集合入門２０１８

山上　滋

2018 年 11 月 7 日

目次

松坂和夫「集合・位相入門」（岩波書店）
内田伏一「集合と位相」（裳華房）
井関清志「集合と論理」（新曜社）
鈴山徹「ソフトウェアのための基礎数学」（工学図書）
足立恒雄「数—体系と歴史」（朝倉書店）

1　集合算とブール代数

高校で学習した「集合と論理」についての復習。

集合 =「ある一定の条件をみたす数学的対象の集まり」
命題 =「正しいか間違っているかが原理的に決まっている主張」
条件 =「変数を含む数学的主張」（変数に数学的対象を代入するごとに命題を得る）

集合 (set) を構成する数学的対象をその集合の**要素**あるいは**元** (element) という。数学的対象 a が集合 A の要素であるとき、a は A に含まれると言い、$a \in A$ という記号で表わす。数学的対象 a が集合 A に含まれないときは、$a \notin A$ という記号で表わす。

集合の記法：

$$\{2, \sqrt{5}, (0,1)\}, \qquad [-1,1] = \{x; -1 \leq x \leq 1\}.$$

このように、要素を並べる（素朴な）方法と、集合の要素が満たすべき性質によって規定する方法とがある。とくに、後者の場合に、性質は数学的に曖昧さのない内容でなければならず、**命題** (proposition) と呼ばれている。したがって、

$$A = \{x; P(x)\}$$

という形式を取る。ここで、$P(x)$ は、変数 x に対する条件であり、x に具体的な「もの」を代入することで、その（数学的）主張の真偽が判明する（したがって命題となる）ものでなければならない。逆に、数学における条件は、しばしば、「a は集合 A の要素である」という形をとり、この条件そのものを $a \in A$ という記号で表すことが多い。いいかえると、数学的主張においては、条件（あるいは命題）と集合とは表裏一体の関係にある。

注意 1.

(i) 集合を並べて表す際は、同じ要素が複数回現れても同一の集合と考える。$\{2,0,0,5\} = \{0,2,5\}$. また、命題によって集合を規定する際の変数 x には、とくに意味がなく、$\{x; P(x)$ が成り立つ $\} = \{y; P(y)$ が成り立つ $\}$ である。定積分の関係

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$$

との類似性に注意。

(ii) 集合の区切り記号として「;」の他に、「:」や「|」なども使われる。

$$[a,b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

(iii) 集合を表すために $\{,\}$ という括弧を使うのが習慣である。この記号は、一方で、式を見やすくするためにも使われるが、どちらの意味であるかは、状況から容易に判別できるであろうから、あえてこのような書き方をする。

(iv) 数列を表す記号として $\{a_n\}$ がよく使われるが、これと集合 $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ とを混同しないこと。例えば、$\{(-1)^n\}$ と $\{(-1)^{n+1}\}$ は別の数列であるのに対して、

$$\{(-1)^n; n = 1,2,\dots\} = \{(-1)^{n+1}; n = 1,2,\dots\} = \{1,-1\}$$

である。

(v) a, b が実数であるとき、記号 (a, b) には二種類の異なる意味があることに注意。すなわち、開区間 $\{x; a < x < b\}$ の意味と、平面上の点を表す座標の意味の二通りである。このように、意味の異なるものを同じ記号で表すことは、論理的に考えて好ましいことではないため、開区間を表す記号として、

$$]a, b[= \{x; a < x < b\}$$

を採用する流儀もある。

(vi) 関数 f の値域を表す際に、

$$\{y; y = f(x), x \in A\}$$

と書く代わりに、

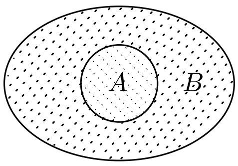
$$\{f(x); x \in A\}$$

といった省略形もしばしば使われる。

(vii) 集合を表す言葉： set（ひとまとまり）, ensemble（集団）, Menge（大量)。離合集散、集合離散。

二つの集合 A, B が**等しい**とは、A に含まれる要素と B に含まれる要素が一致すること。

集合 A が、集合 B の（一部あるいは全部の）要素から成り立っているとき、A は B の**部分集合** (subset) であると言って、$A \subset B$ という記号で表す。また、$A \subset B$ ではないことを $A \not\subset B$ という記号で表わす。日常語の語法には反するが、$A = B$ の場合も部分集合とみなす。すなわち、$B \subset B$ が常に成り立ち、部分集合の記号 $\subset$ は、等号の場合も許すことに注意。



数の場合の「$a \leq b, b \leq a \Longleftrightarrow a = b$ 」という関係の類似として、

$$A \subset B,\ B \subset A \Longleftrightarrow A = B$$

である。

例題 1.1.

$$\{1, 2, (0, 1)\} \not\subset \{2, \sqrt{5}, (0, 1)\}, \qquad [0, 1] \subset [-1, 2].$$

問 1. 記号 $\in, \subset$ の使い方で正しいのは次の中のどれか。

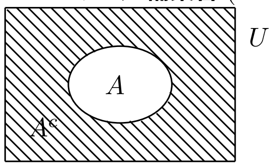
$$\{1\} \in \{1, 2, 3\}, \qquad \{1\} \subset \{1, 2, 3\}, \qquad 1 \subset \{1, 2, 3\}.$$

便宜上、要素を一つも含まない場合も集合の一つと考えて、**空集合** (empty set) と呼び、$\emptyset$ あるいは $\{\ \}$ という記号で表す（数の 0 に相当する集合、という意図であろう）。空集合は、あらゆる集合の部分集合であると考える。すなわち、$\emptyset \subset A$ がいつでも成り立つ.

問 2. 空集合は一つしかない、と考えるべきである。その理由を説明できるだろうか。

集合を扱う際に、問題とする集合全てを部分集合として含むような（大きな）集合を一つ固定して、その中だけで議論すると都合が良いことがある。そのような場合に、その固定した集合を**全体集合** (universal set)

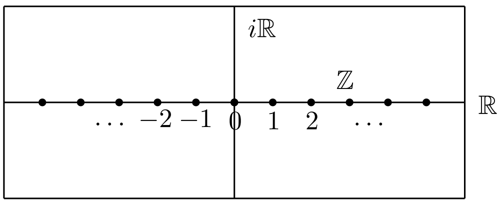
と呼ぶ。集合 A を全体集合 U の部分集合とするとき、A に含まれない U の要素全体からなる部分集合を A^c という記号で表して、A の（U における）**補集合** (complement) と言う。



注意 2. 補集合を表すために、$\overline{A}$, A' といった記号が使われることもある。高校の教科書では、$\overline{A}$ で完璧に統一されている。しかしながら、数学の専門家がこの記号でもって補集合を表すことは稀である。というのは、そのうち学習するであろう「位相」において、集合の閉包を表す記号として使われるから。異なる内容を同一の記号（あるいは言葉）で表すことは、論理的な混乱を招く。逆に言うと、論理的な混乱を引き起こさせようと思ったら、一つの言葉に 2 つ以上の意味を付与して使うことである。世に絶えない不毛な論争は、これが原因であることが多い。

数の集合：今後の学習で重要である数の集合を表わす記号を列挙しよう。

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \textbf{自然数}\text{全体の集合} = \{0, 1, 2, \dots\}, \\
\mathbb{Z} &= \textbf{整数}\text{全体の集合} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \\
\mathbb{Q} &= \textbf{有理数}\text{全体の集合} = \{\frac{n}{m}; m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\}, \\
\mathbb{R} &= \textbf{実数}\text{全体の集合} = (-\infty, +\infty), \\
\mathbb{C} &= \textbf{複素数}\text{全体の集合} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$



注意 3.

(i) 自然数に 0 を含めない流儀もある。歴史的には、0 の発見は、意外と新しい。（吉田洋一「零の発見」（岩波書店）を見よ。）

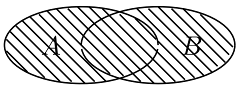
(ii) 自然数 (natural number)、整数 (integer、発音に注意)、有理数 (rational number)、実数 (real number)、複素数 (complex number) である。
数に対する rational の意味は、「（自然数あるいは整数の）比 (ratio) で表される」ということであるから「有比数」とでも呼ぶべきものである。因みに、無理数の方は irrational で、こちらは、比で表せないという意味なので「無比数」がより適切な訳語ではある。けっして、合理的ならざる数、という意味ではない。（ただし、ピタゴラス一派が、自然数の比で表せないものは不合理である、と考えた歴史的な事実はあるが。）

問 3. “integer” という言葉の本来の意味について調べよ。これと関連した数学用語として、integral, integrate という言葉の意味についても確認する。

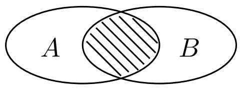
二つの集合 A, B に対して、**和集合** (union) と**共通部分** (intersection) を

$$A \cup B = \text{「}A \text{ の要素と } B \text{ の要素を併せた集合」},$$
$$A \cap B = \text{「}A \text{ と } B \text{ 両方に含まれる要素全体の集合」}$$

で定める。



$A \cup B$



$A \cap B$

命題 1.2.

(i) (交換法則) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(ii) (結合法則) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(iii) (分配法則) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(iv) (DeMorgan's law) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(v) $(A^c)^c = A$.

集合に対するこのような操作は、平面内の図形で表示すると直感的にわかり易い。(Venn diagram と言う。)

一方で、上記の操作（構造）は、代数演算と類似のものであることもあり、**ブール代数** (Boolean algebra) と称され、論理演算のモデルとして重要である。(Augustus De Morgan, 1806 – 1871), (Georg Boole, 1815 – 1864).

結合法則により、複数個の集合に対する和集合 $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ と共通部分 $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ を（括弧を省略しても）矛盾なく定義できる。

問 4. 結合法則をくり返し使うことで、

$$((A \cup B) \cup C) \cup D = A \cup ((B \cup C) \cup D)$$

を示せ。

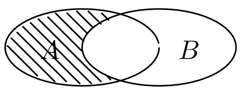
問 5. 数学的帰納法を使って、分配法則を拡張せよ。

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap B, \qquad (A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cup B.$$

補集合を定義するためには全体集合が何であるか規定する必要があった。一方で、全体集合を常に意識することは、面倒でもあり不要であることも多い。そこで、全体集合を意識せずとも、補集合に相当する操作を実現するものとして

$$A \setminus B = \{a \in A; a \notin B\} = A \cap B^c$$

があり、**差集合** (difference set) と呼ばれる。二番目の関係式では、補集合を補助的に使用したが、差集合そのものは、$A, B \subset U$ である限り）全体集合の取り方によらないことに注意しよう。



$A \setminus B$

例題 1.3.

$$\{1, 2, \ldots, 5, 6\} \setminus \{1, 3, 7, 9\} = \{2, 4, 5, 6\}, \qquad [1, 5] \setminus [0, 2] = (2, 5].$$

問 6. 集合 $A \setminus (A \setminus B)$ がどのような集合を表わすか考えよ。

注意 4. 差集合を表わす記号として、$A - B$ などのいわゆる差の記号が使われることもある。しかしながら、数の集合に対しては、これを別の意味で使う（使いたい）ので、ここでは、論理的な混乱が起きにくいものを採用した。

2 有限集合と個数の処理

集合の概念は、もともと、無数の集団を合理的に扱うために、カントル (Georg Cantor, 1845 – 1918) によって導入された。その後、記号および概念の整備に伴って、数学を記述する「言葉」としての地位をも獲得するに至った。そのような方向への過程で、論理的構造を把握するためのモデルとしての認識も高まり、とくに、有限集合の概念が、計算機の論理モデルの記述に適していることなどの認識の後、論理的学問分野一般の基礎（モデル）として評価され現在に至っている。この授業で学ぶ内容は、こういった二面性を備えた集合の概念の基礎についてである。

改めて言葉の定義を。含まれる要素の個数が有限であるものを**有限集合** (finite set)、そうでないものを**無限集合** (infinite set) という。有限集合 S に対して、S に含まれる要素の個数を $|S| \in \mathbb{N}$ で表わす。（高校の教科書では、$n(S)$ という記号を使っている。n は、number の頭文字であろう。）空集合も有限集合と考えて、$|\emptyset| = 0$ とおく。($0 \in \mathbb{N}$ に注意。)

無限集合と有限集合とでは、研究者の意識も扱う道具も大きく異なってくるのだが、両者に共通する「お作法」の部分は、そうであるが故に、より一層基本的である。

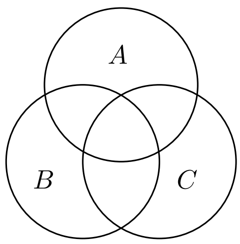
例題 2.1.

(i) $A = \{1, 2, 1, 2, \dots\}$ は有限集合であり、$|A| = 2$.
(ii) $B = \{(1, 0, 0), [0, 1], [0, 1], [0, 2]\}$ は有限集合であり、$|B| = 3$. （わかるかな？）
(iii) $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ は有限集合で、$|C| \leq n$. （$|C| = n$ と主張できないのは何故か。）

有限集合 A, B, C に対して、

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

という関係が成り立つ。



これを $A_1, \dots, A_n$ の場合に拡張するために、$\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 I に対して A_I という集合を、

$$A_I = A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}, \qquad I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$$

によって定める。例えば、 $I = \{1, 3, 4\}$ のとき、$A_I = A_1 \cap A_3 \cap A_4$ である。

命題 2.2 (Sieve Formula)**.** 上の記号の下で、

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} |A_I|$$

が成り立つ。右辺の和の記号の使い方に注意。

Proof. n についての帰納法で示す。$\emptyset \neq I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $\emptyset \neq J \subset \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ であるとして、

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\
&= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_I (-1)^{|I|-1} |A_I| + |A_{n+1}| - \sum_I (-1)^{|I|-1} |A_I \cap A_{n+1}| \\
&= \sum_{n+1 \notin J} (-1)^{|J|-1} |A_J| + \sum_{n+1 \in J} (-1)^{|J|-1} |A_J| = \sum_J (-1)^{|J|-1} |A_J|.
\end{aligned}$$

□

例題 2.3. n 人でプレゼントを交換する方法の数。ただし、参加者は全員、自身が用意したもの以外のプレゼントを受け取るものとする。

一般に、n 人がプレゼントを交換する方法は、一部の人だけ交換の場合も含めて $1, \ldots, n$ の順列の数だけある。全ての順列の作る集合を全体集合 U であると考えよう。今、k 番目の人が、自分が提供したプレゼントを受け取る場合の順列全体を A_k で表せば、

$$A_k = \{\sigma \in U; \sigma(k) = k\}$$

であり、上で問題にしている場合というのは、

$$A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$$

で表される。

したがって、篩（ふるい）の公式より、その場合の数は、

$$|U| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = n! + \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} |A_I|$$

で計算される。ここで、A_I というのは、I に含まれるどの番号も変えない並べ替え全体の集合であるから、$|A_I| = (n - |I|)!$ である。一方、$|I| = m$ となる I の選び方は、組み合わせの数 $\binom{n}{m}$ だけあるので、結局

$$\sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} (n-m)! = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{n!}{m!}$$

となって、求める場合の数は、

$$n! + \left(-n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \right)$$

である。

この結果は次のような解釈もできる。n 人がプレゼントを持ち寄って、くじ引きによりプレゼントを交換するとき、誰一人として自分が提供したプレゼントに当たらない確率は、

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (-1)^k$$

で与えられる。この確率は、$n \to \infty$ のとき、増えたり減ったりを交互に繰り返しながら、数 $1/e = 0.367879\ldots$ に近づく。

問 7. $n = 4$ の場合の篩の公式を書き下せ。

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 - 1 = 15$$

であるから 15 項の和となる。

問 8. n 個の条件 $P_1, \ldots, P_n$ が成り立つか成り立たないかで区分けを行うと、2^n 通りのグループに分割できることを示せ。$n = 2, 3$ までは、図で簡単に表示されるが、$n \geq 4$ 以上の場合は、単純ではないことを納得せよ。

問 9. 自然数 $n \geq 2$ の素因数分解を $n = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}$ で表わす ($p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ は n に含まれる素因数)。一方、$1, 2, \ldots, n$ の中で n と互いに素なものの総数を $\phi(n)$ で表わす。このとき、

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

である。実際、$A_j = \{1, 2, \ldots, n$ のうち p_j で割り切れるもの $\}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\phi(n) = \left|\left(\bigcup_{j=1}^{r} A_j\right)^c\right| &= n - \left|\bigcup_{j=1}^{r} A_j\right| \\
&= n - \left(\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots\right) \\
&= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i<j<k} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)
\end{aligned}$$

である。

3 集合族の和と共通部分

多数の集合 $A_1, \ldots, A_n$ があった場合、それらの和集合 $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ と共通部分 $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ を表すために、和の記号 $\sum$ の使用法をまねて

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

という書き方もする。この表記法の便利なところは、必ずしも有限個とは限らない集合の集まりについても使える点にある。例えば、$A_1, A_2, \ldots$ といった集合の列があったとしよう。このとき、

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{a; a \text{ はどれかの } A_k \text{ の要素である }\} = \{a; a \in A_k \text{ であるような } k \text{ がある }\}$$
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{a; a \text{ はあらゆる } A_k \text{ の要素である }\} = \{a; \text{すべての } k \text{ に対して } a \in A_k \text{ である }\}$$

と定義することになる。

このような場合に、右辺の条件を表す記号があると便利である。それが、存在記号 (existential quantifier) $\exists$, 全称記号 (universal quantifier) $\forall$ と呼ばれるもので、上の場合だと

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{a; \exists k, a \in A_k\}, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{a; \forall k, a \in A_k\}$$

なる表記を可能にするものである。一般に集合 X の要素 x に関する条件 $P(x)$ があったとき、

$$\exists x \in X, P(x)$$

という記号で、「P(x) が成り立つような $x \in X$ が存在する」という命題を表す。また、

$$\forall x \in X, P(x)$$

という記号で、「すべての $x \in X$ に対して、$P(x)$ が成り立つ」という命題を表す。

例題 3.1. a, b を実数とする。

$$(\forall x \in \mathbb{R}, ax + b = 0) \iff (a = 0 \text{ かつ } b = 0),$$
$$(\exists x \in \mathbb{R}, ax + b = 0) \iff (a \neq 0 \text{ または } a = b = 0)$$

である。

問 10. 上の例題の後半部分で、a, b が複素数であるときに、条件の内容を幾何学的に吟味してみよ。

次に、集合 X の要素 x を選ぶごとに、ある集合 A_x が決まるとき、色々な x に対する集合 A_x の集まりを **X を添え字集合とする集合族** (a family of sets indexed by the set X) であるといい、$\{A_x\}_{x \in X}$ という記号で表す。集合族に対して、その和集合と共通部分を

$$\bigcup_{x \in X} A_x = \{a; \exists x \in X, a \in A_x\}, \qquad \bigcap_{x \in X} = \{a; \forall x \in X, a \in A_x\}$$

で定める。

和集合においてとくに $A_x \cap A_y = \emptyset$ $(x \neq y)$ であるとき、

$$\bigcup_{x \in X} A_x = \bigsqcup_{x \in X} A_x$$

と書いて、$\{A_x\}_{x \in X}$ の**分割和** (disjoint union) と呼ぶ。

例題 3.2. 正数 x に対して、

$$A_x = [-1, x]$$

とおくと、$\{A_x\}_{x>0}$ は集合族であり、

$$\bigcup_{x>0} A_x = [-1, +\infty), \qquad \bigcap_{x>0} A_x = [-1, 0]$$

となる。

問 11. 次の集合を具体的に同定せよ。

$$\bigcup_{n\geq 1}[1/n, n], \qquad \bigcap_{n\geq 1}(0, 1/n).$$

問 12. 実数 $0 < r < 1$ に対して、

$$\bigcup_{1\leq m\leq n}\left(\frac{m}{n} - r^{m+n}, \frac{m}{n} + r^{m+n}\right)$$

を想像してみよ。この集合の $\mathbb{R}$ における補集合が、無数の実数を含むことが説明できるか。

問 13. 自然数のうち、7 で割った余りが k $(0 \leq k < 7)$ であるもの全体を A_k で表わせば、

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k=0}^{6} A_k$$

なる分割和表示を得る。

ブール代数における分配法則は、このような集合族に対しても拡張できる。また命題「$P(x)$ が成り立つような $x \in X$ が存在する」の否定は、「すべての $x \in X$ に対して、$P(x)$ が成り立たない」となるので（命題に対する DeMorgan の法則)、DeMorgan の法則の集合族版も成り立つ。(数学の専門家は、こういったものを空気の如く感じているということもあり、「明らか」と言ってしまいがちであるが、初めて接する者にとっては戸惑いの表現であるかもしれない。)

命題 3.3. 集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ に対して、以下のことが成り立つ。

(i) (分配法則)

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B), \qquad \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B).$$

(ii) (DeMorgan's law)

$$\left(\bigcup_{x\in X} A_x\right)^c = \bigcap_{x\in X} A_x^c, \qquad \left(\bigcap_{x\in X} A_x\right)^c = \bigcup_{x\in X} A_x^c.$$

Proof. 集合の等式の証明では、多くの場合、$\subset, \supset$ という二つの包含関係を示せばよい。分配法則の最初の等式の $\subset$ の部分だけ証明しよう。

$x \in \cap_{i\in I}(A_i \cup B)$ であるとは、すべての $i \in I$ について $x \in A_i \cup B$ である、ということである。

もし、$x \in B$ であれば、当然 $x \in (\cap_i A_i) \cup B$ である。そうでなければ、$x \in A_i$ でなければならず、これがすべての $i \in I$ について成り立っているので、$x \in \cap_i a_i \subset (\cap_i A_i) \cup B$ であることがわかる。 □

問 14. 上の命題を証明せよ。

多少トリッキーではあるが、次のような例題はどうであろうか。

例題 3.4.

$$\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\left[\frac{n}{m}, \frac{n+1}{m}\right] = \bigcap_{m\geq 1}\left[\frac{1}{m}, +\infty\right) = [1, +\infty),$$

$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq 1}\left[\frac{n}{m}, \frac{n+1}{m}\right] = \bigcup_{n\geq 1}\emptyset = \emptyset.$$

問 15. 実数 $a \geq 1$ に対して、

$$\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq 1}\left[m-\frac{1}{n}, am+\frac{1}{n}\right]$$

が一つながりの区間で表わされるような a の範囲を求めよ。

問 16. 実数 a, b に対する命題（条件）

$$(\exists x \in \mathbb{R}, ax+b=0) \iff (a \neq 0 \text{ または } a=b=0)$$

の否定について考察し、DeMorgan の法則を確かめよ。

問 17. 次の命題のうち正しいものはどれか。但し、x, y は整数とする。また自然数に限定した場合はどうか。

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x+y=2.$$
$$\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x+y=2.$$
$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x+y=2.$$
$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x+y=2.$$

注意 5. 変数 x, y についての条件 $P(x,y)$ に対して、

$$\forall x, \exists y, P(x,y)$$

と書けば、

$$\forall x, \Big(\exists y, P(x,y)\Big)$$

の意味である。他の組み合わせについても同様。

ここで、数学的帰納法 (mathematical induction) の仕組みを、全称記号との関連で、整理しておこう。命題の列 $P(n)$ $(n=0,1,2,\dots)$ があるとき、すべての n に対して $P(n)$ が成り立つことを示すには、次の 2 つのことを確認すればよい。

(i) $P(0)$ が成り立つ。
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ が成り立つ。

実際、(i) と $n=0$ の場合の (ii) から $P(1)$ が正しいとわかるので、これを $n=1$ の場合の (ii) から $P(2)$ の成り立つことがわかり、以下同様にしてすべての自然数 n に対して $P(n)$ という主張が正しいことがわかる。

さて、上の 2 つめの主張を「すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立てば $P(n+1)$ も成り立つ。」のように表現すると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}, P(n)) \Longrightarrow P(n+1)$$

という別の（不完全な）内容の主張と誤読されかねず、紛らわしい。読点を適切に入れて、「すべての自然数 n に対して、 $P(n)$ が成り立てば $P(n+1)$ も成り立つ。」「すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立てば、$P(n+1)$ も成り立つ。」のように使い分けるか、括弧の利用を考えるべきである。

4　積集合と冪集合

集合 $\mathbb{R}$ は（数）直線を表す。実数の組 (x, y) 全体は、（座標）平面を表す。一般に二つの集合 A, B に対して、

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$$

を A と B の**積集合** (product set) あるいは**直積** (direct product) と称する。座標のような記号 (a, b) は、「順序を考慮に入れた組」という意味で順序対 (ordered pair) と呼ばれる。一方、順序を無視した組（非順序対、unordered pair) の方は、集合 $\{a, b\}$ によって表すことができる。とくに、$A = B$ の場合には、$A \times A = A^2$ と略記する。3 個以上の集合の直積についても同様である。例えば、

$$A \times B \times C = \{(a, b, c); a \in A, b \in B, c \in C\}$$

であり、$A \times A \times A \times A = A^4$ である。

したがって、とくに、$\mathbb{R}^2$ は（座標）平面を、$\mathbb{R}^3$ は（座標）空間を表す。

次に、一見くだらなく思えるも知れないが実は奥の深い事実として、積集合の積集合についての同一視（可能性）がある。例えば、$(A \times B) \times C$, $A \times (B \times C)$, $A \times B \times C$ は、本来、異なる集合を表すが、

$$((a, b), c) \longleftrightarrow (a, (b, c)) \longleftrightarrow (a, b, c)$$

という対応で（自然に）同一視される。

注意 6.

(i) 集合 $A \times B$ と集合 $B \times A$ の間にも自然な同一視が可能であるが、こちらの方は、普通区別して別の集合として扱う。理由は、この同一視までしてしまうと、順序対と非順序対の区別が意味を失い、その結果、例えば平面上の点を表わす座標 (x, y) と (y, x) が区別できなくなり、座標幾何学の記述に齟齬をきたす。

(ii) 直積という言葉の代わりにデカルト積 (Cartesian product) と呼ばれることも多い。これは、哲学者・数学者である René Descartes (1596 – 1650) のラテン語名 Cartesius に因む命名でる（ラテン語は、当時のヨーロッパにおける文化的共通語であった)。デカルトは、幾何学を座標により研究する方法（解析幾何学という）の開祖として有名であるが、実は、それより以前にフェルマー (Pierre de Fermat, 1601 – 1665) が、同等以上（微分と接線、極大・極小）のことに到達していたことは意外と知られていない（デカルトがフェルマーの名声を貶めようとした事実すらあるらしい)。

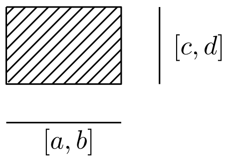
例題 4.1. 積集合 $\mathbb{Z}^2$ は、平面上の格子点全体を表わす。また、$\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ は、x 軸に平行な直線の集まりとみなすことができる。

命題 4.2. 有限集合 A, B に対して、$A \times B$ も有限集合で

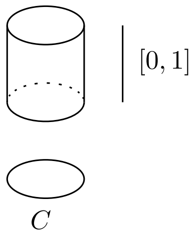
$$|A \times B| = |A|\,|B|.$$

積集合には幾何学的イメージを対応させると分かった気になれるかも知れない。

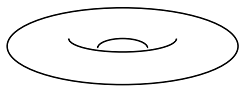
区間の直積 $[a, b] \times [c, d]$ は**長方形** (rectangle)。



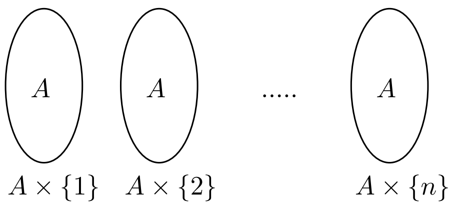
円周 (circle) $C=\{(x,y);x^2+y^2=1\}$ と区間 $[0,1]$ の積集合 $C\times[0,1]$ は、**円柱** (cylinder) を表わしている。



円周の自分自身との積集合 $C^2=C\times C$ は、**トーラス** (torus) をイメージする。



集合 A と集合 $\{1,2,\dots,n\}$ の直積集合 $A\times\{1,2,\dots,n\}$ は A のコピーが n 個並んでいるイメージ。



一般に積集合 $X\times Y$ の部分集合 A には、「切り口」の集合族 $\{A_x\}_{x\in X}$ あるいは $\{A_y\}_{y\in Y}$ が付随する。

$$A_x=\{y\in Y;(x,y)\in A\},\qquad A_y=\{x\in X;(x,y)\in A\}.$$

問 18. 立体 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+y^2-z^2=1\}$ の $z=c$ による切り口がどのような図形になっているか調べよ。

集合 X に対して、そのすべての部分集合から成る集合を X の**冪集合** (power set) と言い、$\mathcal{P}(X)$ あるいは 2^X という記号で表わす。

例題 4.3. $X=\{a,b,c\}$ (a,b,c は互いに異なる）であるならば、

$$\mathcal{P}(X)=\Big\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\Big\}.$$

命題 4.4. 有限集合 X に対して、$|2^X|=2^{|X|}$.

また、自然数 $0\leq k\leq n=|X|$ に対して、

$$\mathcal{P}_k(X)=\{A\subset X;|A|=k\}$$

とおけば、

$$\mathcal{P}(X)=\bigsqcup_{k=0}^{n}\mathcal{P}_k(X),\qquad |\mathcal{P}_k(X)|=\binom{n}{k}$$

であり、これから

$$|2^X| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

を得る。

注意 7. プログラミング方式コンピュータの創始者としても知られている数学者のフォン・ノイマン (John von Neumann, 1903–1957) は、「無」から自然数を作り出すと称してつぎのような構成方法を提案した。集合 $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$ は、空集合を唯一の要素とする集合であり、したがって空集合ではない。そこで、

$$2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

の要素（$\{\emptyset\}$ の部分集合）として、$\{\emptyset\} \neq \emptyset$ を得る。以下、同様の構成法を繰り返して、

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$$

なる互いに異なる要素の列を得る。これらを順次自然数 $0, 1, 2, \dots$ に対応させることで、無（空集合）から自然数が構成できるとした。が、しかし、これは、落ち着いて考えてみると、$\emptyset$ の記号を取り囲む括弧の数を数えているに過ぎないのであって、当然といえば当然のことである。

問 19. $2^{\mathbb{R}} \cap \mathbb{R} = \emptyset$ であることを納得せよ。また、$2^X \cap X \neq \emptyset$ となる集合 X は存在するか。

例題 4.5. 集合 X における部分集合の集まり $\{A_i\}_{i \in I}$ を考える。添え字集合 I の部分集合 J に対して、X の部分集合 X_J を

$$X_j = \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \cap \left(\bigcap_{j \notin J} A'_j \right)$$

で定めると、

$$X = \bigsqcup_{J \in 2^I} X_j$$

である。

実際、$x \in X$ に対して、$x \in X_J$ となる I の部分集合 J は、

$$J = \{j \in I; x \in A_j\}$$

によって与えられる。

問 20. $I = \{1, 2\}, I = \{1, 2, 3\}$ のときに、上の分割和の様子を図示せよ。

5　関数と写像

関数の復習：変量 x に対して変量 y が決まるとき、y は x の関数であると言い、$y = f(x)$ といった記号で表わす。変量としては、通常、数を想定しているのだが、もっと抽象的あるいは一般的な数学的対象にまで広げることを考えてみよう。

関数 Short History: 変量の間の関係 (Newton, Leibniz, １７世紀後半)、式で表わされる量 (Euler, 1745), 数の間の対応 (Dirichlet, 1837), 写像 (Cantor, 1880 ごろ)。

二つの集合 X, Y を用意する。X の各要素 x に対して Y の要素 $f(x)$ が定められているとき、この対応の規則を**写像** (mapping) という。$f: X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ といった書き方をする。X を f の**定義域** (domain) あるいは**始集合** (initial set)、Y を f の**値域** (range) あるいは**終集合** (final set) という。写像 $f: X \to Y$ という代わりに、集合 X から集合 Y への写像 f、という言い方もする。また、$X = Y$ である場合には、写像という言葉の他に X における**変換** (transformation) という用語も使われる。

別の写像 $f': X' \to Y'$ に対して、$f = f'$ というのは、$X = X',\ Y = Y'$ かつ $\forall x \in X, f(x) = f'(x)$ であることと定義する。

写像 $f: X \to Y$ でとくに Y が数の集合であるとき、**関数** (function) 、$X = \mathbb{N}$ のとき**列** (sequence) ということが多い。

- $f: X \to \mathbb{R}$, 実数値関数。
- $f: X \to \mathbb{C}$, 複素数値関数。
- 定義域が $\mathbb{N}$ で値域が $\mathbb{R}$ である写像をふつう数列とよぶ。
- 積集合 A^n の要素と $\{1, 2, \ldots, n\}$ から A への写像とが対応する。

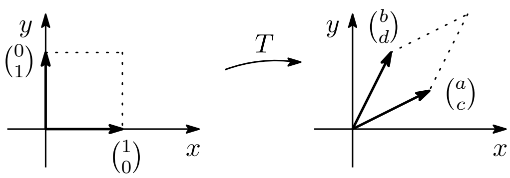
例題 5.1. 平面のベクトルを $\mathbb{R}^2$ と同一視し、さらにベクトルを表わす成分を縦に並べて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のように表示する。行列

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 f を

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

で定める。これを行列 T の定める**一次変換** (linear transformation) という。



問 21. 次の 3 つの関数のうち、等しいものはどれか。

$$f: \mathbb{R} \to [0, +\infty), \quad f(x) = |x|,$$
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x^2},$$
$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(t) = |t|.$$

集合 X から集合 Y への写像全体のなす集合を Y^X という記号で表わす。記号は、次の事実により正当化される。

命題 5.2. X, Y が有限集合であるとき、

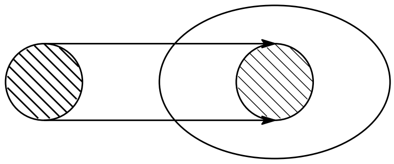
$$|Y^X| = |Y|^{|X|}.$$

$|X| = n$ とすれば、自然な全単射 $Y^n \to Y^X$ がある。

定義 5.3. 写像 $f: X \to Y$ が**１対１** (one-to-one) であるとは、

$$「x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')」 \Longleftrightarrow 「f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'」$$

であること。１対１の写像のことを**単射** (injection) とも言う。



例題 5.4. 一次変換 T が、１対１であるための条件は、$ad - bc \neq 0$ である。

命題 5.5. X, Y が有限集合であるとき、X から Y への単射全体を F で表わせば、

$$|F| = \begin{cases} |Y|(|Y|-1)\dots(|Y|-|X|+1) & \text{if } |X| \leq |Y|, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

問 22. 上の公式と順列との関係について考察せよ。

定義 5.6. 写像 $f: X \to Y$ が**上への** (onto) 写像であるとは、

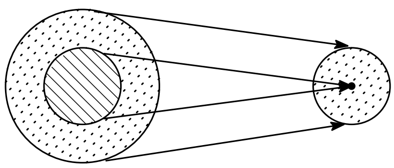
「Y のすべての要素は、適当な $x \in X$ により、$f(x)$ の形で書ける」

こと。上への写像のことを**全射** (surjection) とも言う。

注意 8. 「上への写像」の条件を論理記号で書けば、

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$$

となる。



例題 5.7. 一次変換 T が上への写像であるための必要十分条件は、$ad - bc \neq 0$ である。

命題 5.8. X, Y が有限集合のとき、X から Y への全射全体を G で表わせば、$|X| \geq |Y|$ であるとき、

$$|G| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

ただし、$|X| = m$, $|Y| = n$ と置いた。また、$\binom{n}{k} = {}_nC_k$ は二項係数を表わす。

Proof. $X = \{1, \ldots, m\}$, $Y = \{1, \ldots, n\}$ と仮定して一般性を失わない。

$$A_i = \{f \in Y^X ; \forall x \in X, f(x) \neq i\}$$

とおくと、$|A_i| = (n-1)^m$ である。より一般的に、$1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ に対して

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$$

である。

さて、$G = (A_1 \cup \ldots A_n)^c$ と表わせるので、$|G| = n^m - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$. そこで、篩の公式を使えば、

$$|A_{\cup} \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{|I|=k} (-1)^{k-1} |A_I| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^m$$

となり、これから $|G|$ についての公式が得られる。 □

問 23. 上の命題の公式の右辺を $S(m,n)$ で表わすとき、

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(m,k) = n^m$$

である。何故か。この関係式を逆算して、$S(m,n)$ の表式を導くこともできる。

定義 5.9. 全射かつ単射である写像を**全単射**または**双射** (bijection) という。

命題 5.10. X, Y が有限集合であるとき、X から Y への全単射が存在する必要十分は、$|X| = |Y|$ であり、このとき全単射の個数は、$|X|! = |Y|!$ である。

例題 5.11. 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への全単射をとくに **n 次の置換** (a permutation of degree n) と呼び、対応する要素を並べて

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

のように表わす。n 次の置換全体の集合を S_n で顕せば、$|S_n| = n!$ である。

命題 5.12. 冪集合 2^X と写像の集合 $\{0,1\}^X$ の間には、自然な全単射が存在する。実際、X の部分集合 A に対して、X 上の関数 χ_A を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

で定めれば、対応 $A \mapsto \chi_A$ が全単射を与える。関数 χ_A を A の**特性関数** (characteristic function) と呼ぶ。

問 24. 集合 A, B に対して、

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A^c} = 1 - \chi_A, \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

を示せ。

命題 5.13. 次のような自然な全単射がある。

$$(Y \times Z)^X \to Y^X \times Z^X, \qquad Z^{X \times Y} \to (Z^X)^Y.$$

例題 5.14. 格子点同士を x 軸または y 軸に平行な線分で結んだ経路で距離が最短であるものを最短経路 (lattice path) と呼ぶ。与えられた自然数 n に対して、原点から (n,n) に至る最短経路で半平面 $y \leq x$ に含まれるものの総数は、

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

である。

まず、図 1 における lattice path の総数は、$\binom{m+n}{n}$ であることに注意しておく。

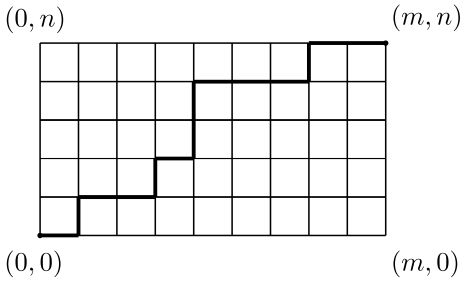


図 1

さて、$y \leq x$ に含まれる $(0,0)$ から (n,n) への lattice path 全体は、x 軸方向に $+1$ ずらすことにより、$(1,0)$ から $(n+1,n)$ への lattice path で、直線 $y=x$ を通らないもの全体に一致する。このような path の総数を求めるために、その補集合 P を考える。すなわち、$(1,0)$ から $(n+1,n)$ への lattice path で直線 $y=x$ と交点をもつもの全体が P である。さて、P に含まれる path p に対して、直線との最初の交点を (i,i) として、$(1,0)$ から (i,i) への部分を $y=x$ に関して折り返して得られる $(0,1)$ から $(n+1,n)$ への lattice path を p' で表す (図 2)。この対応で、集合 P は、$(1,0)$ から $(n+1,n)$ への free lattice path 全体に写される。従って、P の個数は、$\binom{2n}{n+1}$ であり、求める最短経路の総数は、

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

で与えられる。

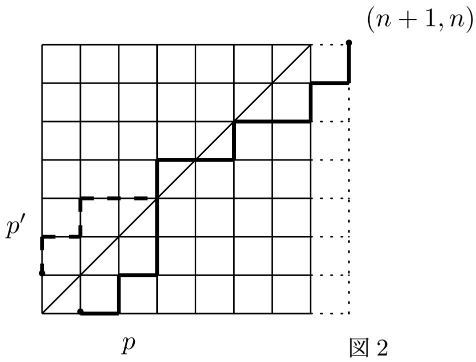


図 2

問 25. 集合 $X = \{(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{N}^m ; x_1 + \cdots + x_m = n\}$ と集合 $\mathcal{P}_m(\{1,2,\ldots,m+n\})$ との間の全単射を構成して、$|X|$ を表わす公式を導け。

最後に、分割和に関連して、和の記号の使い方について注意しておこう。有限集合 A から集合 B への写像 f を考える。集合 B には、結合法則と交換法則が成り立つ足し算が定義されているものとする。このとき、

$$\sum_{a\in A} f(a)$$

という記号で、$f(a)$ の形の全ての要素の総和を表わす。ここで注意すべきは、$f(a)$ の形の要素に重複があったときは、その重複する分だけ繰り返し足すということである。したがって、定数関数 1 に対しては、$\sum_{a\in A} 1 = |A|$ である。

さて、有限集合の分割

$$A = \bigsqcup_{i\in I} A_i$$

が与えられたとき、

$$\sum_{a\in A} f(a) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{a\in A_i} f(a)\right)$$

が成り立つ。

問 26. 二重数列 $\{a_{j,k}\}$ に対して、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} a_{j,k}$ であることを示せ。

6　像と逆像

写像 $f : X \to Y$ を考える。部分集合 $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して、

$$f[A] = \{f(a); a \in A\},$$
$$f^{-1}[B] = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

をそれぞれ、A の**像** (image)、B の**逆像** (inverse image) と呼ぶ。像 $f[A]$ は Y の部分集合であり、逆像 $f^{-1}[B]$ は X の部分集合であることに注意。また、逆像の記号と逆関数やあとで説明する逆写像のそれと混同しないように。

注意 9.

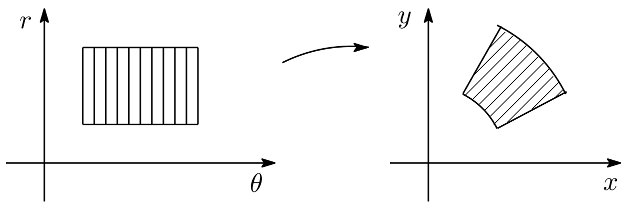
(i) 定義により、$f[\emptyset] = \emptyset$, $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ である。また、$x \in X$ に対して、$f[\{x\}] = \{f(x)\}$ である。

(ii) 像あるいは逆像を表わす記号として、$f[A]$、$f^{-1}[B]$ ではなく $f(A)$, $f^{-1}(B)$ を使うことが多い。敢えて、慣例に逆らう記号を導入した理由は、$A \subset X$ でありかつ $A \in X$ でもある場合には、$f(A)$ を $f(A) \in Y$ の意味で取るかあるいは $f(A) \subset Y$ の意味で取るかで結果が違って来て混乱を招くからである。とは言うものの、習慣で $f(A)$ などと書くこともあるだろう。

実際、$X = \{1, \{1\}\}$ という二点集合の場合、$\{1\} \in X$ であり $\{1\} \subset X$ でもある。そこでもし、関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を、$f(1) = 2, f(\{1\}) = 3$ で定めたとすると、$\{1\}$ の関数の値として意味が 3 という数値であるのに対して、部分集合の像としての意味は $\{f(1)\} = \{2\}$ となり、異なった結果となってしまう。

例題 6.1. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ で表わされる一次変換 f による、直線 $L = \{x+y = 0\}$ および円 $C = \{x^2+y^2 = 1\}$ の像と逆像を求めてみよう。

例題 6.2. 極座標変換 (polar coordinates transformation) による像と逆像。長方形と扇形。$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.



例題 6.3. 2変数関数 $f(x, y)$ の場合、一点の逆像 $f^{-1}[\{a\}]$ は等高線を、区間の逆像 $f^{-1}[[a, b]]$ は等高帯を表わす。例えば、$f(x, y) = x^2 + y^2$ の場合、その値域は、$[0, +\infty)$ であり、逆像 $f^{-1}[\{a\}]$ は、(同心) 円を表わす。

例題 6.4. 区間 $[a, b]$ から $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{R}^3$ への写像により曲線を表示することができる。これを曲線のパラメータ表示という。例えば、円 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ は写像 $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos t, \sin t)$ の像として実現される。同様の考え方で、平面内の図形 $D \subset \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像により曲面を表示することを曲面のパラメータ表示という。

問 27. パラメータ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ に対して、

$$x = \cos\theta\sin\phi, \quad y = \sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\phi$$

は、球面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ のパラメータ表示であることを確かめよ。

像と逆像についての一般的な性質。集合族の場合も同様の関係が成立。

命題 6.5. 等号が成り立たない場合に注目。

(i) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.
(ii) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$.
(iii) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
(iv) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

問 28. 写像 $f : X \to Y$ と部分集合 $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して、

$$A \subset f^{-1}[f[A]], \qquad f[f^{-1}[B]] \subset B$$

を示し、等号が成り立たない例を具体的に挙げる。

問 29. $\mathbb{R}^2$ における変換 $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ の像を求めよ。また、定義域を縮めることで、1対1の写像にできるかどうか考えてみよ。

問 30. 一次関数 $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto ax + by + cz \in \mathbb{R}$ の逆像として、平面 $ax + by + cz = d$ が得られることを確かめよ。

問 31. 一次変換 $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ による $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ の像を図示せよ。

7　合成写像と逆写像

既知の関数を組み合わせて新しい関数を作る方法として、和、定数倍、積、商があるが、その他に合成関数というものも重要である。関数の合成とは、簡単に言って、関数に関数を代入して新たな関数を作る方法である、ということができる。合成された関数を表わす記号としては、$f \circ g$ あるいは丸を省略して fg も使われる（関数の積の記号と紛らわしいが)。

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

といった関係のものである。

例題 7.1. 関数 $f(x) = \sin x$ と $g(x) = x^n$ の合成として、

$$f(g(x)) = \sin(x^n), \qquad g(f(x)) = (\sin x)^n$$

を得る。この 2 種類の合成関数は異なることに注意。一般的に $f \circ g \neq g \circ f$ ということである。

写像の合成も同じように考えることができる。$f : X \to Y$、$g : Y \to Z$ という写像に対して、その**合成写像** (composite map) $g \circ f : X \to Z$ を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X$$

で定める。このように、写像の合成においては、終集合と始集合の整合条件を要求する。

命題 7.2. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ に対して、結合法則 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成り立つ。一般に、写像の合成が可能であるという仮定のもとで、$f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ は、括弧のつけかたによらず同一の写像

$$x \mapsto f_1(f_2(\dots f_n(x)\dots))$$

を定める。

問 32. 合成写像 $f \circ g$ が全射であれば、f も全射でなければならず、$f \circ g$ が単射であれば、g も単射でなければならない。逆は成り立つだろうか。

問 33. 全射を合成すると全射、単射を合成すると単射が得られる。

写像の合成は、結合律が成り立つという意味で、一種の積を定義しているとも考えられる。これに関連して、集合 X に対して、写像

$$X \ni x \mapsto x \in X$$

を X における**恒等写像**（あるいは恒等変換）(identity mapping) とよび、1_X あるいは id_X という記号で表わす。

命題 7.3. 写像 $f : X \to Y$ に対して、$f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$ である。すなわち、写像の合成の「積」に関して恒等写像は 1 のように振舞う。

例題 7.4. $\mathbb{R}^2$ の恒等変換は、単位行列に対応する一次変換で与えられる。

全単射 $f : X \to Y$ に対しては、対応 $x \mapsto f(x)$ を逆転させて、$f(x) \mapsto x$ により Y から X への写像を定めることができる。これを f の**逆写像** (inverse mapping) といい、f^{-1} という記号で表わす。変換 $f : X \to X$ に対しては、逆変換という言い方もする。

命題 7.5. 写像 $f : X \to Y$ に対して、次は同値である。

(i) f は全単射である。
(ii) 写像 $g : Y \to X$ で、$f \circ g = 1_Y$, $g \circ f = 1_X$ となるものが存在する。

このとき、g は一意的に決まり、$g = f^{-1}$ をみたす。

問 34. 合成可能な全単射 f, g に対して、$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ である。

例題 7.6. 行列 T の定める一次変換 f が逆変換をもつための条件は、T が逆行列 T^{-1} をもつことであり、f^{-1} は、T^{-1} に対応した一次変換に一致する。

問 35. $a \in f(X)$ である場合、$f^{-1}(a)$ と $f^{-1}[\{a\}]$ の違いを説明せよ。

写像 $f : X \to Y$ と部分集合 $A \subset X$ に対して、対応

$$A \ni a \mapsto f(a) \in Y$$

で定められる写像を f の A への**制限** (restriction) と呼び、$f|_A$ という記号で表わす。また、写像 g が写像 f の制限になってるとき、f は g の**拡張** (extension) である、という言い方もする。

問 36. 任意の写像は、単射と全射の合成として表わすことができる。

与えられた写像 $f : X \to Y$ に対して $X \times Y$ の部分集合

$$\{(x, f(x)); x \in X\}$$

を f の**グラフ** (graph) と称する。関数に対するいわゆるグラフの類似物である。こういった用語法は、初めにすべて覚える、ということではなく、必要に応じて復習しながら（思い出しながら）使うべき種類のものである。

問 37. 全単射 f の逆写像のグラフは、

$$\{(f(x), x); x \in X\}$$

であることを確かめ、これと逆関数のグラフの描き方との関係について説明せよ。

問 38. 複素数 a, b に対して $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) = az + b \in \mathbb{C}$ という写像を考える。合成写像 $f \circ f \circ f$ が恒等写像であるとき、a, b の値を求めよ。

8 同値関係と類別

全射 $f : X \to Y$ が与えられたとしよう。このとき、各 $y \in Y$ に対して、$X_y = f^{-1}[\{y\}]$ と置くと、集合の族 $\{X_y\}_{y \in Y}$ が得られる。こうして得られた集合族は、$X_y \neq \emptyset$ $(y \in Y)$ かつ

$$X = \bigsqcup_{y \in Y} X_y$$

が成り立つという意味で、集合 X の**分割** (partition) を与えるものである。逆に X の部分集合族 $\{X_i \neq \emptyset\}_{i\in I}$ による分割

$$X = \bigsqcup_{i\in I} X_i \iff X = \bigcup_{i\in I} X_i,\ X_i \cap X_j = \emptyset \text{ if } i \neq j$$

があると、各 $x \in X$ に対して $x \in X_i$ となる $i \in I$ が唯一つ定まるので、$q(x) = i$ とおけば、全射 $q : X \to I$ を得る。のみならず、$X_i = q^{-1}[\{i\}]$ である。すなわち、集合 X の分割を与えることと、全射 $q : X \to I$ を与えることは、同等の情報である。

さて、X の分割 $\{X_i\}_{i\in I}$ を与えたとして、$x, y \in X$ が同じ部分集合に属するとき（言い換えれば、$q(x) = q(y)$ であるとき）$x \sim y$ という記号で表わすことにすれば、次の三性質が成り立つ。

(i) $x \sim x$ がいつでも成立。
(ii) $x \sim y \iff y \sim x.$
(iii) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ であるならば、$x \sim z$ が成り立つ。

以上のような性質を持った二変数の条件 $R(x, y) = (x \sim y)$ を X における**同値関係** (equivalence relation) という。

例題 8.1.

(i) 平面上の二点 P, Q の定める有向線分 PQ 全体の集合 X において、

$$PQ \sim P'Q' \iff PQ \mathbin{/\!/} P'Q'$$

と定めると、同値関係である。

(ii) 与えられた自然数 $n \geq 2$ に対して、整数の集合 $\mathbb{Z}$ において、

$$x \sim y \iff x - y \text{ は } n \text{ の倍数である}$$

と定めると、同値関係である。

(iii) 三角形が**相似** (similar) であるという条件は同値関係である。同値関係を表わす記号 $\sim$ の由来はこの辺りか。

集合 X における同値関係が与えられたとして、各 $x \in X$ に対して、

$$C(x) = \{x' \in X; x \sim x'\}$$

と置き、x の属する（あるいは定める）**同値類** (equivalence class) と呼ぶ。このとき、次が成り立つ。

補題 8.2. $x, y \in X$ に対して、

(i) $x \in C(x).$
(ii) $x \sim y \Longrightarrow C(x) = C(y).$
(iii) $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Longrightarrow C(x) = C(y).$

上の補題の意味するところは、$C(x)$ という形の部分集合は、少しでも共通部分があれば、完全に一致するということである。一方で、必ず $x \in C(x)$ であるから、$C(x)$ の形の部分集合で互いに異なるものをすべて取ってくれば、それが集合 X の分割を与えることになる。この場合、分割の目印としては部分集合そのものを取っておけばよい。

以上のことをまとめると、(i) X の上で定義された全射, (ii) 集合 X の分割、(iii) 集合 X における同値関係、の三者は、見かけは異なっても同等の内容を与えることがわかる。

上の分割の構成では、分割された部分を区別する目印として、部分集合そのものを考えたのであるが、個々の分割された部分に名前をつけるといった感覚で、同値類を一つのものと思うと便利である。そこで、$x \in X$ が属する同値類の「名前」として、$\overline{x}$ という記号を形式的に用意して、$\overline{x} = \overline{y} \iff x \sim y$ であるものとする。そして、この「名前」全体の集合を**商集合** (quotient set) と呼び、$x \mapsto \overline{x}$ で定められる写像を**商写像** (quotient map) と言う。商集合を表わす記号として、使われる同値関係 $\sim$ に配慮して、$X/\sim$ という記号もよく使われる。

このグループ分けという見方に呼応して、各同値類から一つだけ要素を選んできて、それらを集めた集合 R を同値関係の（あるいは分割和の）**代表系** (a system of representatives) という。グループ分けされた各集団の代表を選ぶことに相当する。

このような代表系の存在をいかなる分割に対しても認めることを**選択公理** (axiom of choice) と呼ぶ。一見、当たり前のことに思えるが、実は集合論的な認識の根源に関わる性質（仮定）であることが知られている。このノートの立場としては、これを（素朴に）当然のこととして、敢えて取り立てて問題にしないこととする（気になる人は、基礎論の本を見よ）。

例題 8.3. 平面における有向線分の同値類が（一つの）ベクトルであり、その場合の商集合とは、平面のベクトル全体である。有向線分 PQ の定める同値類（ベクトル）を通常、$\overrightarrow{PQ}$ という記号で表わす。また、平面上に一点 O を選んでくると、ベクトルの代表系として点 O を始点とする有向線分のの定めるベクトルの集まり $\{\overrightarrow{OP}\}$ を取ることができる。このようにしてベクトルを使って平面の上の点を表わしたものが、位置ベクトルと呼ばれるものである。

例題 8.4. 上で説明した整数の間の同値関係による同値類を「n を法とした剰余類 (residue class modulo n)」と呼ぶ。この場合の代表系としては、数を n で割った余りに着目した $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ を取ることができる。とくに、$n = 7$ の場合には、暦との関係で、剰余類と曜日とを対応付けることも可能である。

問 39. 集合の分割、代表系、商写像をイメージできるような図示を試みよ。

問 40. 不定積分（原始関数）の不定性を、同値関係と同値類の観点から分析してみよ。

さて、写像 $\overline{X} \to Y$ があれば、商写像との合成により、写像 $X \to Y$ が得られる。逆に、写像 $f : X \to Y$ が、

$$x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

という性質をみたせば、写像 $\overline{f} : \overline{X} \to Y$ を $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ によって定めることができる。このような形で記述される $\overline{X}$ から Y への写像に関して、対応 $\overline{x} \mapsto f(x)$ は**うまくいっている** (well-defined) という言い方をする。すなわち、写像 $f : X \to Y$ が上の一定性の条件を満たしているということである。

例題 8.5. ベクトルの内積あるいは大きさは、有向線分に対する定義から「矛盾なく定義される」量である。

例題 8.6 (有理数の構成)**.** 集合 $X = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2; n \neq 0\}$ に同値関係を $(m, n) \sim (m', n') \iff mn' = m'n$ で定めるときの同値類全体であるとするのが有理数の論理的な構成方法である。心は、(m, n) の属する同値類に有理数 m/n が対応しているということである。

このように見るとき、有理数どうしの和・積の定義は、

$$k/l + m/n = (kn + lm)/(ln), \qquad (k/l) \cdot (m/n) = (km)/(ln)$$

によって、「うまくいっている」ことがわかる。

問 41. 有理数の和と積が、上の対応で「うまくいっている」ことを確かめよ。

問 42. 座標空間から原点を除いた集合 A における同値関係を $(x, y, z) \sim (x', y', z') \iff \exists c \in (0, +\infty),\ (x, y, z) = c(x', y', z')$ で定めるとき、商集合 $A/\sim$ と球面 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とが自然に同一視されることを示せ。

問 43 (円順列)**.** 1 から n までの数字を並べ替えた順列全体の集合を S_n で表わす。いま、S_n における同値関係 $\sim$ を、

$$\sigma \sim \tau \iff (\sigma(k), \sigma(k+1), \ldots, \sigma(n), \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k-1)) = (\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n))$$

をみたす $1 \leq k \leq n$ がある、という条件で定める。このとき、各同値類 $C(\sigma)$ の個数を求めよ。また、商集合 $S_n/\sim$ の個数についてはどうか。

9 無限集合の比較

ガリレイ (Galileo Galilei, 1564–1642) は、偶数の集合 $\{2, 4, 6, \ldots\}$ と自然数の集合 $\{1, 2, 3, \ldots\}$ が同じ「個数」をもつことを初めて指摘したことでも知られている。このように、部分が全体に匹敵することが無限集合の特徴となっている。

無限集合の「個数」を比較する手法を、カントルにしたがって学ぼう。

補題 9.1. 2 つの集合 A, B に対して、次の条件は同値。

(i) A から B への単射が存在する。
(ii) B から A への全射が存在する。

この同値な条件が満たされるとき、$|A| \leq |B|$ または $|B| \geq |A|$ と書くことにする。

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii) は容易。(ii) $\Longrightarrow$ (i) で選択公理を使う。 □

注意 10. 実は、勝手に取ってきた二つの集合 A, B に対して、$|A| \leq |B|$ または $|B| \leq |A|$ であることが選択公理を使って証明できる（集合の比較可能定理)。

定理 9.2 (Cantor-Bernstein)**.** 次の条件は同値である。

(i) $|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |A|$ である。
(ii) 集合 A から集合 B への全単射が存在する。

この同値な条件が満たされるとき、2 つの集合 A, B は同じ**基数** (cardinal number) を持つ、あるいは A と B は**対等** (equipotent) である、と言い、$|A| = |B|$ あるいは $A \simeq B$ と書く。「基数」のかわりに**濃度**という言い方をすることも多い。有限集合については、基数が等しいことと集合の要素の個数が等しいこととは、同

値であるので、「基数」は「個数」の概念を拡張したものになっている。以下では、用語の直感的なわかり易さを優先させて「個数」という言い方も用いることにする。

Proof. 仮定から、単射 $f: A \to B$, $g: B \to A$ が存在する。少し用語を準備する。$a \in A$ が、$b \in B$ の「親」であるとは、$b = f(a)$ であること。f が単射であるから、「親」は存在すれば、一つしかない。一方、f が全射であることは仮定していないので、「親」をまったく持たない $a \in A$ もあり得る。同様に、$b \in B$ が $a \in A$ の「親」であるということを、$a = g(b)$ で定義する。

集合 A の要素のうち、n 世代前に起源を持つもの全体を A_n で表わし、際限なく世代を遡ることができるもの全体を A_∞ という記号で表わす。同様に B_n, B_∞ を定めると、

$$A = A_\infty \sqcup A_0 \sqcup A_1 \sqcup \dots,$$
$$B = B_\infty \sqcup B_0 \sqcup B_1 \sqcup \dots$$

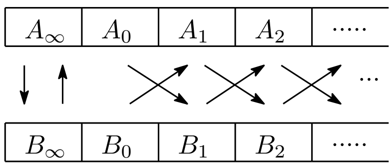
である。$A_0 = A \setminus g(B)$, $B_0 = B \setminus f(A)$ に注意。定義の意味を考えると、次のことがわかる。

$$f(A_k) = B_{k+1}, \qquad g(B_k) = A_{k+1}, \qquad f(A_\infty) = B_\infty, \qquad g(B_\infty) = A_\infty.$$

したがって、

$$A_0 \sqcup A_2 \sqcup \dots \simeq B_1 \sqcup B_3 \sqcup \dots,$$
$$A_1 \sqcup A_3 \sqcup \dots \simeq B_0 \sqcup B_2 \sqcup \dots,$$
$$A_\infty \simeq B_\infty$$

となり、$A \simeq B$ を得る。 □



注意 11. 上記定理の主張はカントルによるものであるが、最初に証明を与えたのはカントルの弟子筋のベルンシュタインであった、という経緯もあり、ベルンシュタインの定理と呼ばれることも多い。

命題 9.3. 集合の濃度が等しいという性質は、一種の同値関係である。すなわち、次が成り立つ。

(i) $A \simeq A$.

(ii) $A \simeq B$ ならば $B \simeq A$.

(iii) $A \simeq B$ かつ $B \simeq C$ ならば $A \simeq C$.

Proof. (i) は恒等写像が全単射であること、(ii) は、全単射の逆写像も全単射であること、(iii) は全単射の合成は全単射であること、から分かる。 □

注意 12. 上の主張を、$|A| = |B|$ という記号で表わせば、(i) $|A| = |A|$, (ii) $|A| = |B| \implies |B| = |A|$, (iii) $|A| = |B|$, $|B| = |C| \implies |A| = |C|$, となって当たり前のことのように見えるので、この記号自体は悪くないのであるが、無自覚に自明である、としてはならない。その意味に思いを馳せるべきである。

例題 9.4. 閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ は、$[0, 1]$ と対等である。これは、一次関数で実現される。$\mathbb{R}$ と $[0, 1]$ は対等である。単射 $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ を作ればよい。例えば、$f(x) = x/(1 + |x|)$

問 44. $\mathbb{R}$ の部分集合で (a,b) $(a<b)$ の形の区間を含むものは $\mathbb{R}$ と対等である。

問 45. $A \simeq B$, $X \simeq Y$ であれば、$A^X \simeq B^Y$ である。

問 46. $A^X \times B^X \simeq (A \times B)^X$ を示せ。

問 47. 集合 A, B に対して

$$2^{A\times B} \simeq (2^A)^B$$

を示せ。

問 48. 集合 A, B が対等であるとき、冪集合 2^A, 2^B も対等であることを示せ。逆は成り立つか？

10 可算集合

有限集合の要素は、$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ のように番号をつけて並べることができる。無限集合でも $\mathbb{N}$ と対等な集合は、$\{a_1, a_2, \dots\}$ のように番号を付して並べることができる。このような性質をもつ集合を**可算集合** (countable set) という。可算無限集合の「個数」を $\aleph_0$ (アレフゼロと読む)、実数の集合 $\mathbb{R}$ の「個数」を $\aleph$ (アレフと読む、ヘブライ語のアルファであるらしい) で表す。

注意 13. (i) 可算集合に有限集合を含めないで使う流儀もある。その場合には、上の意味での可算集合は、「高々可算」という言い方をする。

(ii) 古い日本語の本では、可算と言わずに可附番と呼んでいた。こちらの方が、意味から言ってより正確ではある。「可算」だと「計算可能」の省略形のように見えるし、また、音の上で「加算」と区別がつかないのであるが、用語自体に紛れはないので、このまま使うことにする。

例題 10.1. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は可算集合である。例えば、

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

のように並べることができる。

定理 10.2.

(i) 可算集合の写像による像は、可算集合である。

(ii) 集合の族 $\{A_i\}_{i\in I}$ で、I が可算集合であり各 $i \in I$ に対して A_i も可算集合であれば、$\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ も可算集合。

(iii) 可算集合 $A_1, \dots, A_n$ に対して $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ は可算集合。とくに、$\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}^2$ は可算集合である。

Proof. (i) 可算集合の像に含まれるすべての要素は $a_0, a_1, a_2, \dots$ と並べることができるので、この中から二度以上現れる要素を取り除いていけば良い。

(ii) 添え字集合 I が可算であることから、$I = \mathbb{N}$ としても一般性を失わない。また、各 A_i が可算集合であ

るから、含まれる要素を $\{a_j^{(i)}\}_{j\geq 0}$ のように一列に並べておくことができる。そこで、新たに次のような列

$$\begin{gathered} a_0^{(0)}, \\ a_1^{(0)}, a_0^{(1)}, \\ a_2^{(0)}, a_1^{(1)}, a_0^{(2)}, \\ a_3^{(0)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_0^{(3)}, \\ \dots \end{gathered}$$

を考えると、$\cup_{i\in I} A_i$ のすべての要素を一列に並べることができた。

(iii) 可算集合 A, B に対して、$A\times B$ も可算であるので、n に関する帰納法による。 □

例題 10.3. 有理数全体 $\mathbb{Q}$ は可算集合である。

例題 10.4. 有理数を係数とする多項式を零とおいた方程式の解を**代数的数** (algebraic number) と呼ぶ。代数的数以外の数を**超越数** (transcendental number) と呼ぶ。代数的数全体は可算集合。

問 49. 集合の増大列 $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ があって、各 A_n が可算集合であれば、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も可算集合である。

命題 10.5. 可算無限集合は、「最小の」無限集合であり、集合 A の可算無限部分集合 C に対して、$A\setminus C$ が無限集合であれば、A と $A\setminus C$ は同じ「個数」をもつ。

とくに、実数の集合 $\mathbb{R}$ と無理数の集合 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ は同じ「個数」をもつ。

Proof. $A\setminus C$ は無限集合であるから、単射 $f : C \to A\setminus C$ が存在する。そこで、$B = f(C)$, $A' = A\setminus(B\cup C)$ とおけば、$A = A'\sqcup B\sqcup C$ である。B, C および $B\sqcup C$ は可算無限集合であるから、$B\sqcup C \simeq \mathbb{N} \simeq B$ となり、$A \simeq A'\sqcup B = A\setminus C$ がわかる。 □

問 50. 開区間 $(0, 1)$ と閉区間 $[0, 1]$ との間の全単射を具体的にひとつ作れ。

11 非可算集合

定理 11.1 (Cantor, 1874)**.** 実数の集合 $\mathbb{R}$ は可算ではない。

Proof. 開区間 $(0, 1)$ が可算集合でないことを示せば十分。

仮に、これが可算集合だったとすると、

$$(0, 1) = \{t_1, t_2, \dots\}$$

と番号付けることができることになる。各 $0 < t_j < 1$ を小数展開して

$$t_j = t_j^{(1)} t_j^{(2)} \dots, \qquad t_j^{(k)} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

と表示しておく。このとき、数列（カントルの対角線）

$$t_1^{(1)}, t_2^{(2)}, \dots$$

から新たに数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{if } t_n^{(n)} = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定める。そして、

$$c = 0.c_1c_2\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}$$

という実数を考えると、仮定により、$c = t_n$ となる自然数 n が存在するはずである。ところが、両者の小数第 n 位の数字を比べてみると、c の方は、c_n であるのに対して、t_n の方は $t_n^{(n)}$ であり、$c_n \neq t_n^{(n)}$ であるように定めているので、これは不合理である。よって、開区間 $(0,1)$ に含まれる全ての実数に番号をつけることはできない。 □

注意 14. 上の証明が、世に名高い（？）Cantor の対角線論法 (Cantor's diagonal argument) と呼ばれるものである。こちらも有名な Gödel の不完全性定理の証明でも、ある種の対角線論法が使われている。

集合 A に対して、A の冪集合 2^A とは、A の全ての部分集合からなる集合であったことを思い起こそう。

定理 11.2 (Cantor, 188?)**.** 任意の集合 A に対して、冪集合 2^A の「個数」は A の「個数」よりも真に大きい。

Proof. 仮に A から 2^A への全射 f があったとすると、各 $a \in A$ に対して、$f(a)$ は A の部分集合を意味する。そこで、A の部分集合 B を

$$B = \{a \in A; a \notin f(a)\}$$

で定めると（B は空集合かもしれない）、全ての $a \in A$ に対して、$B \neq f(a)$ である。実際、$a \in f(a)$ とすると、$a \notin B$ であるから、$B = f(a)$ とはなり得ないし、また、$a \notin f(a)$ とすると、$a \in B$ であるから、この場合も $B \neq f(a)$。

以上により、A から 2^A のどんな写像も全射にはなり得ない。 □

上の結果より、$\mathbb{N}$ よりも真に大きい無限集合として、$\mathbb{R}$ と $2^{\mathbb{N}}$ を得た。実は、この二つの集合は対等である。

これについて議論する前に、実数の n 進展開 (n-adic expansion) について、まとめておこう。

実数 $0 < a < 1$ は、$a = 0.a_1a_2\ldots$ $(a_j \in \{0,1,\ldots,9\})$ と小数展開される。(decimal expansion) これの意味するところは、

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

ということである。この式は、数列 $\{a_k\}$ が与えられると、それから実数 a を定義する形になっているが、逆に、与えられた実数 a から各 a_k を復元するための関係式ともなっている。詳しく書くと、

$$10a = a_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k-1}}$$

であるから、もし $a_k = 9$ $(\forall k \geq 2)$ でなければ、

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k-1}} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{9}{10^{k-1}} = 1$$

となって、$a_1 = [10a]$ と定められる。次に、

$$10(10a - a_1) = 10^2a - 10a_1 = a_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k-2}}$$

を考えると、$a_k = 9$ $(\forall k \geq 3)$ でない限り、$a_2 = [10^2a - 10a_1]$ となる。

以下、帰納的に

$$a_k = [10^k a - 10^{k-1} a_1 - \cdots - 10 a_{k-1}]$$

によって、数列 $\{a_k\}$ は定められる。ただし、$a_k = 9\ (\forall k \geq m)$ となる m は存在しないものとする。

もし、このような m があれば、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{m-1}}$$

であるので、繰り上げることにより、$a = 0.a_1 a_2 \ldots a_{m-2} a'_{m-1}$, $a'_{m-1} = a_{m-1} + 1$ という表示を得る。すなわち、この場合の a は、有限小数で表わされることになる。

以上の考察は、１０進法に限らず、いわゆる n 進法でも成り立つ。すなわち、実数 $0 < a < 1$ は、

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k}, \qquad a_k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

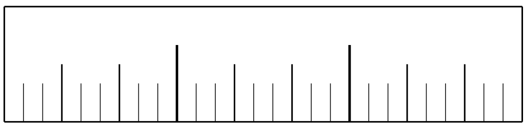
と表わすことができて、対応する数列 $\{a_k\}$ は、

$$a_k = [n^k a - n^{k-1} a_1 - \cdots - n a_{k-1}]$$

によって復元される。ただし、例外は a が「有限 n 進小数」の場合で、そのときは

$$0.a_1 a_2 \ldots a_{m-1}(n-1)(n-1)\cdots = 0.a_1 a_2 \ldots a_{m-2} a'_{m-1}, \qquad a'_{m-1} = a_{m-1} + 1$$

なる二重の表示が可能である。

三進定規 

いずれの場合も「有限小数」全体は可算集合であり、それ以外に、循環小数をはじめとして無数の実数が存在するので、実数を小数表示する上で無駄となる可算数列集合を C で表わせば、

$$\{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{N}} \simeq \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{N}} \setminus C \simeq \mathbb{R}$$

であることがわかる。まとめると、次を得る。

命題 11.3. 自然数 $n \geq 2$ に対して、集合 $\{1, 2, \ldots, n\}^{\mathbb{N}}$ の濃度は $\aleph$ に等しい。

問 51. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \simeq 2^{\mathbb{N}}$ を示せ。

問 52. 実数を n 進小数で表示した場合、有理数は循環小数として特徴づけられることを示せ。

例題 11.4. 超越数全体は $\mathbb{R}$ と同じ「個数」をもつ。$\pi = 3.14159\ldots$, $e = 2.71828\ldots$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

は具体的な超越数であることが証明されている。

これも Cantor の結果であるが、Cantor がこのような見方を提供するまで、超越数がどれだけ沢山あるものなのかについては、数学者といえども正確な認識からは程遠い状況であった。一つには、具体的な数が超越数であることを示すことが恐ろしく難しかった（今でも難しい）こともあり、状況を推測するに足るだけの具体的な情報が乏しかったせいもある。

実数の非可算性という大発見をものにしたカントルは、次なる目標として、$\mathbb{R}^2$ の濃度が $\mathbb{R}$ のそれよりも真に大きいことを証明しようとした。三年の虚しい努力の末に、1877 年、ついに次の結論に想到した。証明が得られた後の Dedekind 宛て手紙の中で、カントルは「(証明は) 解るのだが信じがたい」とその驚きを隠さない。

定理 11.5. $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}$ は同じ「個数」(濃度) をもつ。

Proof. n 進展開を考えれば、$\mathbb{R} \simeq \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ であるので、

$$\mathbb{R}^2 \simeq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \simeq \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R}$$

である。(このようにあっさり証明してしまっては、カントルの 3 年間にわたる苦悩を感じ取ることはできないであろう。) □

注意 15. 上で存在が確認された写像は、「目に見える」という類のものではない。実際、近さの程度は一切保存されないものになっている。もう少し、具体的な事実について触れると、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続な全単射は存在しないことが比較的簡単に証明できる。一方で、$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ の上への連続写像 (Peano 曲線) の存在が知られている。こちらの方は、多少なりとも「見る」ことはできるのだが、いずれにしても、その微妙さ加減に思い至るべきである。

問 53. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数全体の作る集合の濃度は、$2^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}}$ のそれに等しく、したがって $\mathbb{R}$ の濃度よりも真に大きい。

問 54. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数 f は、有理点への制限 $f|_{\mathbb{Q}}$ で決定され、したがって、連続関数全体の集合 F は、集合 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と対等以下である。一方、

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N}}$$

であるから、これは $\mathbb{R}$ と対等である。以上により、F の濃度は $\mathbb{R}$ のそれに等しいことがわかる。

問 55. 可算集合 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ 自身への全単射のなす集合の濃度を求めよ。ヒント:全単射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に $\mathbb{N}$ の部分集合 $\{k \in \mathbb{N}; \sigma(k) = k\}$ を対応させる。

問 56. 以下の人物が関与した歴史的な流れについて調べよ。
Cantor, Hilbert, von Neumann, Gödel.
DeMorgan, Boole, Babbage, Turing, von Neumann.

有用性を過小評価するものではないが、形式そのものを数学と認めることはできない。
内容が伴ってこその形式である。— Agsaryim Ghuamie