geq 4$ に対して、t の多項式 $t^{n-1} + \cdots + t + 1$ は、$\mathbb{Q}$ 上可約である。（実は、円分多項式の積として既約分解される。）

複素数 $\zeta = e^{2\pi i/7}$ が作図できるとすると、$K = \mathbb{Q}[\zeta]$ に対して、$K_m \subset K \subset K_n$ となる二次拡大列がとれる。

$$2^{n-m} = \dim_{K_m} K_n = \dim_{K_m} K \dim_K K_n$$

より、$\dim_{\mathbb{Q}} K = \dim_{\mathbb{Q}} K_m \dim_{K_m} K$ は、2^l の形。ところが、$\dim_{\mathbb{Q}} K = 6$ であるから、これは不可能。

Theorem 1.6. 素数 p による正 p 角形は、$p-1$ が奇数因子を含めば、作図不能である。すなわち、$e^{2\pi i/p} \notin C$ である。対偶を取れば、素数 p による正 p 角形が作図可能であれば、$p = 1 + 2^n$ でなければならない。

Exercise 5. $p \geq 3$ を素数とするとき、正 p^2 角形は作図不可能であることを示せ。ヒント：$p^2 - p = p(p-1)$ は、奇数 p を因子に含む。

2. 巡回する巡回群

Dixmier の History of Functional Analysis によれば、関数解析の「肝」は双対性とスペクトルにあるという。その肝を二つながらに食べてみようというのが今回の趣旨である。毒に当たらぬとよいのであるが、まあ味見程度であるから。

双対性とスペクトルの二つから思い浮かぶものは、フーリエ解析である。これから話を始めてみよう。

小林昭七の本に「円の数学」というのがある。当然、フーリエ解析の話があるかと思いきや、ない。ということで、作ってみる。

アナログ時計は良くできている、と思いませんか。誰が発明したのだろう。時の流れを２本あるいは３本の針で表すという粋なアイデア、表彰ものだ。さて、そのアナログ時計の使い方で必要なのが時計算。１２を法とした計算。modulo を「法」といかめしく訳しているが、「単位」の意味だ。１２を単位とした計算と書いたっていい。

１２進むたびに計算を初めからやりなおす訳で、仕組みそのものは単純。１２という数字は、本質的ではなく、２以上の自然数 N であればよい。この N を単位とした計算を表す記号として $a \equiv b \mod N$ がある。$N = 7$ であれば、曜日に結びつけることができる。国際標準では、月曜＝１から始めて、日曜＝７と対応させる。ということで、火曜＋金曜＝日曜、火曜・金曜＝水曜、のようになる。ここで質問：火曜／金曜は何曜日か。

このように周期的というか循環的な現象を記述する数学の概念が巡回群である。具体的な記述としては、$\mathbb{Z}_N$ 加法群と乗法群 $\mathbb{T}_N = \{z \in \mathbb{C}; z^N = 1\}$ がある。前者は曜日算に、後者はアナログ時計に（ただし、針の動く向きが逆）対応する。

準同型 $\mathbb{Z} \ni k \mapsto \zeta^k \in \mathbb{T}_N$ と同型 $\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{T}_N$ についての説明。

$\mathbb{Z}_N$ の方は、さらに環の構造も入る。乗法群 $\mathbb{Z}_N^\times$ は可換であるが、巡回するとは限らない。例えば、$\mathbb{Z}_8^\times$ とか。

Remark 1. $\mathbb{Z}_p$ は、いわゆる体になっている。とくに、$\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ である。

次は、オイラーに由来するものであるが、オイラー自身は証明を成し得なかったといういわくつきのものである。最初の証明は、Legendre による。

Theorem 2.1 (数論の基本定理)**.** 素数 p に対して、

$$\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathbb{Z}_{p-1}.$$

Example 2.2. $p = 5, 17$ の場合に具体的に確かめる。$[k] = k \mod 17$ と書くことにすれば、$\mathbb{Z}_{17}^\times$ の要素は、

$$[1], [2], \dots, [8], [-8], \dots, [-2], [-1]$$

と表される。この中に位数 16 の元があるかどうか確かめるために、自乗を繰り返し計算してみよう。結果は次のようになる。

$$[(\pm 1)^2], [(\pm 2)^2], [(\pm 3)^2], \dots, [(\pm 8)^2] = [1], [4], [-8], [-1], [8], [2], [-2], [-4]$$

$$[(\pm1)^4],[(\pm2)^4],[(\pm3)^4],\dots,[(\pm8)^4]=[1],[-1],[-4],[1],[-4],[4],[4],[-1]$$
$$[(\pm1)^8],[(\pm2)^8],[(\pm3)^8],\dots,[(\pm8)^8]=[1],[1],[-1],[1],[-1],[-1],[-1],[1]$$

したがって、$[\pm3],[\pm5],[\pm6],[\pm7]$ の位数がちょうど 16 となる。

Exercise 6. $[3],[3^2],[3^3],\dots$ を次々計算して、すべての余りが現れること、すなわち $[3]$ が $\mathbb{Z}_{17}^\times$ の生成元であることを確かめよ。$\log_{[3]}[2]$ を求めよ。

Exercise 7. $p=13$ の場合を確かめよ。

用語と概念の導入：可換群 G の元 $g\in G$ の位数、巡回群の定義。g の位数は、$|G|$ の約数であること。

可換群 G から乗法群 $\mathbb{T}$ への準同型写像を G の**指標** (character) と呼ぶ。文字通り、群 G の性格を表すのであるが、G の指標全体を $\widehat{G}$ という記号で表し、G の指標群と呼ぶ。実際、指標を G 上の関数と思って、各点での積により指標の積を定めれば、乗法的可換群である。他に、G の双対群という言い方もする。

Exercise 8. $\mathbb{Z}_{12}$ の各元の位数を求めよ。

巡回群の自己双対性：巡回群 G の生成元 g を用意する。準同型写像 $\mathbb{Z}\ni k\mapsto g^k\in G$ に、準同型定理を適用して、$\mathbb{Z}_N\cong G$. 次に $z\in\mathbb{T}$ が、$z=\chi(g)$ となるための条件は、$z^N=1$ であり、これから、$\chi(g^k)=\zeta^k$ $(\zeta\in\mathbb{T}_N)$ の形で、この指標を χ_ζ で表せば、同型 $\mathbb{T}_N\ni\zeta\mapsto\chi_\zeta\in\widehat{G}$ を得る。ということで、

$$\widehat{G}\cong\mathbb{T}_N\cong\mathbb{Z}_N\cong G$$

がわかる。この事実を、巡回群は自己双対的であると称する。とくに、$|\widehat{G}|=|G|$ である。このことは、巡回群に限らず、一般の有限可換群でも成り立つのであるが、証明には何らかの工夫を要する。たとえば、有限可換群が巡回群の直積に分解されるという事実を使う。

指標 $\chi(a)$ は、$a\in G$ の関数であるが、これを χ の関数とも思い直して、すなわち $\chi\in\widehat{G}$, $a\in G$ 双方の関数とみて、

$$\langle\chi,a\rangle$$

と書く。そうすると、指標の定義と性質は、対称な形になる。これを双指標という。

Theorem 2.3 (直交関係)**.**

$$\sum_{g\in G}\langle\chi,g\rangle=\begin{cases}|G| & \text{if } \chi=1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Proof. 左辺を x とおくと、

$$x=\sum_{g\in G}\chi(ag)=\chi(a)x$$

となるので、$\chi\neq1$ に対しては $\chi(a)\neq1$ となる $a\in G$ を取ってくることで、$x=0$ がわかる。 □

各 $a\in G$ に対して、$\widehat{G}\ni\chi\mapsto\langle\chi,a\rangle\in\mathbb{T}$ は、$\widehat{G}$ の指標を与えるので、$G\to\widehat{\widehat{G}}$ を得る。これが、群の準同型になっていることはすぐにわかる。

Theorem 2.4 (双対性)**.** 上の準同型は、同型 $G\cong\widehat{\widehat{G}}$ を与える。

Proof. 正則表現の既約分解か有限可換群の構造定理。 □

Corollary 2.5.

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle \chi, g \rangle = \begin{cases} |\widehat{G}| & \text{if } g \neq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Example 2.6. これを巡回群 $\mathbb{Z}_N$ のときに確かめる。 等比級数の和の公式との関係。[微分したり積分したり、いろいろ遊べる。]

Exercise 9. 直交関係を使って、$|G| = |\widehat{G}|$ を示せ。

有限可換群 G 上の複素数値関数 f に対して、その**有限フーリエ変換** $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(\chi) = \sum_{g \in G} \langle \chi, g \rangle f(g)$$

で定める。これは、$\widehat{G}$ 上の複素数値関数である。次は直交関係の言い換えであるが、極めて有用である。

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\langle \chi, g \rangle} \widehat{f}(\chi),$$

$$\sum_{g \in G} |f(g)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)|^2.$$

とくに、フーリエ変換は、G の上の関数の作るベクトル空間と $\widehat{G}$ 上の関数の作るベクトル空間の間の同型を与える。

有限フーリエ変換の応用として、$p = 1 + 2^n$ の形の素数 p による正 p 角形が作図可能であることを証明しよう。

そのために、$\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_p^\times}$ に対して、次の形の和 (Gauss sum) を導入しよう。

$$\Gamma(\chi) = \sum_{a \in \mathbb{Z}_p^\times} \chi(a) e^{2\pi i a/p}.$$

ガウス和は、$\mathbb{Z}_p^\times$ 上の関数 $f(a) = e^{2\pi i a/p}$ のフーリエ変換になっていることに注意。逆変換の公式から、

$$e^{2\pi i/p} = \frac{1}{p-1} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_p^\times}} \frac{\Gamma(\chi)}{\chi(1)} = \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_p^\times}} \Gamma(\chi).$$

この表示から、$e^{2\pi i/p} \in C$ を示すためには、$\Gamma(\chi) \in C$ $(\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_p^\times})$ がわかれば十分。

Proposition 2.7.

$$\Gamma(\chi)\Gamma(\eta) = (p-1)\eta(-1)\delta_{\chi\eta,1} + \Gamma(\chi\eta) \sum_{a+b=1} \chi(a)\eta(b).$$

Proof. $\zeta = e^{2\pi i/p}$ に対して、

$$\begin{aligned} \Gamma(\chi)\Gamma(\eta) &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_p^\times} \chi(a)\eta(b)\zeta^{a+b} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_p} \sum_{a+b=l} \chi(a)\eta(b)\zeta^l \\ &= \sum_{a+b=0} \chi(a)\eta(b) + \sum_{c \in \mathbb{Z}_p^\times} \sum_{a+b=c} \chi(a)\eta(b)\zeta^c. \end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{a+b=0} \chi(a)\eta(b) = \sum_a \chi(a)\eta(-a) = \eta(-1)\sum_a (\chi\eta)(a) = (p-1)\eta(-1)\delta_{\chi\eta,1}$$

であり、

$$\begin{aligned}\sum_c \sum_{a+b=c} \chi(a)\eta(b)\zeta^c &= \sum_c \sum_{a+b=c} \chi(ac^{-1})\eta(bc^{-1})(\chi\eta)(c)\zeta^c \\ &= \sum_c \sum_{a'+b'=1} \chi(a')\eta(b')(\chi\eta)(c)\zeta^c \\ &= \Gamma(\chi\eta) \sum_{a'+b'=1} \chi(a')\eta(b').\end{aligned}$$

□

Proposition 2.8. $\chi(a) \in C$ ($\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_p^\times}$, $a \in \mathbb{Z}_p^\times$).

Proof. $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ の位数は、$p-1 = 2^n$ の約数であるから、2^m の形で、

$$\chi(a)^{2^m} = \chi(a^{2^m}) = 1$$

より、$\chi(a) \in C$. □

以上の準備の下、$\Gamma(\chi) \in C$ であることを χ の位数についての帰納法で示す。まず、

$$\Gamma(1) = \sum_{a\in\mathbb{Z}_p^\times} \zeta^a = \sum_{k=0}^{p-1} \zeta^k - 1 = -1$$

である。次に $\chi^2 = 1$ とすると、

$$\Gamma(\chi)^2 = (p-1)\chi(-1) - \sum_{a+b=1} \chi(ab) \in C$$

であるから、$\Gamma(\chi) \in C$ がわかる。

そこで、位数が 2^k ($k \leq m$) の η に対して、$\Gamma(\eta) \in C$ と仮定すると、位数が 2^{m+1} の χ に対して、χ^2 の位数は 2^m であることから、帰納法の仮定により $\Gamma(\chi^2) \in C$ であり、

$$\Gamma(\chi)^2 = \Gamma(\chi^2) \sum_{a+b=1} \chi(ab) \in C$$

がわかる。したがって、$\Gamma(\chi) \in C$ である。

ガウスの証明（計算）は、このように一気に進むものではないが、その方法自体、大変示唆に富むものである。ガウス和自体は、$\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathbb{Z}_{p-1}$ 上のフーリエ変換であるが、$p-1 = 2^n$ に注意して、$\mathbb{Z}_{2^m}$ 上のフーリエ計算を m の小さいところから順次行なって $m = n$ の場合のフーリエ変換に至るというもので、近年になって開発された高速フーリエ変換に先鞭をつけたものになっている。

$p = 17$ のときに具体的に確かめてみる。

$$\Gamma(\epsilon) =$$

3. 巡回しない巡回群

自然な同型 $\widehat{\mathbb{Z}_N} \cong \mathbb{T}_N$ で $N \to \infty$ とするとどうなるか考えてみよう。ガウスがフーリエの仕事を意識していたかどうか、大変気になるところではある。$\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ であり、$\mathbb{Z}$ の部分群 $N\mathbb{Z}$ は、$N \to \infty$ のとき、小さくなって 0 に近づく（というよりは遠くに行ってしまって見えなくなる）から、

$$\mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z} \quad (N \to \infty)$$

と考えたくなる。一方、$\mathbb{T}_N$ の方は、だれがどう見ても、

$$\mathbb{T}_N \to \mathbb{T} \quad (N \to \infty).$$

ということで、$\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$ を期待するのが人情というものである。

と、大げさに書いたが、これは単純なことである。加法群 $\mathbb{Z}$ は、生成元 1 から「自由に」生成されるから、巡回しない。ところが、業界ではこれを「自由巡回群」と呼ぶ、不思議なことに。とにかく、巡回しないのであるから、準同型写像 $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ と $\chi(1) \in \mathbb{T}$ とは一対一に対応する。新たなことが起こるのは、フーリエ変換の方である。

まず、$\mathbb{Z}_N$ 上の関数は、$\mathbb{Z}$ 上の関数、すなわち、数列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ に移行する。そのフーリエ変換は、$\mathbb{T}$ 上の関数として、

$$\widehat{f}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k z^k$$

で与えられることになる。ここで、最初の問題、右辺は収束するのであろうか。級数の収束性を問題にするときに、まず調べるべきは、絶対収束するかどうかである。この場合は、$|z^k| = |z|^k = 1$ であるから、その条件は、

$$\sum_k |f_k| < \infty$$

ということになる。とりあえず、この条件をつけておけば、$\widehat{f}$ は、$\mathbb{T}$ 上の連続関数を定めるところは、一様収束の性質からわかる。関数の性質を調べる上で $z \in \mathbb{T}$ というのは、実感が伴わないので、$\theta \mapsto e^{i\theta}$ という実変数を使って、

$$F(\theta) = \widehat{f}(e^{i\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{ik\theta}$$

という関数で考えることにする。

Exercise 10. $\mathbb{T}$ 上の関数を考えることと $\mathbb{R}$ 上の関数 $F(\theta)$ で、$F(\theta + 2\pi) = F(\theta)$ となるもの（周期 2π の周期関数）を考えることは同じことである。これを確かめよ。

以下、文字を節約するため、$F(\theta)$ と書く代わりに $\widehat{f}(\theta)$ とも書くことにしよう。まずは、逆変換の式を書きなおして見る。

$$f(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(\frac{2\pi}{N}k)e^{-2\pi ik/N} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{f}(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta.$$

ということで、

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\widehat{G}} \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta$$

とすれば良いことがわかる。例えば、直交関係

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\widehat{G}}\langle\chi,g\rangle=\delta_{g,1}$$

は、積分の公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}=\delta_{k,0}$$

に移行する。これは良いのであるが、もうひとつの直交関係の方は、

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ik\theta}$$

となって、これの意味がよくわからない。発散級数の意味付け・解釈という、新たな問題が起こる。これを巡っての話も面白いのであるが、ここでは省略する。周期的デルタ関数というものになっている、とだけ指摘しておく。

一方、

$$\sum_{g\in G}|f(g)|^2=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\widehat{G}}|\widehat{f}(\chi)|^2$$

は、次に移行する。

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(k)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\widehat{f}(\theta)|^2\,d\theta.$$

これは、少なくとも $\sum_k|f(k)|<\infty$ という条件の下で成り立つとても良い等式である。実は、$\sum_k|f(k)|^2<\infty$ であれば成り立つのであるが、その場合は、$F(\theta)$ は、もはや連続になる保証はなく、これがどのような関数を表すのか、という問いかけが２０世紀の解析学への序章ともなった。ルベーグ積分のフーリエ解析的背景。

Example 3.1. 例として $\zeta(2)$ の値（バーゼル問題の答え）とか。

再び双対性について。$\mathbb{T}$ 上の連続指標として $\mathbb{Z}$ が回復するので、$\widehat{\mathbb{Z}}\cong\mathbb{T}$, $\widehat{\mathbb{T}}\cong\mathbb{Z}$ である。この場合は、双対群がもとの群と異なるのであるが、それでも双対定理 $\widehat{\widehat{\mathbb{Z}}}\cong\mathbb{Z}$, $\widehat{\widehat{\mathbb{T}}}\cong\mathbb{T}$ が成り立つ。これをさらに追求していくと、Pontryagin の双対定理に到達する。

4. テンソル積と Dehn 不変量

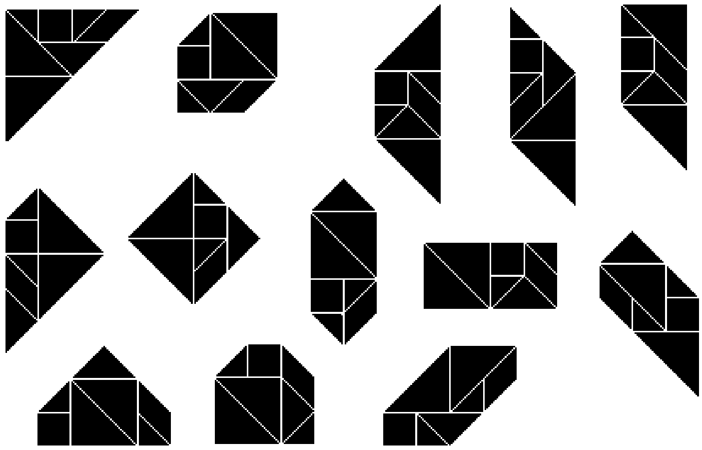
２つの図形を分割し、各部分が合同であるようにできるとき、分割合同であるという。図形パズルの Tangram (from Wikipedia)

ここで、Abhijit Champanerkar, Scissors congruence and Hilbert's 3rd problem. (scissors-slides.pdf) を見る。

集合は、自然数の categorification であるか。分割和、直積。積はまた、特殊な分割和であるとも見なせる。商は、それと結びつけるのが便利。

もうひとつの categorification：ベクトル空間とその次元。直和は簡単。商は、商ベクトル空間。これは、理解するのが難しいことになっているが、幾何学的というか物理学的というか、直感的な説明は、これに限る。商空間の実例として、不定積分がある。

Example 4.1. ２次元部分空間 $H\subset\mathbb{R}^3$ に対して、商ベクトル空間 $\mathbb{R}^3/H$ の表すもの。H に平行な平面波の速度ベクトル。



商空間の次元公式： $\dim W < \infty$ のとき、

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W.$$

Example 4.2.

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) - 1 = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}).$$

では、積に相当するのは何か。

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V, W から、$\mathbb{K}$ 上の新たなベクトル空間 $V \otimes_{\mathbb{K}} W = V \otimes W$ と双線型写像 $V \times W \ni (v, w) \mapsto v \otimes w \in V \otimes W$ を、次の性質をもつように作ることができる。これを V と W のテンソル積 (空間) という。

(i) 一次独立な集団 $\{e_j\} \subset V$, $\{f_k\} \subset W$ に対して、$\{e_j \otimes f_k\} \subset V \otimes W$ は一次独立。

(ii) $V \otimes W$ の勝手なベクトルは、$\sum_{i=1}^{N} v_i \otimes w_i$ の形に書ける。

これから、$\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$ がわかる。

さて、多面体 P の辺 e に対して、その長さを $|e|$ で、e を稜線とする二面角の大きさを $\theta(e)$ で表す。このとき、次で与えられる $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}, \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ のテンソル積空間 $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ の元をデーン不変量 (Dehn invariant) と呼ぶ。

$$D(P) = \sum_{e} |e| \otimes [\theta(e)/\pi].$$

Example 4.3. 直方体 R の Dehn invariant は、$D(R) = 0$. 直角三角錐 OABC ($A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$) の Dehn invariant は、

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

とするとき、

$$D(OABC) = \sqrt{a^2+b^2} \otimes [\gamma/\pi] + \sqrt{b^2+c^2} \otimes [\alpha/\pi] + \sqrt{c^2+a^2} \otimes [\beta/\pi].$$

Exercise 11. 平行六面体 P の Dehn invariant は、$D(P) = 0$ であることを示せ。

Exercise 12. Pyramid の Dehn invariant を求める。底面の正方形の１辺の長さを $\sqrt{2}a$、高さを h とするとき、

$$D(P) = 4\sqrt{a^2+h^2} \otimes \left[\frac{\arccos(a^2/(a^2+h^2))}{\pi}\right] + 4\sqrt{2}a \otimes \left[\frac{\arccos(a/\sqrt{a^2+h^2})}{\pi}\right]$$

Theorem 4.4. ２つの多面体 P, Q が分割合同であれば、$D(P) = D(Q)$.

Proof. 多面体 P が多面体 $P_1, \cdots, P_n$ に分割されるとき、

$$D(P) = D(P_1) + \cdots + D(P_n)$$

であることを確かめればよい。

右辺の Dehn 不変量項の定義の中に現れる $P_1, \cdots, P_n$ の辺 e と P との関係で３つの場合に分けて考える。

(i) $e = e_1$ が P の辺 e' の一部である場合：まず、$e' = e_1 \cup \cdots \cup e_l$ ($e_1, \ldots, e_l$ は $P_1, \cdots, P_n$ のいずれかの辺) と分割し、各 θ_i を稜とする $P_1, \cdots, P_n$ の中に現れる二面角を $\theta_{i,j}$ とすれば、$\theta(e') = \sum_j \theta_{i,j}$ となるので、

$$\sum_i \sum_j |e_i| \otimes [\theta_{i,j}/\pi] = \sum_i |e_i| \otimes [\theta(e)/\pi] = |e'| \otimes [\theta(e')/\pi].$$

(ii) e が P の面に含まれるとき：$P_1, \cdots, P_n$ の中に現れる e を稜とする二面角を θ_j とすれば $\sum_j \theta_j = \pi$ となるので、

$$\sum_j |e| \otimes [\theta_j/\pi] = |e| \otimes [\pi/\pi] = 0$$

となって、左辺の一つの項に一致する。

(iii) e が P の内部に含まれるとき：$P_1, \cdots, P_n$ の中に現れる e を稜とする二面角を θ_j とすれば $\sum_j \theta_j = 2\pi$ となるので、

$$\sum_j |e| \otimes [\theta_j/\pi] = |e| \otimes [2\pi/\pi] = 0.$$

□

上で見たように、立方体 C は、$D(C) = 0$ である。一方、一辺の長さが a である正四面体 T の Dehn invariant は、その二面角を ϕ とするとき、$D(T) = 6a \otimes [\phi/\pi]$.

Exercise 13. $\cos\phi = 1/3$ を示せ。

そこで、ϕ/π が無理数であるかどうかが問題になる。そのためには、次の簡単な判定法が使える。

$$\theta/\pi \in \mathbb{Q} \iff \cos(n\theta) = 1 \quad \text{for some } n \in \mathbb{N}.$$

ここで思い出すべきは、cos(n
phi) についての漸化式

$$\cos((n+1)\phi) = 2\cos\phi\cos(n\phi) - \cos((n-1)\phi)) = \frac{2}{3}\cos(n\phi) - \cos((n-1)\phi).$$

ここで、数列 $3^n\cos(n\phi) = a_n$ は、$a_0 = a_1 = 1$ および $a_{n+1} = 2a_n - 3^2 a_{n-1}$ を満たすので、a_n は自然数であり、$a_{n+1} \equiv 2a_n \mod 3$ が成り立つ。これから、$a_n \equiv 2^{n-1} \not\equiv 0$ mod 3 となって、ϕ/π は無理数であることがわかるので、$D(T) \neq 0$ であり、立方体と正四面体は分割合同にはならない。

実は、次のことも分かっている。

Theorem 4.5 (Sydler, 1965)**.** 2 つの多面体 P, Q が平面カットにより分割合同であるための必要十分条件は、$|P| = |Q|$ かつ $D(P) = D(Q)$ となること。

二次元と三次元で様子が異なる他の実例：Banach-Tarski Paradox

—若草山を望む古都の大学、いや増す日の下、ここにも思いのかけらを一つ