LA 2017/12/1

$\boxed{1}$ 3次対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

(i) A の固有値を求めよ。

(ii) 固有値ごとに固有ベクトルを求めよ。

(iii) 行列 A を直交行列により対角化せよ。

(i) A の固有多項式が

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t(t^2-1) - t = t(t^2-2)$$

であるから、固有値は $t = 0$, $t = \pm\sqrt{2}$。

(ii) 固有値 0: 固有方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解くと、$y = 0$, $x = z$ となるので、固有ベクトルは

$$z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \neq 0.$$

固有値 $\pm\sqrt{2}$: 固有方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm\sqrt{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を解くと、$x = \pm y/\sqrt{2} = -z$ となるので、固有ベクトルは

$$\frac{y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \sqrt{2} \\ \mp 1 \end{pmatrix}, \quad y \neq 0.$$

(iii) (ii) で求めた固有ベクトルは、$z = \sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$ とおくと単位ベクトルになり、異なる固有値の固有ベクトルであることから互いに直交する。したがって、それらを並べ

て得られる直交行列

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

により、A は

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

のように対角化される。

$\boxed{2}$

(i) 行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

が対角行列となるように実数 $0 < \theta < \pi/2$ を定め、その対角行列を求めよ。

(ii) 方程式 $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 8$ の表す平面図形を図示せよ。

(i) 倍角の公式を使って行列の積を計算すると、

$$\begin{pmatrix} 6 - \cos(2\theta) + \sqrt{3}\sin(2\theta) & \sqrt{3}\cos(2\theta) + \sin(2\theta) \\ \sqrt{3}\cos(2\theta) + \sin(2\theta) & 6 + \cos(2\theta) - \sqrt{3}\sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

となるので、$\sqrt{3}\cos(2\theta) + \sin(2\theta) = 0 \iff \tan(2\theta) = -\sqrt{3}$ より $\theta = \pi/3$ である。このとき、$\cos(2\theta) = -1/2, \sin(2\theta) = \sqrt{3}/2$ を代入して、求める対角行列は、$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$。

(ii) xy 平面で座標軸を反時計回りに角 θ 回転させて得られる座標を (X, Y) で表せば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

であり、$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2$ は

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と表されるので、$\theta = \pi/3$ のときにこれを計算すると、$8X^2 + 4Y^2$ となる。したがって、

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 8 \iff X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 1$$

となるので、X 軸を短軸、Y 軸を長軸とし、$(X, Y) = (\pm 1, 0)$ と $(X, Y) = (0, \pm\sqrt{2})$ を通る楕円を表す。図は省略。