LA 2017/12/22

問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$ 実数 $0 < \theta < \pi/2$ をパラメータにもつエルミート行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -i\sin 2\theta \\ i\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

(i) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(ii) 行列 A をユニタリー行列により対角化せよ。

(i) A の固有多項式が

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t - \cos 2\theta & i\sin 2\theta \\ -i\sin 2\theta & t + \cos 2\theta \end{vmatrix} = t^2 - 1$$

であるから、固有値は $t = \pm 1$ で、その固有ベクトルは、倍角公式を利用して

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を解くと、

$$A\begin{pmatrix} i\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} i\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} i\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) 上で求めた 2 つの固有ベクトルは内積に関して直交していて大きさが 1 であるから、ユニタリー行列を

$$U = \begin{pmatrix} i\cos\theta & i\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で定めると、

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のように対角化される。

$\boxed{2}$

(i) $\mathbb{R}^n$ の部分空間について説明せよ。

(ii) V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき、V の正規直交基底の定義を述べよ。

(iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示し、その正規直交基底を一組求めよ。

(i), (ii) と (iii) の部分空間の確認は、定義をチェックするだけであるから略。

W は、連立一次方程式 $x+y+z=0$ の解空間であるから、$z=-x-y$ により W のベクトルの一般形は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。（この形からも W が部分空間であるとわかる。）そこで、W の基底

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に直交化を施して、$f_1 = w_1$,

$$f_2 = w_2 - \frac{(f_1|w_2)}{(f_1|f_1)} f_1 = w_2 - \frac{(w_1|w_2)}{(w_1|w_1)} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

W の直交基底 f_1, f_2 を単位ベクトル化して、次の正規直交基底を得る。

$$e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$