LA 2016/10/20

$\boxed{1}$ 複素数を成分とする 3×4 行列

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1+i & 1 & 1+i\\ 2 & 1 & i & 3i\\ 3 & 3+i & 1 & 1+3i\end{pmatrix}\quad (i \text{ は虚数単位を表す})$$

について、

(i) 行に関する操作により A を階段行列に変形せよ。

(ii) A の像 $A\mathbb{C}^4$ の基底を一組求めよ。

(i) 行基本変形により、簡約階段行列を求めると（途中の計算は色々な方法があるので略)、

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & i & 2i\\ 0 & 1 & -i & -i\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となる。

(ii) (i) より、A の 1 列目と 2 列目を並べた

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1+i\\1\\3+i\end{pmatrix}$$

が像 $A\mathbb{C}^4$ の基底である。（基底そのものは、他にもいろいろな取り方がある。）

$\boxed{2}$ 実数列の作るベクトル空間を $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ で表し、漸化式 $x_{n+2}-x_{n+1}+2x_n=0$ $(n=0,1,\cdots)$ を満たす実数列 $(x_k)_{k\geq 0}$ 全体の集合を V とする。

(i) V は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の部分空間であることを示せ。

(ii) V は有限次元であることを示し、その次元を求めよ。

(i) 実数列 $(x_k)_{k\geq 0}$, $(y_k)_{k\geq 0}$ が漸化式を満たせば、

$$\begin{aligned}(x_{n+2}+y_{n+2})-(x_{n+1}+y_{n+1})+2(x_n+y_n) &= (x_{n+2}-x_{n+1}+2x_n)+(y_{n+2}-y_{n+1}+2y_n)\\ &= 0+0=0\end{aligned}$$

および

$$\lambda x_{n+2}-\lambda x_{n+1}+2\lambda x_n=\lambda(x_{n+2}-x_{n+1}+2x_n)=0$$

より、$(x_k + y_k)_{k\geq 0}$, $(\lambda x_k)_{k\geq 0}$ も同じ漸化式を満たす。

(ii) 初期値 $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ で定まる数列 $(a_k)_{k\geq 0}$ と、初期値 $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ で定まる数列 $(b_k)_{k\geq 0}$ を考えると、初期値 $x_0 = \alpha$, $x_1 = \beta$ で定められる数列 $(x_k)_{k\geq 0}$ は、

$$(x_k) = \alpha(a_k) + \beta(b_k) = (\alpha a_k + \beta b_k)$$

と表されるので、V は有限次元であり、さらに $\alpha(a_k) + \beta(b_k) = (0)$ を仮定すると、

$$0 = \alpha a_0 + \beta b_0 = \alpha, \quad 0 = \alpha a_1 + \beta b_1 = \beta$$

であることから、(a_k), (b_k) は一次独立となる。したがって、(a_k), (b_k) は V の基底となり、$\dim V = 2$。