LA 2016/12/15

問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$ 閉区間 $[-1, 1]$ 上の実数値連続関数の作るベクトル空間 V に内積を

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

で定める。V に含まれる関数 $f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2\ (-1 \leq t \leq 1)$ にグラム・シュミットの直交化を適用して得られる正規直交系 e_0, e_1, e_2 を具体的に求めよ。

グラム・シュミットの直交化を施したものを g_0, g_1, g_2 と置けば、

$$g_0 = f_0, \quad g_1 = f_1 - \frac{(g_0|f_1)}{(g_0|g_0)}g_0, \quad g_2 = f_2 - \frac{(g_0|f_2)}{(g_0|g_0)}g_0 - \frac{(g_1|f_2)}{(g_1|g_1)}g_1$$

である。そこで、

$$(g_0|g_0) = (f_0|f_0) = \int_{-1}^{1} dt = 2, \quad (g_0|f_1) = (f_0|f_1) = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0$$

より、$g_1 = f_1 = t$。さらに、

$$(g_1|g_1) = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}, \quad (g_0|f_2) = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}, \quad (g_1|f_2) = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$$

より、$g_2 = t^2 - \dfrac{1}{3}$ である。最後に $e_j = g_j/\|g_j\|$ および

$$(g_2|g_2) = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = 2\int_{0}^{1} \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right) dt = \frac{8}{45}$$

より、

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad e_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{10}}{4}(3t^2 - 1).$$

$\boxed{2}$ 内積空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 2z = 0 \right\}$、その直交補空間 $W^\perp$ およびベクトル $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ について、以下の問に答えよ。

(i) v の $W^{\perp}$ への正射影を求めよ。

(ii) v の W への正射影を求めよ。

(i) $W^{\perp} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるから、$W^{\perp}$ の正規直交基底として $e = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ と取ると、v の $W^{\perp}$ への正射影は、

$$(e|v)e = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) v の W への正射影は、直交分解 $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}$ と (i) を利用して、

$$v - (e|v)e = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}.$$