LA 2016/7/1

問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$ a に学生番号の末尾の数字を代入し、次の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 11 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

とするとき、連立一次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間の基底を一組求めよ。

[解] 適宜行の入替えを行って階段行列に変形し、パラメータとすべき変数を定め、残りの変数について解く。その結果、次の形の基底が得られる。（解空間は２次元なので、ベクトルを２つ並べたものが一組の基底となる。）

$$\begin{pmatrix} a-1 \\ a+9 \\ -2a-10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$

(i) 次の行列を階段行列に直せ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & c \end{pmatrix}.$$

(ii) 連立一次方程式

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1, \\ 2x + y - z &= -2, \\ x + 5y - 5z &= c \end{aligned}$$

の解が存在するように定数 c の値を定めよ。

[解] (i) 素直に掃き出し計算を行うだけである。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & -6 & c-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & c+7 \end{pmatrix}$$

(ii) 解が存在するのは、(i) で求めた階段行列の最後の列に新たな段差が生じないときなので、$c + 7 = 0$ すなわち、$c = -7$ である。