LA 2016/11/24

$\boxed{1}$ 複素数を係数とする t の多項式 $p(t)$ で次数が２以下のもの全体の集合 V を、多項式についての和と定数倍により、ベクトル空間と思う。

(i) $(1, t, t^2)$ が V の基底であることを示せ。

(ii) 線型作用素 $\phi : V \to V$ を、$\phi(p(t)) = p(t+i)$ で定めるとき、基底 $(1, t, t^2)$ に関する ϕ の行列表示を求めよ。

(i) ２次以下の多項式は $1, t, t^2$ の一次結合で表され、$a + bt + ct^2 = 0 \iff a = b = c = 0$ であることから、$(1, t, t^2)$ は V の基底である。

(ii) $\phi(a + bt + ct^2) = a + b(t+i) + c(t+i)^2$ であるから、

$$\phi(1, t, t^2) = (1, t+i, t^2 + 2it - 1) = (1, t, t^2) \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が求める行列表示である。

$\boxed{2}$ 形式的べき級数の作るベクトル空間 $\mathbb{C}[[t]]$ における線型作用素 D を

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} t^k$$

で定める。

(i) $\ker D^2$ を求めよ。

(ii) 複素数 λ に対して、$\ker(D - \lambda I)$ を求めよ。

(i) $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ に対して、

$$D^2 f = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} t^k = 2c_2 + 6c_3 t + 12 c_4 t^2 + \cdot$$

であるから、$D^2 f = 0 \iff c_l = 0\ (l \geq 2) \iff f(t) = c_0 + c_1 t$ より、$\ker D^2 = \langle 1, t \rangle$ となる。

(ii)

$$(D - \lambda I) f = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1) c_{k+1} - \lambda c_k) t^k$$

であるから、

$$f \in \ker(D - \lambda I) \iff (k+1) c_{k+1} = \lambda c_k\ (k \geq 0) \iff (k+1)! c_{k+1} = \lambda k! c_k\ (k \geq 0)$$

より、$k! c_k = c_0 \lambda^k$ となるので、$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$ とおくと、$\ker(D - \lambda I) = \mathbb{C} e^{\lambda t}$ がわかる。