LA 2016/7/29

$\boxed{1}$ 3次行列式の幾何学的意味を説明せよ。また、それを利用して解く問題を一題作れ。(解答は不要。)

[解] については、テキスト参照。

$\boxed{2}$ 未知数 x_1, x_2, x_3, x_4 についての連立一次方程式

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 7x_2 + 2x_3 + 9x_4 &= 0 \\ x_1 + ax_3 + bx_4 &= 0 \end{aligned}$$

の解空間が2次元となるように定数 a, b を定め、解空間の基底を一組求めよ。

[解]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1-2a & 6-2b \end{pmatrix}$$

の段数が $4-2=2$ となれば良いので、$a = 1/2$, $b = 3$ であり、このとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を x_1, x_2 について解けば、$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - 3x_4$, $x_2 = -\frac{2}{7}x_3 - \frac{9}{7}x_4$ である。したがって、解の一般形は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3/2 - 3x_4 \\ -2x_3/7 - 9x_4/7 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{14} \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{7} \begin{pmatrix} -21 \\ -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

のようになり、解空間の基底の一つとして

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -21 \\ -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

を得る。

$\boxed{3}$ パラメータ c を含んだ行列の積

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -c\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 7 & 2 & 9\\ 5 & c & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & c & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

が逆行列をもつかどうか調べよ。

[解] 逆行列をもつことと行列式の値が 0 でないことが同値なので、（正方行列の）積の行列式が行列式の積に一致することに注意して、

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -c\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1 & 6\\ 7 & 2 & 9\\ 5 & c & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & c & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = -c\begin{vmatrix}2 & 1 & 6\\ 7 & 2 & 9\\ 5 & c & 3\end{vmatrix} = -c\begin{vmatrix}2 & 1 & 6\\ 3 & 0 & -3\\ 5-2c & 0 & 3-6c\end{vmatrix}$$
$$= c\begin{vmatrix}3 & -3\\ 5-2c & 3-6c\end{vmatrix} = c\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5-2c & 8-8c\end{vmatrix} = 24(1-c)c$$

と計算すれば、$c \neq 0$ かつ $c \neq 1$ のとき逆行列をもち、そうでなければ逆行列をもたないことがわかる。

$\boxed{4}$ 誤りを伴った伝言のくり返しによる情報の変化の様子を記述するために、次のようなモデルを考える。

伝言の内容は T か F の 2 種類とし、T という伝言を受け取ったとき F を次に伝えてしまう確率が f, F という伝言を受け取ったとき T を次に伝えてしまう確率が t である。誤りを伴うように $f+t \neq 0$ とする。また、n 回目に伝言された内容が T である確率を p_n、F である確率を q_n とする。（$p_n + q_n = 1$ に注意。）

(i) n に依らない 2×2 行列 C で $\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}p_{n-1}\\ q_{n-1}\end{pmatrix}$ となるものを求めよ。

(ii) 行列 C の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(iii) 初期の確率を $p_0 = p$, $q_0 = 1-p$ とするとき、p_n を f, t, p, n の式で表わせ。また、極限 $\lim_{n\to\infty} p_n$ の様子について調べよ。

[解] (i) $p_n = (1-f)p_{n-1} + tq_{n-1}$, $q_n = fp_{n-1} + (1-t)q_{n-1}$ であるから、

$$C = \begin{pmatrix}1-f & t\\ f & 1-t\end{pmatrix}.$$

(ii) 固有値は、

$$0 = |C-\lambda I_2| = (1-\lambda-f)(1-\lambda-t)-ft = (1-\lambda)^2-(f+t)(1-\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda-f-t)$$

より、$\lambda = 1$ または $\lambda = 1 - f - t$ である。固有ベクトルは、$C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\lambda = 1, \lambda = 1 - f - t$ に対して解くことで、

$$C \begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix}, \qquad C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 - f - t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) 初期ベクトルを (ii) で求めた固有ベクトルの一次結合で表せば、

$$\begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = \frac{1}{f + t} \begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix} + (p - \frac{t}{f + t}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{f + t} C^n \begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix} + (p - \frac{t}{f + t}) C^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{f + t} \begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix} + (p - \frac{t}{f + t})(1 - f - t)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

とくに、

$$p_n = \frac{t}{f + t} + \left(p - \frac{t}{f + t} \right) (1 - f - t)^n.$$

したがって、$f + t \neq 2 \iff |1 - f - t| < 1$ であれば、p_n は速やかに $t/(f + t)$ に近づく。また、$f + t = 2 \iff f = t = 1$ のときは大嘘つきの場合で、

$$p_n = \frac{1}{2} + (p - \frac{1}{2})(-1)^n = \begin{cases} p & (n \text{ が偶数}) \\ 1 - p & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

のように振動する。