数学 IV

山上 滋

2020 年 1 月 29 日

計算の途中を丁寧に説明してくれる授業、聞いただけですべて分かるような授業、そういったものは敢えて目指さない。というか、書いたものを読んでわかるはずのこと、あるいは自分で計算した方が早いことを、丁寧というと聞こえはよいがぬるく説明すべきではないと思うからである。もちろん、人によって今できる範囲は様々、万人に共通のものなどはありえないので、ずれの部分は個別の質問（授業の中外問わず）で埋めていただくことにはなる。現状に安住しないこと、壁はたたいてみて初めてその存在が実感できるもの。たたき甲斐のある壁をぜひ見つけていただきたい。

高校の数学の続きとしての「数学 IV」とでもいうべきものを、９０分授業２０回分で構成してみよう。内容は微積分と線型代数の一部ということになるが、ただの部分集合でない有機的なつながりと高校数学との接続に配慮しつつも数学的精密性はテキストに委ね、データを処理するための数学的素養の修得を目指す。

テキストは次の２つで、それぞれ、微積分、線型代数として引用する。

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/calculus/cal2019.pdf

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/linear/linear2017.pdf

目次

数と量

量 (quantity) ＝数と単位の組合せ。「長さの単位」では、長さが次元で、その次元を具体的に記述する単位がメートルとか尺とかになる。別の言い方をすると、同種の単位 (unit) の集まりが次元 (dimension) ということである。単位の選び方は、扱っている現象の大きさ (scale) により、測定の精度とも結びついている。例：Å $= 10^{-10}$m $= 10^{-8}$cm. 有効数字というものは、使用単位によらない測定精度を表す方法であるか。

単位（次元）の積と商。比と商の違い。速さの次元＝長さの次元/時間の次元。

同種の量の比を抽象化・拡張したものが数。実数と複素数。実数が天然自然にあると思ってはいけない。個数の比としての数＝有理数。有理数の極限としての実数。数の加減乗除は、個数についての和と積に由来するものであるか。交換法則と結合法則。ここでは、次元が一切でてこない。数の導入に当たっては、個数の比としての数と量の比としての数の関係を認識する必要あり。実際、それが数の概念の歴史過程でもあった。

次元の異なる量は足せない？！　次元に配慮した式からその無次化。デカルト (Descartes) の前後。

$$X^2 + AX + BC, \quad \left(\frac{X}{D}\right)^2 + \frac{A}{D}\frac{X}{D} + \frac{BC}{D^2}, \quad x^2 + ax + b.$$

以下、すべての変数および関数（の値）は、単位を取り除いて無次元化したものを扱うものとする。これにより、数に対する四則演算および冪が自在にできるようになる。

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

の x に具体的な数、たとえば $x = 1, -1, 2$、を代入したものを観察し、形式的な計算がいかに危険か実感する。

前提条件（この場合は $|x| < 1$）の重要性を認識する。上の等式を（形式的に）積分すると、

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots .$$

他に、e^x, $\sin x$, $\cos x$ の級数表示。

二項定理とニュートンの二項展開。実数 a と $-1 < x < 1$ について、

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots .$$

$\log(1+y) = y - y^2/2 + \cdots$ に $y = (1+x)^a - 1 = ax + \cdots$ を代入したものを $a\log(1+x) = ax - ax^2/2 + \cdots$ と比較。これに心動かされるかどうか。そもそも計算してみようという気が起こらぬようでは。

- 離散量と連続量 discrete/continuous (digital/analog)、離散変数と連続変数、自然数と実数。
- 数列と関数、和と積分は対応関係にある。
- 数列と一次元配列（縦と横）。二重数列と二次元配列（行列）。
- 和の記号の一般的な使い方。群数列なるものは二重数列として理解すべきもの、三角和の書き直し。

1　関数の増大度と極限（微積分 §2）

べき x^a、指数 e^x、対数 $\log x$ の増大度比較。

$y = x^a$ $(a > 0)$ のグラフを凸性に注意して描く。３種類の関数の中で逆関数の関係にあるものを探してきて、そのグラフを一つの図として描く。$x > 0$ が大きい時に、この３種類の関数のグラフの上下関係を予測。

次が成り立つ

$$\log x \ll x^a \ll e^x \qquad (x \to \infty).$$

多項式増大と指数増大、指数減少。対数の増え方は遅い。曽呂利新左衛門の褒美

$$2^{80}\text{粒} = 2 \times 10^{12}\text{万トン}, \quad \log(6 \times 10^{23}) = 54.7\cdots.$$

日本の米生産量＝８００万トン／年、２５億年分。宇宙の年齢＝１３８億年。

例 1.1. 極限

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$$

の求め方。ややこしげな冪が出てきたら対数である。$\log x \ll x$ に注意して、

$$\lim_{x\to\infty} \log(x^{1/x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

問 1.1. 極限 $\lim_{x\to+0} x^x$ を求めよ。

問 1.2. つぎの関数のグラフの概形を、定義域の境界での様子に注意して描け。

(i) $y = x^2 e^{-x}$.

(ii) $y = x \log x$ $(x > 0)$.

級数の積分による見積もり。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log n.$$

$$\log(n!) = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n \sim \int_1^n \log x\,dx = n\log n - n + 1.$$

から、$n!$ は $e^{n\log n - n} = \frac{n^n}{e^n}$ 程度であろうと推測される。

階乗のスピードについてのスターリングの公式 (Stirling's formula)：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n}n^n} n! = \sqrt{2\pi}.$$

例 1.2. 二項分布の中心確率の見積もり。

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

2　積分の意味と解釈（微積分 §4）

和の極限としての積分。微小量を積み上げて嵩となす。短冊絞り。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\delta x_i$$

変数 x および値 $f(x)$ がどういう次元の量を表すかでさまざまな解釈が可能。

断面積と体積、電流と電荷。

$$V = \int_a^b S(t)\,dt, \quad Q = \int_a^b I(t)\,dt.$$

問 2.1. 他に微分と積分の関係にある量を２つ挙げよ。

積分の不等式：$f(x) \leq g(x)$ $(a \leq x \leq b)$ であれば、

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx, \quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

積分・微分と微分・積分の公式、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad \int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a), \quad \int f(x)\,dx = \int^x f(t)\,dt.$$

微分の公式から積分の公式へ。

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

計算方法の復習は「積分の技法」を見よ。

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/˜yamagami/teaching/calculus/arsintegral2019.pdf

積分計算では、次の手順で試してみるとよい。

(i) 被積分関数の加工。
(ii) 置換積分による書き直し。
(iii) 部分積分による試行。

実例として x^ne^{-x}, $x^{2n+1}e^{-x^2}$, $x^{2n}e^{-x^2}$ の不定積分。

問 2.2. 原始関数 $f_n(x) = \int x^n \log x\,dx$ $(x = 0, 1, 2, \cdots)$ を次の２つの方法で求めよ。(i) 変数変換 $t = \log x$ を使って。(ii) 部分積分による漸化式を利用して。

3　広義積分（微積分 §7）

べき関数と指数関数について、変域と値域、逆関数との関係。

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{a-1} = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/a}}\,dx \ -1(a>1), \quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1 = -\int_0^1 \log x\,dx.$$

問 3.1. 変数変換 $x=\tan\theta$ $(0\le\theta<\pi/2)$ を利用して、広義積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

の値を求めよ。

ガウス積分の計算。積分の存在：$e^{-x^2} \le e^{-|x|}$ $(|x|\ge 1)$ より

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx \le \int_{-1}^1 e^{-x^2}\,dx + \frac{2}{e} < \infty.$$

積分の計算：切り口 $e^{-x^2-y^2}=t$ が半径 $r=\sqrt{-\log t}$ の円であることから、$\lim\limits_{t\to+0} t\log t = 0$ に注意して

$$I^2 = \int_0^1 \pi r^2\,dt = -\pi\int_0^1 \log t\,dt = -\pi[t\log t - t]_0^1 = \pi.$$

ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0).$$

例 3.1. 部分積分と微分で。

$$\int_{-\infty}^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}a^{-(2n+1)/2}, \quad (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1).$$

問 3.2.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^\infty e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = 1$$

を確かめ、正規分布の平均と分散を求めよ。

階乗の積分表示

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx.$$

手っ取り早い方法は、パラメータ $t>0$ を入れた $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t}$ を t で次々と微分してみること。

$$\int_0^\infty xe^{-tx}\,dx = t^{-2}, \quad \int_0^\infty x^2e^{-tx}\,dx = 2t^{-3}, \quad \int_0^\infty x^3e^{-tx}\,dx = 3!t^{-4}, \quad \cdots.$$

形式的に n を $-1/2$ で置き換えると、

$$(-1/2)! = \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}.$$

4　空間の幾何学（線型代数 §2）

２変数と３変数。空間の幾何学。直線と平面の方程式。

一変数＝数直線 x、二変数＝平面 (x, y)、三変数＝空間 (x, y, z)、多変数＝多次元（高次元）空間 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

座標幾何 (analytic geometry) の方法、フェルマーとデカルト（１６３０年代）。和算になかったもの。

曲面の方程式 $\varphi(x, y, z) = \mathrm{const}$。例：球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$。円錐： $x^2 + y^2 = z^2$。

点と変位ベクトル (displacement vector)、位置ベクトル (position vector, radius vector) $\overrightarrow{r}$。

点にベクトルを加える、点の差としてのベクトル。

問 4.1. この一連の概念について整理し、説明できるようにしておく。

点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り、法線ベクトル (normal vector) $\overrightarrow{N} = (\alpha, \beta, \gamma)$ に垂直な平面の上の点 $p(x, y, z)$ が満たすべき方程式（**平面の方程式**）は、

$$\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{p_o p} \iff \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0 \iff \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \ (\delta = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0).$$

逆に x, y, z の一次式は平面を定める。

点 p が平面上になければ、単位法線ベクトル

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{|\overrightarrow{N}|}\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}(\alpha, \beta, \gamma)$$

と $\overrightarrow{p_0 p} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ との内積は、法線への**正射影**を表す。このことから、平面と点 p との距離は

$$\frac{|\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

で与えられる。

問 4.2. 空間座標 (x, y, z) について、方程式 $x = 1$, $x - y = 1$ は、それぞれどのような平面を表すか。

３点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ を通る平面の方程式を求めよ。

点の運動と曲線のパラメータ表示：時刻 t の点の位置ベクトル $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$、速度と加速度。

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \quad \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

曲線 $\overrightarrow{r}(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ の長さは、速さの積分としての道のりと考えると、

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

放物線運動 $\overrightarrow{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct - gt^2/2)$ であれば、その速度・加速度ベクトルは

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = (a, b, c - gt), \quad \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = (0, 0, -g).$$

楕円 $\overrightarrow{r}(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ の長さは、

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta}\, d\theta.$$

5　連立一次方程式の幾何学と座標変換（線型代数 $\S 2$）

連立一次方程式と直線のパラメータ表示。連立一次方程式の幾何学的意味。解の有無と不定性。

点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り、ベクトル $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ に平行な直線のパラメータ表示は、

$$\overrightarrow{r}(t) = p_0 + t\overrightarrow{v} = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

点 p がこの直線の上にある条件は、$\overrightarrow{p_0 p} = t\overrightarrow{v} \iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (at, bt, ct)$ から t を消去して、

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

これを直線の方程式と呼ぶこともあるが、大事なのはパラメータ表示の方である。

問 5.1. 二平面 $x + 2y + 3z = -1$, $-x + y = 1$ の交線としての直線 L のパラメータ表示を求めよ。また、点 $q(1, 1, 0)$ からの距離が最小となる L 上の点を求めよ。

２つの平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta'$ の位置関係。

平行条件 $(\alpha', \beta', \gamma') = \lambda(\alpha, \beta, \gamma)$ と一致の条件 $(\alpha', \beta', \gamma', \delta') = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$。

３つの平面の位置関係：

(i) 一点のみで交わる（連立方程式の解が丁度一つ存在）。
(ii) 平行な二つの平面と平行でない平面。
(iii) 平行な三つの平面。
(iv) 三角柱の側面を構成する。
(v) 一つの直線を共有する互いに平行でない三つの平面。

座標は、原点 o と基準ベクトルの組を決めて初めて定まる。平面であれば、２つの基準ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ を使って、点 p と座標 (x, y) とは $p = o + x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ なる関係で結ばれる。新たな o' と $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ による座標を (X, Y) と書き、$i' = ai + bj$, $j' = ci + dj$、$o' = o + ui + vj$ と表し、p の２通りの表示を比べると、

$$x = aX + cY + u, \quad y = bX + dY + v$$

となる。この新旧の座標を結びつける式を**座標変換**という。今のように一次式で表される座標変換を一次式変換と呼び、とくに原点を動かさない $o = o'$ の場合は、純一次式 $(u = v = 0)$ で表され、**一次変換**と称す。

i', j' が i, j を角度 θ だけ回転させたものだと、$i' = \cos\theta i + \sin\theta j$, $j' = -\sin\theta i + \cos\theta j$ となるので、

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \quad y = X\sin\theta + Y\cos\theta.$$

x, y の純二次式 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ を回転座標で表せば、$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2$、ただし

$$A' = A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta, \quad C' = A\sin^2\theta - 2B\cos\theta\sin\theta + C\cos^2\theta,$$

$$B' = B\cos(2\theta) + \frac{C - A}{2}\sin(2\theta).$$

そこで、$B' = 0$ となる θ を選べば、$A'X^2 + C'Y^2$ のように交叉項 (cross term) のない形となる。これを**2次式の標準形**という。

問 5.2. $x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ がどのような曲線を表すか調べよ。

6　くり返し積分と重積分（微積分 §9）

多変数関数。多変量。密度と積分。単位体積あたり。以下の抜き書きを理解するためには、本文をくり返し読むべき。それだけの質と量をもつもの。楽して分かるなどという虫のよい話はない。

xy 平面内の図形 D の上で定義された関数 $f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ の**二重積分** (double integral) を、微小量の和の極限として、次で定義する。

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n f(x_j,y_j)|D_j|.$$

ただし $\{D_j\}$ は D の分割を、$|D_j|$ は D_j の面積を表し、極限は、各 D_j の大きさが 0 に近づくようにとる。

定理 6.1 (重積分のくり返し積分による表示)**.** $D=\{(x,y);\varphi(x)\le y\le\psi(x), a\le x\le b\}$ のとき、

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

重積分とくり返し積分は広義積分についても意味をもち、$\int_D |f(x,y)|\,dxdy$ をくり返し積分で表すことが可能。この値が有限となるとき（絶対収束する場合）、広義積分 $\int_D f(x,y)\,dxdy$ に対してもくり返し積分による表示が成り立つ。

例えば $\rho(x,y)\ge 0$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ なる関数に対しては、等式

$$\int_{\mathbb{R}^2}\rho(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y)\,dx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y)\,dy\right)dy$$

がこれらの収束・発散にかかわらずに成り立つ。

例 6.2.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2.$$

問 6.1. くり返し積分

$$\int_0^1\int_1^2 (x+y)^a\,dy\,dx,\quad \int_1^2\int_0^1 (x+y)^a\,dx\,dy$$

を計算して、一致することを確かめよ。

問 6.2. 半平面 $D=\{(x,y);x\in\mathbb{R}, y>0\}=\mathbb{R}\times(0,\infty)$ 上の広義二重積分

$$\int_D e^{-(x^2+1)y}\,dxdy$$

をくり返し積分により計算することで、ガウス積分の公式を導け。

7　偏微分と一次近似式（微積分 §10）

偏微分＝部分微分：特定の変数に注目し、残りの変数は定数と思って微分を実行。

例 7.1. $\int e^{xy}\,dx = \frac{1}{y}e^{xy}$ を y について次々と偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\int xe^{xy}\,dx &= -\frac{1}{y^2}e^{xy} + \frac{x}{y}e^{xy} \\
\int x^2e^{xy}\,dx &= \frac{2}{y^3}e^{xy} - \frac{2x}{y^2}e^{xy} + \frac{x^2}{y}e^{xy} \\
\int x^3e^{xy}\,dx &= -\frac{6}{y^4}e^{xy} + \frac{6x}{y^3}e^{xy} - \frac{3x^2}{y^2}e^{xy} + \frac{x^3}{y}e^{xy}.
\end{aligned}$$

右辺を x で偏微分してみると・・・。

次は、偏微分の繰り返しと密度による証明で確かめられる。

定理 7.2. f_{xy}, f_{yx} が存在してどちらも連続関数であるとき $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ。

系 7.3. 関数 $f(x, y)$ は、n 回まで偏微分できて、n 階以下のすべての偏導関数が連続であるとすると、n 階までの偏微分の結果は偏微分をくり返す順番によらない。

定理 7.4 (一次近似式)**.**

$$\delta f = f(a+\delta x, b+\delta y, c+\delta z) - f(a,b,c) \approx f_x(a,b,c)\delta x + f_y(a,b,c)\delta y + f_z(a,b,c)\delta z.$$

問 7.1. 理想気体について、体積を 3 %増やし、温度を 2 %下げると、圧力は何%増えるか。

定理 7.5 (Chain Rule)**.** 関数 $f(x, y, z)$ が連続な偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ をもつとき、微分の公式

$$\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{r}(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{r}(t))\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{r}(t))\frac{dz}{dt}$$

が成り立つ。一般化：

$$\frac{d}{dt}f(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t))\frac{dx_j(t)}{dt} = f'(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}.$$

問 7.2. 関数 $f(x, y, z) = \frac{3}{1+x^2}\log(1+e^y+z^2) - y\ (x, y, z \in \mathbb{R})$ に対して

$$F(t) = f(a\cos t, a\sin t, t^2) \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく. ただし, $a \in \mathbb{R}$ は定数とする. このとき, $F'(0) = 0$ となる a をすべて求めよ.

微分の実体：$f'(a, b, c) = (f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c))$ のように偏微分を並べたベクトル。上記 chain rule は、この意味での微分と曲線の接ベクトルとの内積である。

8　極値点と二次近似式（微積分 §14）

極値点と二次近似式。谷度・山度。ガウス関数。

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2.$$

$$e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2, \quad \cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2.$$

停留点 (stationary point) とその探査、$f_x = f_y = 0$。これは連立方程式を解くという作業である。

問 8.1. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の停留点を求めよ。

停留点 $f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$ のまわりでの二次近似式：

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right).$$

極値の二次判定：二次式は、その標準形 $A'X^2 + B'Y^2$ において $A' > 0,\, B' > 0$ $(A' < 0,\, B' < 0)$ のとき、正定値（負定値）であるという。また $A'B' < 0$ のとき、不定値 (indefinite) と呼ばれる。

停留値における 2 次近似式が正定値（負定値）であれば、関数の値はその点で極小（極大）である。また不定値であれば、極値とはならない。

2 変数の場合 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ について、符号の判定条件を与える。条件 $B' = 0$ から、

$$\cos(2\theta) = \frac{(A-C)/2}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2/4}}, \quad \sin(2\theta) = \frac{B}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2/4}}$$

のように選べるので、

$$A' = \frac{A+C}{2} + \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}, \quad C' = \frac{A+C}{2} - \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}$$

となり、$A' > 0,\, C' > 0$ である条件は、$A + C > 0$ かつ

$$\left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-C}{2}\right)^2 - B^2 = AC - B^2 > 0.$$

同様に、$A' < 0,\, C' < 0$ となる条件は、$A + C < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$。また、$A'C' < 0$ となる条件は $AC - B^2 < 0$。

問 8.2. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の停留点のまわりでの二次近似式を求め、極値かどうか調べよ。

この辺の仕組みを正しく理解するためには、対称行列の直交対角化の理論が必要となる。これについては、後期の通論 II で取り上げる。

二次微分の実体：二階導関数を縦横に並べたもの、対称行列と二次形式。

$$f''(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}.$$

9　高次の近似式とテイラー展開（微積分 §5、§6）

高次近似式の積分表示と誤差の評価。高位の無限小の意味。

定理 9.1 (微積分の基本公式)**.** 実数 a を含む開区間で定義された C^{n+1} 級関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x),$$
$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt, \quad |R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

と表示される。($R_n(x)$ を剰余項 *(remainder)* と呼ぶ。)

系 9.2 (テイラー近似式)**.** 実数 a を含む開区間で定義された C^{n+1} 級関数 $f(x)$ は、$x = a$ の付近で、次のように近似式表示される。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}).$$

例 9.3.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

$n = 5$ と取ると、$2.7166\cdots < e < 2.725$ がわかる。

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots < \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) = \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}.$$

問 9.1. 近似式 $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ により e の値を小数点以下 3 けたまで正確に求めるためには、n をどれだけ大きく取るべきか。

Remark 1. $e^t(1-t)^n \le (1-t)^{n-1}$ $(0 \le t \le 1,\, n \ge 1)$ から $e < \sum_{k=0}^{n} 1/k! + 1/(n \cdot n!)$ もわかる。

定理 9.4 (基本関数のテイラー展開)**.** 最初の 3 つは全ての実数 x で、あとの 2 つは $|x| < 1$ で成り立つ。なお、最後の式 の α は実数であれば何でもよい。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots, \tag{1}$$
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \tag{2}$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots, \tag{3}$$
$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots, \tag{4}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots. \tag{5}$$

例 9.5. 極限 $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ を巡って、あれこれ。

問 9.2. 極限 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - ax}{e^x - 1 - x - x^2/2}$ が存在するような実数 a を求めよ。

10　微分の意味と接平面（微積分 §10）

関数 $F(x,y,z)$ の一次近似式

$$dF \fallingdotseq F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad dF = F(a+dx, b+dy, c+dz) - F(a,b,c)$$

に現れる偏微分係数を並べたベクトル

$$F'(a,b,c) = (F_x(a,b,c), F_x(a,b,c), F_x(a,b,c)) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

が F の (a,b,c) における微分である。これはまた、F の勾配 (gradient) と言って、∇F とも書く。

$dF \fallingdotseq 0$ すなわち、F の値がほとんど変化しない微小変位 (dx,dy,dz) は、$F'(a,b,c)$ と直交する。とくに、曲面 $F(x,y,z) = h$ (一定) に接する変位は $F'(a,b,c)$ と直交し、これは、曲面上の点 (a,b,c) $(F(a,b,c) = h)$ での接平面の法線ベクトルが $F'(a,b,c)$ であることを意味する。

したがって、曲面 $F = h$ の (a,b,c) での接平面の法線方向が $F'(a,b,c)$ である。結論として、**接平面の方程式** (the equation of a tangential plane) は、

$$\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) = 0$$

となる。

例 10.1.

(i) 平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ $(F(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z,\ h = \delta)$。
(ii) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ $(F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,\ h = r^2)$。
(iii) 関数 $f(x,y)$ のグラフ $z = f(x,y)$ $(F(x,y,z) = f(x,y) - z,\ h = 0)$。

例 10.2.

(i) 平面上の点 (a,b,c) での接平面は、もとの平面そのものである。
(ii) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 上の点 (a,b,c) での接平面は、

$$a(x-a) + b(y-b) + c(z-c) = 0 \iff ax + by + cz = r^2.$$

(iii) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における平面の方程式は

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z-c) = 0.$$

最後に、$z = e^{-x^2-y^2}$ の接平面について。z 軸とのなす角など。$F'(a,b,c) = (-2ae^{-a^2-b^2}, -2be^{-a^2-b^2}, -1)$

$$2ae^{-a^2-b^2}(x-a) + 2be^{-a^2-b^2}(y-b) + z - e^{-a^2-b^2} = 0 \iff 2a(x-a) + 2b(y-b) + e^{a^2+b^2}z - 1 = 0.$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{4(a^2+b^2)e^{-2(a^2+b^2)} + 1}}, \qquad g(t) = 4te^{-2t}(t \geq 0)$$

$\cos\theta$ は、$t = a^2 + b^2 = 1/2$ で最小値 $\sqrt{e/(2+e)}$ を取る。この点は丁度 e^{-x^2} のグラフの変曲点にあたる。

11　変数の一次変換と行列の計算（線型代数 §1、§3）

変数変換のうち、純一次式で表されるものを**一次変換** (linear transformation) という。

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

これはまた $y = Ax$ のようにも書く。

このように数を縦横に並べたもの（２次元配列）を**行列** (matrix) 呼ぶ。配列の大きさを表す m, n を行列のサイズといって、$m \times n$ 行列という言い方をする。また a_{jk} を A の (j, k) 成分という。$m = n$ のときは、**正方行列** (square matrix) といい、$m = 1$ のときは、**行ベクトル** (row vector)、$n = 1$ のときは**列ベクトル** (column vector) という。このように行列については、縦横の代わり行 (row) と列 (column) という言い方をする（縦列駐車と唱える）。

上の一次変換を y の一次変換

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + \cdots + b_{1m}y_m \\ &\vdots \\ z_l &= b_{m1}y_1 + \cdots + b_{lm}y_m \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l_1} & \dots & b_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

に代入すると、x から z への一次変換

$$\begin{aligned} z_1 &= c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n \\ &\vdots \\ z_l &= c_{l1}x_1 + \cdots + c_{ln}x_n \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \dots & c_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を得る。ここに現れる C が行列 B と行列 A の積 BA である。行列の積の性質：

(i) $l \times m$ 行列と $m \times n$ 行列の積は、$l \times n$ 行列である。
(ii) 行列の積は分配法則と結合法則をみたす。
(iii) 交換法則は成り立たない。

零行列 (zero matrix) という特殊な行列がサイズごとにある。**単位行列** (unit matrix) という特殊な正方行列 I_n がサイズごとにあり、恒等変換 (indentity transformation) を表すことから、$AI_n = I_mA = A$ である。

行列の積を理解する上でまず覚えるべきは、次の内積タイプの場合である。

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1a_1 + \cdots + b_na_n$$

あとはこれの可能なくり返しを計算し規則正しく並べるだけである。

問 11.1. 次の２つの行列（ベクトル）の積を計算し、その結果を比較せよ。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

問 11.2. ２次の正方行列 A, B で、$AB \neq BA$ かつ $AB = 0$ となるものがあるかどうか調べよ。

12　一次変換のくり返しとべき行列（線型代数 §3）

正方行列のべき A^n と指数法則：$A^m A^n = A^{m+n}$.

点の移動を行列で表す（これも一次変換と呼ぶ）。A^n は移動の繰り返しを表す。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

例 12.1 (倍率変換)**.**

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix},$$

問 12.1.

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$$

を求めよ。

例 12.2 (回転の行列)**.**

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta') = R(\theta')R(\theta).$$

連立一次漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

について考える。列ベクトルの列と行列をそれぞれ

$$\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で定めると、上の漸化式は $\overrightarrow{v_{n+1}} = A\overrightarrow{v_n}$ と書けるので、等比数列の一般項の計算と同様に、

$$\overrightarrow{v_n} = A\overrightarrow{v_{n-1}} = A^2\overrightarrow{v_{n-2}} = \cdots = A^n\overrightarrow{v_0}$$

となる。すなわち、連立漸化式を解くことが行列のべき乗 A^n を求めることに帰着する。

問 12.2. 本文の例 3.7 を読んで、問 3.7 を解く。

<u>転置の操作＝縦横の入れ替え</u>

これは後の方で必要になることであり、行列のべきと直接には関係しないことであるが、この回の分量に余裕がありそうなのでここに入れておく。

行列 A の縦横を入れ替えた行列を ${}^tA$ という記号で表し、A の**転置行列** (transposed matrix) とよぶ。A のサイズを $m \times n$ とすれば、${}^tA$ のサイズは $n \times m$ となり、**転置**を 2 回繰り返すと元に戻る。

転置は、見かけの素朴さにもかかわらず、行列代数の双対性に関わる奥の深いものであるが、この段階で注目すべきは行列の積との関係で、${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$ のように振る舞う。もっともその本質は、

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ということなので、これも素朴な内容ではある。

13　連立一次方程式と行列式（線型代数 §4）

２次・３次の行列式、線型性と交代性、幾何学的意味。

２元連立一次方程式

$$\begin{cases} ax+by=s \\ cx+dy=t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

を x, y について解けば

$$x = \frac{sd-tb}{ad-bc}, \quad y = \frac{at-cs}{ad-bc}.$$

問 13.1. この表示式を導け。

この分母に共通して現れる式 $ad-bc$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**行列式** (determinant) といい、

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

などと書く（行列式の記号を絶対値と混同しないように！）。この記号を使えば、解の公式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}.$$

行列 A を縦割にして $A = (\vec{a}, \vec{b})$ と書くと、行列式 $\det(\vec{a}, \vec{b})$ は $\vec{a}, \vec{b}$ について、(i) 分配法則（線型性)、(ii) 交代性、(iii) 規格化条件が成り立つ。

一般化：

$$a_1x + b_1y + c_1z = t_1 \tag{1}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = t_2 \tag{2}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = t_3 \tag{3}$$

未知数 x を定数とみて (2), (3) を y, z について解き (1) に代入すると、

$$\left(a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right) x = t_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} t_2 & c_2 \\ t_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} t_2 & b_2 \\ t_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

この両辺には同じ形の式が現れるので、**３次行列式**を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

で定義する (１行に関する展開) 。３次行列式についても、線型性・交代性・規格化条件が成り立つ。

問 13.2. 未知数 x, y, z を３次行列式で表す公式を導け。ヒント：各列を $\vec{t} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ で置き換えた行列式を分配法則で計算。

行列式の幾何学的意味：平行４辺形の符号付き面積、平行６面体の符号付き体積。左手系と右手系。shear identity.

14　行列式の性質と計算（線型代数 §5）

４次以上の行列式。線型性、交代性、転置不変性と掃き出し計算。積の行列式。

n 次行列式を $n-1$ 次行列式に還元する形で、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2j}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nj}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と帰納的に定義する。ただし、$[a_{2j}], \dots, [a_{nj}]$ とあるのはそこの部分の削除を意味する。（１行に関する展開。）

(i) 線型性：行列式 $\det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n})$ は、各ベクトルについて分配法則が成り立つ。

(ii) 交代性：$\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ のうちの２つのベクトルを入れ替えると行列式の値は符号が反対になる。

(iii) 規格化条件：

$$\det(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

定理 14.1.

(i) 線型性・交代性は行ベクトルについても成り立つ。

(ii) 行に関する展開式、列に関する展開式が成り立つ。展開式の符号は市松模様 (chess board rule)。

(iii) 転置行列の行列式はもとの行列式に等しい。

(iv) A, B を n 次の正方行列とするとき、$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

系 14.2.

(i) 行列式の中に同じ行または列があれば、行列式の値は 0。

(ii) ある行 (列) の定数倍を他の行 (列) に加えても行列式の値は変化しない。

行列式の具体的な計算においては、行あるいは列に関する展開を行う前に、上の系 (ii) の性質を利用して、特定の行あるいは列にできるだけ多くの 0 成分を含むように加工するとよい。連立一次方程式を解く際の加減法に似ていることに注意。

例 14.3. ４行４列の計算例。途中経過を変えることで検算にも利用する。

問 14.1. **三角行列** (triangular matrix) の行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

問 14.2. $|tA| = t^n|A|$ を示せ。

並べ替えの符号と１５パズル。

15　連立一次方程式と掃き出し法（線型代数 §7）

加減法と行基本操作。階段行列と解の表示。解空間の基底。

$m \times n$ 行列 A を係数とする連立一次方程式 (a system of linear equations) とその解空間

$$A\vec{x} = \vec{0}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad S = \{\vec{x}; A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

連立１次方程式 $A\vec{x} = 0$ の解空間は、行列 A に次の３種類の操作を施しても変化しない。

(i) A の行を入れかえる。
(ii) A のいずれかの行の定数倍を別の行に加える。
(iii) A の何れかの行に 0 でない数を掛ける。

連立１次方程式の解法の基本は、この３種類の操作＝行基本変形 (elementary row operarion) を繰り返すことで、与えられた行列を**階段行列** (matrix of echelon form) に書き改めること。これを**掃き出し法**という。

問 15.1. 3 次正方行列の階段化として可能な形をすべて列挙せよ。

定理 15.1 (掃き出し定理)**.**

(i) 階段行列の段数 r（A のランクという）は、A のみで決まる。
(ii) 解空間のベクトルは、$n-r$ 個のパラメータで表される。$n-r$ を解空間の次元とよぶ。

連立一次方程式 (斉次型) の解法

例 15.2. 階段行列に対する連立一次方程式の解き方と解の一次結合による表示のさせ方を具体例で検証する。

問 15.2. 次の４次行ベクトルの一次結合を縦に並べることで、２行４列の行列を作り、計算練習を行う。また、求めた解空間の表示が正しいかどうかの検算方法についても確かめてみる。

$$(1, -1, 1, -1), \quad (0, 0, 2, 3).$$

概念の整理：サイズの等しい有限個の列ベクトル $\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_m}$ に対して、$\lambda_1\vec{x_1} + \cdots + \lambda_m\vec{x_m}$ ($\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ は実数) の形のベクトルを $\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_m}$ の**一次結合** (linear combination) という。

ベクトルの集まり $\vec{x_1}, \cdots \vec{x_m}$ は、その中のどのベクトルも残りのベクトルの一次結合で書けないとき、**一次独立** (linearly independent) であると言う。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 E で、一次結合に関して閉じているものを $\mathbb{R}^n$ の**部分空間** (subspace) という。部分空間 E の**基底** (basis) とは、E のベクトルの一次独立な列 $u_1, \cdots, u_m$ で、$u_1, \cdots, u_m$ の一次結合（で表されるベクトル）全体が E に一致するものをいう。

１次元部分空間 $\{\lambda\vec{x}; \lambda \in \mathbb{R}\}$、２次元部分空間 $\{\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$。

16　逆行列と行列式（線型代数 §8）

逆行列と積。行列代数の基本定理。

$n \times n$ 行列 A に対して

$$AB = BA = I_n$$

となる $n \times n$ 行列 B を A の**逆行列** (inverse matrix) という。A の逆行列は、あっても一つしかなく A だけで決まるので A^{-1} と書く。

例 16.1. 連立一次方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ の係数行列 A が逆をもてば、連立一次方程式の解は一つしかなく、$\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$ で与えられる。

例 16.2.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

命題 16.3. 逆行列について、以下が成り立つ。

(i) 逆行列の逆行列：$(A^{-1})^{-1} = A$.
(ii) 積の逆行列：$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(iii) 転置と逆行列：${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

問 16.1. n 次正方行列 A が逆をもつとき、A の負べきを $A^{-k} = (A^{-1})^k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ で定め、$A^0 = I_n$ とおくと、指数法則 $A^kA^l = A^{k+l}$ がすべての整数 k, l について成り立つ。

定理 16.4 (行列代数の基本定理)**.** $n \times n$ 行列 A について、次は同値。

(i) A は逆行列をもつ。
(ii) $|A| \neq 0$.
(iii) 行列 A の縦割りを $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ とすると、$\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ は一次独立。
(iv) 行列 A のランクは n。

４つの中で見かけ上強い条件はどれか。

系 16.5. n 次正方行列 A が逆行列をもつための条件は、さらに次のように言い換えられる。

(i) 勝手な列ベクトルが、行列 A の列ベクトルを並べたもの $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ の一次結合で書ける。
(ii) $AB = I_n$ となる正方行列 B が存在する。
(iii) $BA = I_n$ となる正方行列 B が存在する。

問 16.2. 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

が逆行列をもたないような t をすべて求めよ。

例 16.6. 一次変換と逆変換。

17　固有値と固有ベクトル（線型代数 §10）

基底と行列の対角化。用語の意味と使用例。

正方行列 D で次の形のものを**対角行列** (diagonal matrix) という。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \text{\huge 0} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ \text{\huge 0} & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

与えられた $n \times n$ 行列 A に対して、逆をもつ $n \times n$ 行列 T をうまく選んで $T^{-1}AT$ が対角行列となるようにする操作を行列の**対角化** (diagonalization) と呼ぶ。対角化の直接の御利益は冪の計算が簡単になること。

問 17.1. 対角行列どうしの積が成分ごとの積に一致することを確認。

対角化の行列を見つけるために、T を縦割りにして $T = (\overrightarrow{x_1}, \ldots \overrightarrow{x_n})$ と表すと、$AT = TD$ という関係は

$$A\overrightarrow{x_j} = \lambda_j \overrightarrow{x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

となる。そこで、行列 A に対して、ベクトル $\overrightarrow{x} \neq 0$ が $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ なる関係をみたすとき、$\overrightarrow{x}$ を**固有値** (eigenvalue) λ の**固有ベクトル** (eigenvector) ということにすれば、A の対角化とは、A の固有ベクトルからなる基底を見出すことに他ならない。

定理 17.1. 行列 A の固有値 λ は、方程式（固有方程式という）

$$|tI_n - A| = 0$$

の解である（左辺を固有多項式という）。

例 17.2.

$$\left| t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} = t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

対角化の手続き

ステップ１　固有方程式を解くことにより、固有値を求める。
ステップ２　固有値ごとに固有ベクトルを求める。掃き出し法が有効。
ステップ３　固有ベクトルからなる基底を作る。

Remark 2. 固有値が複素数になることがよく起こる。固有ベクトルが不足して基底が作れないことがたまに起こる。

問 17.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。また、$a = 1, b = 2, c = -2$ のとき、固有ベクトルを求めよ。

18　内積の幾何学（線型代数 §13）

多変量（数ベクトル）と内積。データの間の距離と角度。相関係数の意味と性質。
内積 (inner product) とベクトルの大きさ（長さ）、

$$(x|y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad \|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}.$$

内積の性質：対称性 $(x|y) = (y|x)$、分配法則、正定値性 $(x|x) > 0$ $(x \neq 0)$、等質性 $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{R})$。

一般に、部分空間 $E \subset \mathbb{R}^n$ のベクトル $v, v' \in E$ に対して実数 $\langle v|v' \rangle$ が定められ、(i) 対称性、(ii) 分配法則、(iii) 正値性 $\langle v|v \rangle \geq 0$ $(v \in E)$ をみたすものを E 上の**半内積** (semi inner product) という。

半内積の不等式（コーシー・シュワルツ）：$x, y \in E$ に対して、

$$|\langle x|y \rangle|^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$$

とくに内積に関連して、ベクトル $x \neq 0$ と $y \neq 0$ の成す角 θ を

$$\cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

で定める。また、$(x|y) = 0$ のとき**直交**する (orthogonal) といい、$x \perp y$ と書く。便宜上、零ベクトルは、あらゆるベクトルに直交すると約束する。内積の不等式から三角不等式：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

例 18.1. ベクトル $x(j)$ $(1 \leq j \leq r)$ に対して、$\sum_j \|x - x(j)\|^2$ を最小にする x を求める。

問 18.1. すべての x_j が単位ベクトルのとき、二乗和の最小値が最大になるような x_j の配列について調べよ。

n 個の組データ $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ について考える。血圧と体重、数学の成績と英語の成績、など。この**散布図** (scatter plot) とは、xy 平面上に n 個の点を図示したもの。右上がりと右下がりの雲。

x_i, y_i の**平均値** (mean)・**分散** (variance)・**標準偏差** (standard deviation)

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i, \quad V_x = \frac{1}{n}(x_i - \overline{x})^2,\ V_y = \frac{1}{n}(y_i - \overline{y})^2, \quad \sigma_x = \sqrt{V_x},\ \sigma_y = \sqrt{V_y}$$

x_i, $\overline{x}$, σ_x は同じ単位（次元）をもつ量。**共分散** (covariance)

$$V_{x,y} = \frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

と**相関係数** (correlation coefficient)

$$\rho_{x,y} = \frac{V_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

相関係数は、単位のつかない量（比）であることに注意。

偏差ベクトル $\xi = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_i - \overline{x})$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{n}}(y_i - \overline{y})$ を使うと、

$$-1 \leq \rho_{x,y} = \frac{(\xi|\eta)}{\|\xi\|\,\|\eta\|} \leq 1.$$

$\rho_{x,y}$ が 1 に近いほど、正の相関が強い（高い）、-1 に近いほど、負の相関が強い（高い）、といったいい方をする。x, y のデータの増減が同調する傾向の強さを表す。

問 18.2. $\rho_{x,y} = 0$ のとき、x と y は相関がない（無関係）と言ってよいか。

19　正規直交基底と直交行列（線型代数 §13、§14）

直交分解と直交基底。

ベクトルの集まり $M \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathbb{R}^n$ のベクトルで M のすべてのベクトルと直交するもの全体を $M^\perp$ で表す。$M^\perp$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

例 19.1. $M = \{\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_m}\}$ のとき、$M^\perp$ は、連立一次方程式 $Ax = 0$ の解空間に他ならない。ただし、$A = {}^t(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_m})$ である。

$\mathbb{R}^n$ のベクトルの集まり $u_1, \cdots, u_m$ で $(u_j|u_k) = \delta_{j,k}$ となるものを**正規直交系** (orthonomal system) という。部分空間 E のベクトルからなる正規直交系 $u_1, \cdots, u_m$ で、E のすべてのベクトルが $u_1, \cdots, u_m$ の一次結合で書けるものを E の**正規直交基底** (orthonormal basis) という。正規直交基底は存在し (Gram-Schmidt)、それを構成するベクトルの個数 m は一定（E の次元という）である。

問 19.1. $\mathbb{R}^3$ で、単位ベクトル $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ を含む正規直交基底を沢山作れ。

定理 19.2 (直交分解)**.** $\mathbb{R}^n$ の部分空間 E に対して、$\mathbb{R}^n$ のベクトルは、E のベクトルと $E^\perp$ のベクトルの和として表され、しかもその表し方は一つしかない。このことを $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$ と書く。

Proof. E の正規直交基底 $u_1, \cdots, u_m$ を用意する。もし $x \in \mathbb{R}^n$ が $x = \sum \lambda_j u_j + x_\perp$ $(\lambda_j \in \mathbb{R},\, x_\perp \in E^\perp)$ のように表されたとすると、

$$\lambda_j = (u_j | \sum_i \lambda_i u_i) = (u_j|x)$$

であるから $\sum_i \lambda_i u_i = \sum_i (u_i|x) u_i$ および $x_\perp = x - \sum (u_i|x) u_i$ は、x で決まる。逆に、$x \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$x_\parallel = \sum_{j=1}^m (u_j|x) u_j, \quad x_\perp = x - \sum_{j=1}^m (u_j|x) u_j$$

とおくと、$x_\parallel \in E$, $x_\perp \in E^\perp$ であり、$x = x_\parallel + x_\perp$。 □

系 19.3. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 E に対して、$(E^\perp)^\perp = E$ である。

$\mathbb{R}^n$ のベクトルの集まり $u_1, \cdots, u_m$ に対して、$T = (u_1, \cdots, u_m)$ とおくと、${}^tTT = ((u_i|u_j))_{1 \leq i,j \leq m}$ であることから、$u_1, \cdots, u_m$ が正規直交系であることと ${}^tTT = I_m$ が同値。とくに $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $u_1, \cdots, u_n$ を並べた正方行列 T は ${}^tTT = I_n$ をみたす。このような行列を**直交行列** (orthogonal matrix) と呼ぶ。直交行列は逆行列をもち、${}^tT = T^{-1}$ である。

標準基底 $e_1, \cdots, e_n$ との関係：$x_1 e_1 + \cdots x_n e_n = x'_1 u_1 + \cdots + u'_n u_n$ と行列で書けば、$\overrightarrow{x} = T\overrightarrow{x'} \iff \overrightarrow{x'} = {}^tT\overrightarrow{x}$ という座標変換式を得る。

例 19.4. 回転と折り返し。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

問 19.2. 2 次の直交行列は上の 2 つに限ることを示せ。

20　対称行列の対角化（線型代数 §15、付録 E）

対称行列と二次形式。二次式の標準形と対称行列の直交対角化。基底の取り換えと直交対角化。

ベクトル $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の純二次式

$$Q(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$$

を x の**二次形式** (quadratic form) という。ここで、$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ は**対称行列**を表す。逆に対称行列 A から二次形式 Q が $Q(x) = (x|Ax) = {}^t xAx$ によって定められる。$2(x|Ay) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ に注意。

例 20.1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ のとき、$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

定理 20.2 (二次形式の標準形)**.** 二次形式 Q に対して、$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $u_1, \cdots, u_n$ を適切に選ぶことで、$Q(s_1u_1 + \cdots + s_nu_n) = \alpha_1(s_1)^2 + \cdots + \alpha_n(s_n)^2$ $(s_1, \cdots, s_n \in \mathbb{R})$ と表示できる。

Proof. $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトル全体を $S = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 = 1$ と書き、$n-1$ 次元球面と呼ぶ。$u_1, u_2, \cdots$ を順繰り作っていこう。

関数 $S \ni x \mapsto Q(x)$ の最小値[*1]を α_1 とし、それを実現する単位ベクトルを $\overrightarrow{u_1} \in \mathbb{R}^n$ とする。ここで $\langle x|x' \rangle = (x|Ax') - \alpha_1(x|x')$ とおけば、$\langle\ |\ \rangle$ は半内積となり、不等式 $|\langle x|x' \rangle|^2 \leq \langle x|x \rangle \langle x'|x' \rangle$ が成り立つ。そこで $\langle u_1|u_1 \rangle = 0$ に注意すれば、

$$\langle x|u_1 \rangle = 0\ (x \in \mathbb{R}^n) \iff (x|Au_1) = \alpha_1(x|u_1)\ (x \in \mathbb{R}^n) \iff Au_1 = \alpha_1 u_1.$$

すなわち、u_1 は固有値を α_1 とする A の固有ベクトルである。

次に部分空間 $\{u_1\}^\perp$ を考え、関数 $S \cap \{u_1\}^\perp \ni x \mapsto Q(x)$ の最小値を α_2 とし、それを実現する単位ベクトルを $u_2 \in \{u_1\}^\perp$ とする。そうして今度は、E 上の半内積 $\langle x|x' \rangle = (x|Ax') - \alpha_2(x|x')$ に上の議論を適用すれば、$Au_2 = \alpha_2 u_2$ がわかる。

以下、部分空間を $\{u_1, u_2\}^\perp$ に替えて同じ論法を繰り返せば、A の固有ベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が順次見つかる。さらに、$u_j \in \{u_1, \cdots, u_{j-1}\}^\perp$ であるから、$u_1, \cdots, u_n$ は互いに直交し、$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となる。最後に、

$$\begin{aligned} Q(s_1u_1 \cdots + s_nu_n) &= (s_1u_1 \cdots + s_nu_n | A(s_1u_1 \cdots + s_nu_n)) \\ &= (s_1u_1 \cdots + s_nu_n | \alpha_1 s_1 u_1 \cdots + \alpha_n s_n u_n) \\ &= \alpha_1(s_1)^2 + \cdots + \alpha_n(s_n)^2 \end{aligned}$$

と計算することで、標準形を得る。 □

例 20.3. $(\mathbb{R}^2)_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta); \theta \in \mathbb{R}\}$ であるから、α_1 は、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos(2\theta) + b\sin(2\theta)$$

[*1] 最小値（最大値も）が存在することは、Bolzano の「追い込み」論法による。

の最小値として、

$$\alpha_1 = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{q-c}{2}\right)^2 + b^2}$$

である。少し計算すれば、α_2 は α_1 の右辺のマイナスをプラスに変えたものであることもわかる。

直交行列を $T = (u_1, \cdots, u_n)$ で定め、${}^tT = T^{-1}$ と $2(x|Ay) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ に注意して二次形式の標準形を書き直すと、次がわかる。

定理 20.4 (直交対角化)**.** 対称行列 A に対して、直交行列 T を適切に選ぶことで、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とできる。ここで、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は二次形式の標準形で現れた係数であり、A の固有値に一致する。とくに A の固有値はすべて実数である。

例 20.5. 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

の固有値を求め、A に伴う二次形式

$$Q(x,y,z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz$$

が $(x,y,z) = (0,0,0)$ で極値をもつかどうか調べる。