LA 2017/10/27

$\boxed{1}$ 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の $a$ に学生番号の末尾の数字を代入し、以下の問に答えよ。

(i) $A$ の固有多項式および固有値を求めよ。

(ii) 固有値ごとに固有ベクトルを求めよ。

(iii) 行列 $A$ の対角化を実行せよ。($T^{-1}AT = D$ となる $D$ と $T$ を求める。)

(i) $A$ の固有多項式は

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t & 1 & -a \\ -1 & t & -1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = (t-2)(t^2+1)$$

と計算されるので、その固有値は $t = 2$, $t = \pm i$ である。

(ii) 固有値 $t = 2$ の固有ベクトルは、連立一次方程式

$$0 = (tI_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を解いて、$x = \frac{2a-1}{5}z$, $y = \frac{a+2}{5}z$ より、$\begin{pmatrix} 2a-1 \\ a+2 \\ 5 \end{pmatrix}$ に比例する。

(ii) $t = \pm i$ の固有ベクトルは、連立一次方程式

$$0 = (tI_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm i & 1 & -a \\ -1 & \pm i & -1 \\ 0 & 0 & \pm i - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を解いて、$y = \mp ix$, $z = 0$ より、$\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix}$ に比例する。

(iii) (ii) より、

$$T = \begin{pmatrix} 2a-1 & 1 & 1 \\ a+2 & -i & i \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と置けば、$AT = T\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ であり、さらに異なる固有値に対する固有ベクトルを並べた $T$ は逆行列を持つので、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

が $A$ の対角化を与える。

$\boxed{2}$ 2次正方行列

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\omega^2 - 1 & \omega^2 - 1 \\ \omega^2 - 1 & -\omega^2 - 1 \end{pmatrix}$$

（$\omega$ は正定数）について、以下の問に答えよ。

(i) $B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(ii) 微分方程式 $\dfrac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の一般解を、(i) で求めた固有ベクトルの一次結合の形で表わせ。

(iii) 初期条件 $x(0) = y(0) = \dfrac{dy}{dt}(0) = 0$ を満たす (ii) の解に対して、$\dfrac{y(t)}{x(t)}$ を具体的に求めよ。

(i) $B$ の固有多項式を計算すると、

$$\det(tI_2 - B) = \begin{vmatrix} t + \frac{\omega^2+1}{2} & \frac{1-\omega^2}{2} \\ \frac{1-\omega^2}{2} & t + \frac{\omega^2+1}{2} \end{vmatrix} = \left(t + \frac{\omega^2+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\omega^2}{2}\right)^2 = (t+1)(t+\omega^2)$$

であるから、固有値は $t = -1$ と $t = -\omega^2$ であり、それぞれの固有ベクトルを求めると、

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

のようになる。

(ii) $t$ の関数 $f(t)$, $g(t)$ を使って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + g(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表せば、

$$f''(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + g''(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f(t)B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + g(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \omega^2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となるので、係数を比較して、微分方程式

$$f''(t) = -f(t), \quad g''(t) = -\omega^2 g(t)$$

を得る。その一般解は $f(t) = a\cos t + b\sin t,\ g(t) = u\cos\omega t + v\sin\omega t$ のようになるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a\cos t + b\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (u\cos\omega t + v\sin\omega t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) 初期条件を

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff a = u = 0$$

$$0 = y'(0) = b - v\omega$$

のように言い換えると、$x(t) = v(\omega\sin t + \sin\omega t),\ y(t) = v(\omega\sin t - \sin\omega t)$ が分かるので、

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\omega\sin t - \sin\omega t}{\omega\sin t + \sin\omega t}.$$

**コメント** (1) 固有ベクトルを求めるための連立一次方程式は、掃き出し法を使って、

$$2I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように階段行列に変形するのが定石であるが、変数の数が少ないとか、方程式の形が特殊である（対称性がある）場合とかは、直接方程式を解いて見ても良い。

(2) 固有ベクトルを求めた後は、

$$A\begin{pmatrix} 2a-1 \\ a+2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を計算し、それが固有値倍に一致するか確かめて見るのは良い検算方法である。こういうことを言われなくても実行する人は、見どころがあるか。当たり前のことなんだが。

(3) ばね定数の形で書けば、$a = c = 1,\ b = (\omega^2 - 1)/2$ となる。この場合は、$\omega > 1$ という制限がつく。初期条件の意味は、質点が静止している状態から左の方を弾いた場合の運動を表す。この単純なモデルでは、右の方もすぐに動き出すのであるが、それぞれの変位の比を表す式を求めてみようというのが (iii) の問題。経過時間 $t$ が小さければ、

$$\frac{y}{x} = \frac{\omega(t - t^3/6 + \cdots) - (\omega t - (\omega t)^3/6 + \cdots)}{\omega(t - t^3/6 + \cdots) + (\omega t - (\omega t)^3/6 + \cdots)} \approx \frac{\omega^2 - 1}{12}t^2 = \frac{b}{6}t^2$$

のように２次関数的に大きくなっていくことが、こういった具体的な表式からわかる。