$\boxed{1}$ 座標空間に関連した以下の問に答えよ。

(i) 一次方程式 $\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0$ の幾何学的意味を述べよ。（事実を述べるだけでよい。）

(ii) 連立一次方程式 $x+2y+3z=-1$, $3x+2y+z=1$ が定める直線 L のベクトル表示を求めよ。

(iii) (ii) で求めた直線に沿って光が平面 $x=y$ にぶつかるときの入射角 (the angle of incidence) θ を求めよ。

(i) 点 (a,b,c) を通り、ベクトル (α,β,γ) と直交する平面を表す。

(ii) 例えば、y,z について解けば、$y=-2x+1$, $z=x-1$ となるので、$x=t$ をパラメータとして、L 上の点 (x,y,z) は、

$$(x,y,z)=t(1,-2,1)+(0,1,-1)$$

と表される。（他の表し方も可能。）

(iii) 光の方向ベクトルが $(1,-2,1)$ で平面 $x-y=0$ の法線ベクトルが $(1,-1,0)$ であるから、

$$\cos\theta=\frac{(1,-2,1)\cdot(1,-1,0)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{1+(-2)(-1)}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となり、$\theta=\dfrac{\pi}{6}=30^\circ$ がわかる。

$\boxed{2}$ 行列

$$A=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&-1\end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

(i) A を具体的に求めよ。

(ii) $A^2=\alpha A$ となるスカラー α を求めよ。

(iii) A^n $(n=2,3,\dots)$ を求めよ。

(i) 行列の積の定義に従って計算すると

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

で、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 3 \times (-1) + (-1) \times 2 = -3$$

に注意すれば、$A^2 = -3A$ となり、$\alpha = -3$ である。

(iii) (ii) の結果をくり返し使えば、$A^3 = -3A^2 = (-3)^2 A$, $A^4 = (-3)^2 A^2 = (-3)^3 A$ と計算できるので、

$$A^n = (-3)^{n-1} A = (-3)^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

コメント (iii) の設問を「A^n の $(3,2)$ 成分を求めよ。」のようにすると、より難しくなる。具体的であれば易しいとは限らないという教訓。