2019 年度春学期「数学通論 I」・同秋学期「数学通論 II」宿題解答例まとめ

濱田 昌隆 (多元数理科学研究科 M1)

問 1.1

極限 $\lim_{x\to+0} x^x$ を求めよ。

解答例

$x>0$ に対して、$y=x^{-1}$ とおくと $x^x=y^{-\frac{1}{y}}$ である。よって $\lim_{x\to+0} x^x=\lim_{y\to\infty} y^{-\frac{1}{y}}$ である。そして、y が十分大きいときに $\log y << y$ であることに注意すると $\lim_{y\to\infty} \log y^{-\frac{1}{y}}=\lim_{y\to\infty}\left(-\frac{\log y}{y}\right)=0$ となる。従って $\lim_{x\to+0} x^x=1$ である。

問 1.2

つぎの関数のグラフの概形を、定義域の境界での様子に注意して描け。

(i) $y=x^2e^{-x}$

(ii) $y=x\log x\ (x>0)$

解答例

(i) $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$ で、増減表は次の通りである。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} x^2=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=\infty$ より $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=\infty$、また $x>0$ が十分大きいとき $x^2 << e^x$ であることに注意すると $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$ である。グラフの概形は略。

(ii) $y'=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=1+\log x$ で、増減表は次の通りである。

x	(0)	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$

問 1.1 より $\lim_{x\to+0} x\log x=\lim_{x\to+0}\log x^x=0$、また $\lim_{x\to\infty} x=\lim_{x\to\infty}\log x=\infty$ より $\lim_{x\to\infty} x\log x=\infty$ である。グラフの概形は略。

問 2.1

他に微分と積分の関係にある量を 2 つ挙げよ。

解答例

速さと道のり、加速度と速度、力と位置エネルギー、力と仕事、$\cdots$

問 2.2

原始関数 $f_n(x) = \int x^n \log x \, dx$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を次の 2 つの方法で求めよ。(i) 変数変換 $t = \log x$ を使って。(ii) 部分積分による漸化式を利用して。

解答例

(i) $t = \log x$ とおくと $x = e^t$ より $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ であるから $f_n(x) = \displaystyle\int (e^t)^n te^t \, dt = \int te^{t(n+1)} \, dt$ となる。さらに、最右辺は部分積分により

$$\int te^{t(n+1)} \, dt = \int t \left(\frac{e^{t(n+1)}}{n+1} \right)' dt = \frac{te^{t(n+1)}}{n+1} - \int \frac{e^{t(n+1)}}{n+1} \, dt = \frac{te^{t(n+1)}}{n+1} - \frac{e^{t(n+1)}}{(n+1)^2}$$

となる。従って $f_n(x) = \dfrac{\log x \cdot e^{(n+1)\log x}}{n+1} - \dfrac{e^{(n+1)\log x}}{(n+1)^2} = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ である。

(ii) 部分積分により

$$f_n(x) = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \log x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

となる。

問 3.1

変数変換 $x = \tan\theta$ $(0 \leq \theta < \pi/2)$ を利用して、広義積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} \, dx$$

の値を求めよ。

解答例

$t \geq 0$ に対して $I_t = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{x^2+1} \, dx$ とし、$t = \tan\theta$ を満たす $0 \leq \theta < \pi/2$ を θ_t とする。$x = \tan\theta$ のとき $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから、変数変換により I_t は $I_t = \displaystyle\int_0^{\theta_t} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \, d\theta = \int_0^{\theta_t} d\theta = \theta_t$ と求められる。従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} \, dx = \lim_{t\to\infty} I_t = \lim_{t\to\infty} \theta_t = \frac{\pi}{2}$ である。

問 3.2

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/\sigma^2}\,dx = 1$$

を確かめ、正規分布の平均と分散を求めよ。

(以下、山上先生の Web ページ[*1]より引用)

問 3.2 の訂正と補足説明、正しい等式は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = 1$$

で、この場合の平均と分散とは、

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$

のことです。

解答例

変数変換 $t = x-\mu$ を考えると、ガウス積分の公式より

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{(2\sigma^2)^{-1}}} = 1$$

であることがわかる。正規分布の平均は、変数変換 $t = x-\mu$ を用いて

$$\begin{aligned}
m = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} (t+\mu)e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2\sigma^2}\,dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} (-\sigma^2 e^{-t^2/2\sigma^2})'\,dt + \mu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}[-\sigma^2 e^{-t^2/2\sigma^2}]_{-\infty}^{\infty} + \mu \\
&= \mu
\end{aligned}$$

[*1] http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/math4/tsuron2019.html

となる。また、正規分布の分散は、$m=\mu$ に注意すると、変数変換 $t=x-\mu$ と部分積分を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} t(-\sigma^2 e^{-t^2/2\sigma^2})'\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left([-\sigma^2 t e^{-t^2/2\sigma^2}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-\sigma^2 e^{-t^2/2\sigma^2})\,dt\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

となる。

問 4.1

この一連の概念について整理し、説明できるようにしておく。

解答例

略

問 4.2

空間座標 (x,y,z) について、方程式 $x=1, x-y=1$ はどのような平面を表すか。
３点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ を通る平面の方程式を求めよ。

解答例

$x=1$ は、空間座標 (x,y,z) について、点 $(1,0,0)$ を通り、ベクトル $\overrightarrow{a}=(1,0,0)$ に垂直な平面を表す。また、$x-y=1$ は、空間座標 (x,y,z) について、点 $(1,0,0)$ を通り、ベクトル $\overrightarrow{b}=(1,-1,0)$ に垂直な平面を表す。

３点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ を通る平面の方程式を $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ とおく。この式に $(x,y,z)=(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ をそれぞれ代入すると $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ となることがわかる。よって、元の式より $\alpha(x+y+z)=\alpha$ となる。ここで $\alpha=0$ とすると、すべての (x,y,z) が方程式を満たす、すなわち３点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ を通る平面の方程式にならないので、$\alpha\neq 0$ である。従って、両辺を α で割って $x+y+z=1$ が得られる。

問 5.1

二平面 $x+2y+3z=-1, -x+y=1$ の交線としての直線 L のパラメータ表示を求めよ。また、点 $q(1,1,0)$ からの距離が最小となる L 上の点を求めよ。

解答例

$x+2y+3z=-1, -x+y=1$ を整理すると $x=y-1=-z-1$ が得られる。よって、$x=t$ とすると、直線 L のパラメータ表示は $(t, 1+t, -1-t)$ となる。この表示から、直線 L はベクトル $\overrightarrow{v}=(1,1,-1)$ に平行であることがわかる。点 $q(1,1,0)$ からの距離が最小となる L 上の点を $H(t, 1+t, -1-t)$ とおくと $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{qH}=0$ であり、左辺の内積を計算すると $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{qH}=(1,1,-1)\cdot(t-1, t, -1-t)=(t-1)+t-(-1-t)=3t$ である。従って、$t=0$ となるから、H の座標は $(0,1,-1)$ である。

問 5.2

$x^2+2xy+3y^2=1$ がどのような曲線を表すか調べよ。

解答例

$x=X\cos\theta-Y\sin\theta, y=X\sin\theta+Y\cos\theta$ とおくと、$x^2+2xy+3y^2$ は $(2+\sin 2\theta-\cos 2\theta)X^2+2(\cos 2\theta+\sin 2\theta)XY+(2-\sin 2\theta+\cos 2\theta)Y^2$ と書ける[*2]。さらに、$\theta=3\pi/8$[*3]とすると $(2+\sqrt{2})X^2+(2-\sqrt{2})Y^2$ となる。XY 座標において、方程式 $(2+\sqrt{2})X^2+(2-\sqrt{2})Y^2=1$ が表す曲線は楕円である。従って、曲線 $x^2+2xy+3y^2=1$ は、楕円 $(2+\sqrt{2})x^2+(2-\sqrt{2})y^2=1$ を原点を中心として $3\pi/8$ だけ回転させたものである。

問 6.1

くり返し積分

$$\int_0^1\int_1^2 (x+y)^a\,dy\,dx, \qquad \int_1^2\int_0^1 (x+y)^a\,dx\,dy$$

を計算して、一致することを確かめよ。

解答例

$a\neq -2,-1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_1^2 (x+y)^a\,dy\,dx &= \int_0^1\left[\frac{(x+y)^{a+1}}{a+1}\right]_{y=1}^2 dx = \int_0^1\left(\frac{(x+2)^{a+1}}{a+1}-\frac{(x+1)^{a+1}}{a+1}\right)dx\\ &= \left[\frac{(x+2)^{a+2}-(x+1)^{a+2}}{(a+1)(a+2)}\right]_{x=0}^1 = \frac{3^{a+2}-2^{a+3}+1}{(a+1)(a+2)}\\ \int_1^2\int_0^1 (x+y)^a\,dx\,dy &= \int_1^2\left[\frac{(x+y)^{a+1}}{a+1}\right]_{x=0}^1 dy = \int_1^2\left(\frac{(1+y)^{a+1}}{a+1}-\frac{y^{a+1}}{a+1}\right)dy\\ &= \left[\frac{(1+y)^{a+2}-y^{a+2}}{(a+1)(a+2)}\right]_{y=1}^2 = \frac{3^{a+2}-2^{a+3}+1}{(a+1)(a+2)}\end{aligned}$$

[*2] 途中の計算を省略しています。
[*3] XY の係数が 0 (すなわち $\cos 2\theta+\sin 2\theta=0$) となるような値です。

$a=-2$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_1^2 (x+y)^{-2}\,dy\,dx &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_{y=1}^2 dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= [-\log|x+2|+\log|x+1|]_{x=0}^1 = 2\log 2-\log 3 \\ \int_1^2\int_0^1 (x+y)^{-2}\,dx\,dy &= \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_{x=0}^1 dy = \int_1^2 \left(-\frac{1}{1+y}+\frac{1}{y}\right) dy \\ &= [-\log|1+y|+\log|y|]_{y=1}^2 = 2\log 2-\log 3\end{aligned}$$

$a=-1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_1^2 (x+y)^{-1}\,dy\,dx &= \int_0^1 [\log|x+y|]_{y=1}^2\ dx = \int_0^1 \{\log(x+2)-\log(x+1)\}\,dx \\ &= \int_0^1 (x+2)'\log(x+2)\,dx - \int_0^1 (x+1)'\log(x+1)\,dx \\ &= [(x+2)\log(x+2)]_{x=0}^1 - \int_0^1 dx - [(x+1)\log(x+1)]_{x=0}^1 + \int_0^1 dx \\ &= 3\log 3-4\log 2 \\ \int_1^2\int_0^1 (x+y)^{-1}\,dx\,dy &= \int_1^2 [\log|x+y|]_{x=0}^1\ dy = \int_1^2 \{\log(1+y)-\log y\}\,dy \\ &= \int_1^2 (1+y)'\log(1+y)\,dy - \int_1^2 y'\log y\,dy \\ &= [(1+y)\log(1+y)]_{y=1}^2 - \int_1^2 dy - [y\log y]_{y=1}^2 + \int_1^2 dy \\ &= 3\log 3-4\log 2\end{aligned}$$

となり、いずれの場合も $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 (x+y)^a\,dy\,dx = \int_1^2\int_0^1 (x+y)^a\,dx\,dy$ である。

問 6.2

半平面 $D=\{(x,y);x\in\mathbb{R},y>0\}=\mathbb{R}\times(0,\infty)$ 上の広義二重積分

$$\int_D e^{-(x^2+1)y}\,dxdy$$

をくり返し積分により計算することで、ガウス積分の公式を導け。

解答例

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して $e^{-(x^2+1)y}>0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\int_D e^{-(x^2+1)y}\,dxdy &= \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+1)y}\,dxdy = \int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+1)y}\,dydx = \int_{-\infty}^\infty \left[-\frac{e^{-(x^2+1)y}}{x^2+1}\right]_{y=0}^{y=\infty} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \quad (x=\tan\theta\ \text{で変数変換}) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi\end{aligned}$$

となる。一方

$$
\begin{aligned}
\int_D e^{-(x^2+1)y}\,dxdy &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+1)y}\,dxdy = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-y}e^{-yx^2}\,dxdy = \int_0^\infty e^{-y}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-yx^2}\,dx\right)dy \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt\right)dy \qquad (t=\sqrt{y}x\text{ で変数変換}) \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\,dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt \int_0^\infty \frac{e^{-s^2}}{s}2s\,ds \qquad (s=\sqrt{y}\text{ で変数変換}) \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt\cdot 2\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\,ds = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2
\end{aligned}
$$

である。従って $\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \pi$ ゆえ $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ が得られる。

問 7.1

関数 $f(x,y,z) = \dfrac{3}{1+x^2}\log(1+e^y+z^2) - y$ $(x,y,z\in\mathbb{R})$ に対して

$$F(t) = f(a\cos t, a\sin t, t^2) \qquad (t\in\mathbb{R})$$

とおく. ただし, $a\in\mathbb{R}$ は定数とする. このとき, $F'(0)=0$ となる a をすべて求めよ.

解答例

$x(t)=a\cos t$、$y(t)=a\sin t$、$z(t)=t^2$ とし、$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ とおくと、$F(t)=f(\boldsymbol{r}(t))$ である。また、

$$\frac{dx}{dt}(t) = -a\sin t、\frac{dy}{dt}(t) = a\cos t、\frac{dz}{dt}(t) = 2t$$

であり、さらに

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= -\frac{3\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\log(1+e^y+z^2) = -\frac{6x}{(1+x^2)^2}\log(1+e^y+z^2)、\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{3}{1+x^2}\frac{e^y}{1+e^y+z^2} - 1 = \frac{3e^y}{(1+x^2)(1+e^y+z^2)} - 1、\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{3}{1+x^2}\frac{2z}{1+e^y+z^2} = \frac{6z}{(1+x^2)(1+e^y+z^2)}
\end{aligned}
$$

である。よって、Chain Rule より

$$
\begin{aligned}
F'(t) =& \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{r}(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{r}(t))\frac{dy}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{r}(t))\frac{dz}{dt}(t) \\
=& -\frac{6a\cos t}{\{1+(a\cos t)^2\}^2}\log(1+e^{a\sin t}+t^4)\cdot(-a\sin t) \\
&+ \left\{\frac{3e^{a\sin t}}{\{1+(a\cos t)^2\}(1+e^{a\sin t}+t^4)} - 1\right\}\cdot a\cos t \\
&+ \frac{6t^2}{\{1+(a\cos t)^2\}(1+e^{a\sin t}+t^4)}\cdot 2t
\end{aligned}
$$

であるから

$$F'(0) = \left\{\frac{3}{(1+a^2)\cdot 2} - 1\right\}\cdot a = a\left\{\frac{3}{2(1+a^2)} - 1\right\}$$

となる。よって、$F'(0)=0$ のとき $a\left\{\dfrac{3}{2(1+a^2)}-1\right\}=0$ であり、これを解くと $a=0,\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ が得られる。

問 7.2

理想気体について、体積を 3 ％増やし、温度を 2 ％下げると、圧力は何％増えるか。

解答例

理想気体の状態方程式 $pV=nRT$ より、圧力 p は特に体積 V と温度 T の関数として $p(V,T)=\dfrac{nRT}{V}$ と表される。体積を 3 ％増やし、温度を 2 ％下げたときの圧力の変化は、一次近似式より

$$\begin{aligned} p(V+0.03V,T-0.02T)-p(V,T) &\approx \frac{\partial p}{\partial V}(V,T)\cdot 0.03V+\frac{\partial p}{\partial T}(V,T)\cdot(-0.02T) \\ &= -\frac{nRT}{V^2}\cdot 0.03V+\frac{nR}{V}\cdot(-0.02T) \\ &= -0.05\frac{nRT}{V} \\ &= -0.05p(V,T) \end{aligned}$$

である。すなわち圧力は -5 ％増える（5 ％減る）。

問 8.1

$f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の停留点を求めよ。

解答例

$f_x(x,y)=3x^2-3y$、$f_y(x,y)=-3x+3y^2$ であるから、停留点を $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ とおくと

$$\begin{cases} 3a^2-3b=0 \\ -3a+3b^2=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a^2=b & \cdots(1) \\ a=b^2 & \cdots(2) \end{cases}$$

となる。(1) を (2) に代入すると $a=a^4$ となり、これを整理すると $a(a-1)(a^2+a+1)=0$ となるので $a=0,1$ が得られる。(1) より、$a=0$ のとき $b=0$、$a=1$ のとき $b=1$ である。従って、停留点は $(0,0)$ と $(1,1)$ である。

問 8.2

$f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の停留点のまわりでの二次近似式を求め、極値かどうか調べよ。

解答例

問 8.1 より、$f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の停留点は $(0,0)$ と $(1,1)$ である。また、

$$f_{xx}(x,y)=6x、f_{xy}(x,y)=-3、f_{yy}(x,y)=6y$$

である。停留点 $(0,0)$ のまわりでの二次近似式は

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(0,0) &\approx \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)(\Delta x)^2+2f_{xy}(0,0)\Delta x\Delta y+f_{yy}(0,0)(\Delta y)^2) \\ &= \frac{1}{2}(0(\Delta x)^2+2(-3)\Delta x\Delta y+0(\Delta y)^2) \\ &= 2\left(-\frac{3}{2}\right)\Delta x\Delta y \end{aligned}$$

であり、$0\cdot 0-\left(-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{9}{4}<0$ より、この二次近似式は不定値である。従って、$f(x,y)$ は停留点 $(0,0)$ において極値とはならない。また、停留点 $(1,1)$ のまわりでの二次近似式は

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(1,1) &\approx \frac{1}{2}(f_{xx}(1,1)(\Delta x)^2+2f_{xy}(1,1)\Delta x\Delta y+f_{yy}(1,1)(\Delta y)^2) \\ &= \frac{1}{2}(6(\Delta x)^2+2(-3)\Delta x\Delta y+6(\Delta y)^2) \\ &= 3(\Delta x)^2+2\left(-\frac{3}{2}\right)\Delta x\Delta y+3(\Delta y)^2 \end{aligned}$$

であり、$3+3=6>0$ かつ $3\cdot 3-\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}>0$ より、この二次近似式は正定値である。従って、$f(x,y)$ は停留点 $(1,1)$ において極小となる。

問 9.1

近似式 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ により e の値を小数点以下 3 けたまで正確に求めるためには、n をどれだけ大きく取るべきか。

解答例

$\frac{1}{n!}<\frac{1}{1000}$ となるような n の最小値は 7 である。また、

$$\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k!}=\frac{685}{252}=2.7182\cdots、\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k!}+\frac{1}{7!}=\frac{4567}{1680}=2.7184\cdots$$

よって

$$\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k!}<e<\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k!}+\frac{1}{7!}$$

より $2.7182\cdots<e<2.7184\cdots$ となり、$e=2.718\cdots$ であることがわかる。従って、$n=7$ とすればよい。

問 9.2

極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-ax}{e^x-1-x-x^2/2}$ が存在するような実数 a を求めよ。

解答例

基本関数のテイラー展開より

$$e^x-1-x-\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots、\sin x-ax=(1-a)x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

である。よって、$a = 1$ ならば

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - ax}{e^x - 1 - x - x^2/2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3(-1/3! + x^2/5! - \cdots)}{x^3(1/3! + x/4! + \cdots)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1/3! + x^2/5! - \cdots}{1/3! + x/4! + \cdots} = \frac{-1/3!}{1/3!} = -1$$

となり、極限は存在する。一方、$a \neq 1$ のときは

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - ax}{e^x - 1 - x - x^2/2} &= \lim_{x \to 0} \frac{x((1-a) - x^2/3! + x^4/5! - \cdots)}{x(x^2/3! + x^3/4! + \cdots)} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-a) - x^2/3! + x^4/5! - \cdots}{x^2/3! + x^3/4! + \cdots} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-a}{x^2/3! + x^3/4! + \cdots} + \frac{x^2(-1/3! + x^2/5! - \cdots)}{x^2(1/3! + x/4! + \cdots)} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-a}{x^2/3! + x^3/4! + \cdots} + \frac{-1/3! + x^2/5! - \cdots}{1/3! + x/4! + \cdots} \right) \\
&= -1 + \lim_{x \to 0} \frac{1-a}{x^2/3! + x^3/4! + \cdots}
\end{aligned}$$

となる。最後の第 2 項は $a < 1$ ならば ∞、$a > 1$ ならば $-\infty$ であり、いずれの場合も極限は存在しない。従って、求める実数は $a = 1$ である。

問 10.1

$f(x, y) = x + y, \varphi(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$ を調べよ。

解答例

$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 1$、$\varphi_x(x, y) = 2x$、$\varphi_y(x, y) = 4y$ である。定理 10.2 より、$f(x, y)$ が条件 $\varphi(x, y) = 0$ の下で点 (a, b) において極値をとるための必要条件は、ある実数 t が存在して $(f_x(a, b), f_y(a, b)) = t(\varphi_x(a, b), \varphi_y(a, b))$ すなわち $(1, 1) = t(2a, 4b)$ が成り立つことであり、これは $a = 2b$ と同値である。いま、$\varphi(a, b) = 0$ より $a^2 + 2b^2 - 1 = 0$ であるから、$a = 2b$ を代入して $4b^2 + 2b^2 - 1 = 0$ となり、これを解くと $b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ が得られる。従って $(a, b) = \left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \right)$（複合同順）であるから、条件 $\varphi(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の最大値、最小値は、それぞれ $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$、$f\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

問 10.2

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \varphi(x, y, z) = xyz - 1$ を調べよ。

解答例

$f_x(x, y, z) = 2x$、$f_y(x, y, z) = 2y$、$f_z(x, y, z) = 2z$、$\varphi_x(x, y, z) = yz$、$\varphi_y(x, y, z) = zx$、$\varphi_z(x, y, z) = xy$ である。定理 10.2 より、$f(x, y, z)$ が条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ の下で点 (a, b, c) において極値をとるための必要条件は、ある実数 t が存在して $(f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c)) = t(\varphi_x(a, b, c), \varphi_y(a, b, c), \varphi_z(a, b, c))$ すなわち $(2a, 2b, 2c) = t(bc, ca, ab)$ が成り立つことであり、これから $a^2 = b^2 = c^2$ であることがわかる。いま、$\varphi(a, b, c) = 0$ より $abc - 1 = 0$ すなわち $a^2b^2c^2 = 1$ であるから、$a^2 = b^2 = c^2$ を代入して $a^6 = 1$ となり、これを解くと $a = \pm 1$ が得られる。従って $(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$ であるから、条件 $\varphi(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の最小値は 3 である。最大値は存在しない。

問 11.1

次の２つの行列（ベクトル）の積を計算し、その結果を比較せよ。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

解答例

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2+b^2+c^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

となり、前者はスカラー、後者は行列である。

問 11.2

２次の正方行列 A, B で、$AB \neq BA$ かつ $AB = 0$ となるものがあるかどうか調べよ。

解答例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする。このとき

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

となり、$AB \neq BA$ かつ $AB = 0$ を満たす。従って、２次の正方行列 A, B で、$AB \neq BA$ かつ $AB = 0$ となるものは存在する。

問 12.1

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$$

を求めよ。

解答例

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^2c \\ bc^2 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & b^2c \\ bc^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 \\ 0 & b^2c^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & b^3c^2 \\ b^2c^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots
\end{aligned}$$

より、$k=1,2,\cdots$ に対して

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & b^k c^{k-1} \\ b^{k-1} c^k & 0 \end{pmatrix} & (n=2k-1) \\ \begin{pmatrix} b^k c^k & 0 \\ 0 & b^k c^k \end{pmatrix} & (n=2k) \end{cases}$$

である。また

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

より

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

である。

問 12.2

本文の例 3.7 を読んで、問 3.7 を解く。

解答例

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、A^3 で最も大きいのは $(3,2)$ 成分である。従って、3 回の移動に伴う経路の数が最も多くなるのは始点 3、終点 2 のときである。

問 13.1

この表示式を導け。

解答例

２元連立一次方程式

$$\begin{cases} ax+by=s & \cdots(1) \\ cx+dy=t & \cdots(2) \end{cases}$$

を x,y について解く。$(1)\times d-(2)\times b$ より $(ad-bc)x=sd-tb$ ゆえに $x=\dfrac{sd-tb}{ad-bc}$ である。また、$(1)\times c-(2)\times a$ より $(bc-ad)y=cs-at$ ゆえに $y=\dfrac{at-cs}{ad-bc}$ である。

問 13.2

未知数 x, y, z を 3 次行列式で表す公式を導け。ヒント：各列を $\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$ で置き換えた行列式を分配法則で計算。

解答例

行列式 $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ の 1 列目を $\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$ で置き換えたものは、行列式の分配法則（線形性）より

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) &= \det(x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \\ &= x\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + y\det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + z\det(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\end{aligned}$$

となる。ここで、行列式の交代性より

$$\det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -\det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \text{ すなわち } \det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0\text{、同様に } \det(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$$

であるから

$$\det(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = x\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \text{ すなわち } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} t_1 & b_1 & c_1 \\ t_2 & b_2 & c_2 \\ t_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

であることがわかる。y, z についても、同様にして

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & t_1 & c_1 \\ a_2 & t_2 & c_2 \\ a_3 & t_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ および } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & t_1 \\ a_2 & b_2 & t_2 \\ a_3 & b_3 & t_3 \end{vmatrix}$$

が導ける。

問 14.1

三角行列 (triangular matrix) の行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

解答例

行列式の線型性と系 14.2(ii)、さらに規格化条件を用いて、次のように導ける。

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} \\
&= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & 0 \\ \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{nn}\begin{vmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{n-1,n-1}a_{nn}\begin{vmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\begin{vmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
\end{aligned}$$

問 14.2

$|tA| = t^n|A|$ を示せ。

解答例

$A = (\overrightarrow{a_1}\ \cdots\ \overrightarrow{a_n})$ とする。行列式の線型性より

$$|tA| = \det(t\overrightarrow{a_1}, \cdots, t\overrightarrow{a_n}) = t\det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, t\overrightarrow{a_n}) = \cdots = t^n\det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = t^n|A|$$

となる。

問 15.1

3 次正方行列の階段化として可能な形をすべて列挙せよ。

解答例

a_{ij}（$1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$）はすべて 0 でないとする。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問 15.2

次の４次行ベクトルの一次結合を縦に並べることで、２行４列の行列を作り、計算練習を行う。また、求めた解空間の表示が正しいかどうかの検算方法についても確かめてみる。

$$(1, -1, 1, -1), \quad (0, 0, 2, 3).$$

解答例

例えば、$(1, -1, 1, -1)$ と $(0, 0, 2, 3)$ の一次結合として

$$(1, -1, 1, -1) + (0, 0, 2, 3) = (1, -1, 3, 2) \quad \text{および} \quad 2(1, -1, 1, -1) - (0, 0, 2, 3) = (2, -2, 0, -5)$$

を考えると、この 2 つを縦に並べた 2 行 4 列の行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ である。$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とする。

連立一次方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ を解くために、行列 A を掃き出し法により階段化する。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の } (-2) \text{ 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ とおき、連立一次方程式 $B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ を解く。

$$B\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ -6x_3 - 9x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 & \cdots (1) \\ -6x_3 - 9x_4 = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

(2) より $x_3 = -\dfrac{3}{2}x_4$ である。また、これと (1) から $x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 = x_2 + \dfrac{5}{2}x_4$ である。よって、$B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ の解空間は

$$S = \{\overrightarrow{x}; B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 + \frac{5}{2}x_4 \\ x_2 \\ -\frac{3}{2}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

である。S が $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ の解空間であることを確かめよう。そのためには、$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\0\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$ がともに $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ の解であることを確かめればよい。

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\0\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\frac{9}{2}+2\\5-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

問 16.1

n 次正方行列 A が逆をもつとき、A の負べきを $A^{-k} = (A^{-1})^k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ で定め、$A^0 = I_n$ とおくと、指数法則 $A^k A^l = A^{k+l}$ がすべての整数 k, l について成り立つ。

解答例

k, l がどちらも正の整数の場合に成り立つことは既にわかっている[*4]ので、それ以外の場合を考える。

1) $k = 0$ または $l = 0$ のとき
   $k = 0$ ならば $A^k A^l = A^0 A^l = I_n A^l = A^l$、$A^{k+l} = A^{0+l} = A^l$ より成り立つ。また、$l = 0$ の場合も $A^k A^l = A^k A^0 = A^k I_n = A^k$、$A^{k+l} = A^{k+0} = A^k$ より成り立つ。
2) k, l がともに負の整数の場合
   $A^k A^l = (A^{-1})^{-k}(A^{-1})^{-l} = (A^{-1})^{(-k)+(-l)} = (A^{-1})^{-(k+l)} = A^{k+l}$ より成り立つ。
3) $kl < 0$ のとき
   k が正の整数で l が負の整数ならば $A^k A^l = A^k (A^{-1})^{-l} = A^{k-(-l)} = A^{k+l}$ より成り立つ。また、k が負の整数で l が正の整数の場合も $A^k A^l = (A^{-1})^{-k} A^l = A^{l-(-k)} = A^{k+l}$ より成り立つ。

問 16.2

行列

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\t & 1 & 0\\1 & t & 1\end{pmatrix}$$

が逆行列をもたないような t をすべて求めよ。

---

*4 山上先生の下記講義資料、定理 3.4 を参照のこと。
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/linear/linear2017.pdf

解答例

与えられた行列の行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ t & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1-0) - t(2-3t) + (0-3) = 3t^2 - 2t - 2$$

となる。n 次正方行列 A が逆行列をもつための必要十分条件は $|A| \neq 0$ であったから、A が逆行列を持たないための必要十分条件は $|A| = 0$ である。よって、与えられた行列が逆行列を持たないような t は、$3t^2 - 2t - 2 = 0$ の解すなわち $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ である。

問 17.1

対角行列どうしの積が成分ごとの積に一致することを確認。

解答例

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ の積 $AB = C = (c_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ は

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

で与えられる。よって、A, B がともに対角行列ならば $i \neq j$ に対して $a_{ij} = b_{ij} = 0$ であるから

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ a_{ii}b_{ii} & (i = j) \end{cases}$$

となる。これは対角行列どうしの積が成分ごとの積に一致することに他ならない。

問 17.2

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。また、$a = 1, b = 2, c = -2$ のとき、固有ベクトルを求めよ。

解答例

$$|tI_n - A| = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -b & t-c \end{vmatrix} = (t-a)(t-c) - (-b)^2 = t^2 - (a+c)t + ac - b^2$$

より、A の固有値すなわち固有方程式の解は $t = \dfrac{a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$ である。

$a = 1, b = 2, c = -2$ のとき、固有値は $2, -3$ である。固有値 2 の固有ベクトルを $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると、$A\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{x}$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

となる。従って、固有値 2 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$（ただし x_2 は実数）である。また、固有値 -3 の固有ベクトルを $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると、$A\overrightarrow{y} = -3\overrightarrow{y}$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 = -3y_1 \\ 2y_1 - 2y_2 = -3y_2 \end{cases} \quad \Rightarrow y_2 = -2y_1$$

となる。従って、固有値 -3 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} y_1 \\ -2y_1 \end{pmatrix}$（ただし y_1 は実数）である。

問 18.1

すべての x_j が単位ベクトルのとき、二乗和の最小値が最大になるような x_j の配列について調べよ。

解答例

初めに、単位ベクトル x_j（$1 \leq j \leq r$）に対して $f(x) = \sum_{j=1}^{r} \|x - x_j\|^2$ の最小値を考える。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{r} (x - x_j \mid x - x_j) = \sum_{j=1}^{r} \{(x \mid x) - 2(x \mid x_j) + (x_j \mid x_j)\} \\ &= r(x \mid x) - 2\left(x \,\middle|\, \sum_{j=1}^{r} x_j\right) + r = r\left\{(x \mid x) - 2\left(x \,\middle|\, \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_j\right)\right\} + r \\ &= r\left\{\left(x - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_j \,\middle|\, x - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_j\right) - \left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_j \,\middle|\, \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_j\right)\right\} + r \\ &= r\left\|x - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_j\right\|^2 - \frac{1}{r}\left\|\sum_{j=1}^{r} x_j\right\|^2 + r \end{aligned}$$

であるから、$f(x)$ は $x = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_j$ のとき最小値 $-\frac{1}{r}\left\|\sum_{j=1}^{r} x_j\right\|^2 + r$ をとる。よって、この最小値が最大になるのは $\sum_{j=1}^{r} x_j = 0$ のときである。

問 18.2

$\rho_{x,y} = 0$ のとき、x と y は相関がない（無関係）と言ってよいか。

解答例

相関がないとは言い切れない。例えば、5 個の組データ $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq 5}$ として $x_i = i - 3$、$y_i = x_i^2$ すなわち $(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$ を考える。このとき、x, y の平均値は

$$\overline{x} = \frac{(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2}{5} = 0, \overline{y} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = 2$$

である。また、共分散は

$$V_{x,y} = \frac{(-2-0)(4-2)+(-1-0)(1-2)+(0-0)(0-2)+(1-0)(1-2)+(2-0)(4-2)}{5} = 0$$

である。よって $\rho_{x,y}=0$ となる。ところが $y_i = x_i^2$（$1 \leq i \leq 5$）であるから、組データに相関がないとは言い切れない。

問 19.1

$\mathbb{R}^3$ で、単位ベクトル $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ を含む正規直交基底を沢山作れ。

解答例

グラム・シュミットの直交化を用いる。例えば、1 次独立なベクトルの列 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$、$v_2=(1,0,0)$、$v_3=(0,1,0)$ に適用すると

$$\begin{aligned}
f_1 &= v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\\
f_2 &= v_2 - \frac{(f_1 \mid v_2)}{(f_1 \mid f_1)} f_1 = (1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right),\\
f_3 &= v_3 - \frac{(f_1 \mid v_3)}{(f_1 \mid f_1)} f_1 - \frac{(f_2 \mid v_3)}{(f_2 \mid f_2)} f_2 = (0,1,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),\\
&\|f_1\| = 1、\|f_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}、\|f_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

となるから、$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$、$\frac{3}{\sqrt{6}}(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$、$\sqrt{2}(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ は正規直交基底である。

問 19.2

2 次の直交行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ に限ることを示せ。

解答例

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を直交行列とする。このとき ${}^tAA = I_2$ であり、

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

ゆえ $a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1, ab+cd = 0$ を得る。$a^2+c^2=1$ より $a^2b^2+b^2c^2=b^2$、$ab+cd=0$ より $a^2b^2 = c^2d^2$ であるから、$c^2d^2+b^2c^2=b^2$ すなわち $c^2(b^2+d^2)=b^2$ となる。$b^2+d^2=1$ であったから、これより $b^2=c^2$ すなわち $(b+c)(b-c)=0$ で $c=b$ または $c=-b$ となる。$c=-b$ のとき、$ab+cd=0$ より $b(a-d)=0$ であり、$b \neq 0$ ならば $d=a$ となる。また $c=b$ のとき、$ab+cd=0$ より $b(a+d)=0$ であり、$b\neq 0$ ならば $d=-a$ となる。よって、$b \neq 0$ のとき、A は $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ のいずれかとなり、かつ $a^2+b^2=1$ を満たす。そこで $a=\cos\theta$ とおけば、三角関数の相互関係から $b=\pm\sin\theta$ となる。このとき $b=0$ であっても問題ない。ここで、$b=-\sin\theta$ のときは

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

と書き直せる。以上より、２次の直交行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ に限ることがわかる。