行列代数あれこれ

山上 滋

2026 年 6 月 5 日

線型代数の内容は、今となってはどれも代り映えがせず、だれがやっても金太郎飴状態のようにも思えるので、あえてそれに逆らうのは愚かなれど、別の見方をすると、十年一日、進歩がないというか、時代の変化を無視してきたというのか、そのつけを支払わされるのは、教わる学生のみならず、巡り巡って社会全体に及ぶという大風呂敷。冥途のみやげに最後の悪あがきもまた一興。

８年ぶりの線型代数、相変わらず進歩がないというよりもむしろ劣化が激しいので、今回はぜひとも教科書の指定をと思い、以下の項目をチェック。

(i) ３次元座標空間の幾何学はあるか。正射影、平面の方程式、距離の公式。
(ii) 連立一次方程式の幾何学的解釈があるか。
(iii) 行列式の導入が帰納的になされているか。行列式の幾何学的意味が説明してあるか。
(iv) 掃き出し法に列の操作が混入してないか。行のみの操作に限定しているか。
(v) 実二次形式の標準化が説明してあるか。極値問題への応用が意識されているか。

何と、大部分が (iii), (iv) でアウト。かろうじて残ったものも (i), (ii) であえなく撃沈。ううむ、困った。しようがないので、昔のノート[*1] をふくらまして凌ぐことにしよう。題して、行列代数あれこれ[*2]。あれこれというよりは、行きあたりばったりであるか。行き倒れにならないといいのだが、はてさて。

参考書

[1] 齋藤正彦「線型代数入門」、東大出版会 (1966, ¥1900/274pp)。具体的なことが色々と書いてある。ペロン・フロベニウスの説明もあり、応用のためのことが詳しい。掃き出し法の混入部分は要注意ながら。

[2] 佐武一朗「線型代数学」、裳華房 (1974, ¥3400/339pp)。本格的、テンソル代数の記述あり、重厚長大、今となっては数学者の卵向きであるか。

[3] 松坂和夫「線型代数入門」、岩波書店 (1980, ¥4500/460pp)。厚い重い高い。丁寧かつ網羅的説明。行間が少ない分だけ体力が必要か。

[4] 草場公邦「線型代数–増補版」、朝倉書店 (1988, ¥2700/150pp)。薄くて格調高く説明も親切な良書ではあるが、口をあけて餌が飛び込んでくるのを待っているような人には勧められない。

[*1] 懐かしの「行列代数これだけ」http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/linear/la2003.pdf

[*2] 線型代数は使ってなんぼのもんである。あれもこれもと欲張るよりは、基本的なところをさっとやって、あとは個々人の関心のおもむくまま実践するのがよい。そうして、必要になったときに必要な範囲で掘り下げる。丁寧にしつこく教えたとて身につくものでなし。その意味で 教科書は簡潔明瞭が良いのであるが、一方で砂をかむの苦行を強いるものは避けたい。行きあたりばったりを標榜する所以である。

[5] 高木斉、高橋豊文、中村哲男「速習線形代数」、森北出版 (1994, ¥1500/128pp)。薄い、見やすい、軽い、安い。でも何か寂しい？

[6] 斎藤毅「線形代数の世界」、東大出版会 (2007, ¥2800/278pp)。二度目の線型代数といった感じの本。線型代数を二回教わるような人は限られていて、内容もまたそういったところ。

[7] 長谷川浩司「線型代数–改訂版」、日本評論社 (2015, ¥3300/408pp)。著者こだわりの一冊。改訂してますます増量か。

[8] 皆本晃弥「基礎からスッキリわかる線形代数」、近代科学社（2019, ¥2600/248pp）。一見したところ、構成というか方針が比較的近い本として挙げてみたが、列の入れ替えなしの行基本変形だけでは正段行列にはできないため、階段行列との関係がこれで良いのかどうか、行列式の性質の証明の方針の一貫性とか、要注意点もそれなりに。

目次

数の集合

自然数[*3](natural number)、実数 (real number)、複素数 (complex number) 全体の集合をそれぞれ、

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}$$

という記号で表わす。以下、単に数といった場合には、このいずれかを指すものとしよう。また数というかわりに**スカラー** [*4](scalar) という言い方もする。

1 行列事始め

「行列の掛け算というのは、代入のことなんだ」[*5]— Arthur Cayley

これから深く付き合うことになる行列 (matrix[*6]) について、その出処などを見ておくのも悪くはなかろう。形式的には、数の１次元配列が数列（あるいはベクトル）であるのに対して、数の２次元配列が行列に他ならず、色々こじつけする向きもあるが、連立一次方程式[*7]、これに尽きる。

[*3] ここでは、0 も自然数に入れておく。入れない流儀もあるが、単に利便性の問題ではある。

[*4] 物理では、スカラーを座標変換と関連させて、単なる数以上の意味で使う。

[*5] ケイリーさんがこう述べた記録があるわけではないが、きっとそう思っていたはず。なお、Eisenstein が「代入の代数」をケイリーに先立つ 1844 年に発表していた。この年は奇しくも Grassmann の Die Ausdehnunglehre が出版された年でもある。

[*6] 日本語は即物的ながら、ラテン語の子宮に由来する言葉。マトリックスではなく、maytrics のように発音する点にも注意。

[*7] 方程式とは大仰な言い方であるが、英語（もとはラテン語）だと equation で、意味は等式。少し意訳して「関係式」。ちなみに、「方程」は、古代中国の数学書「九章算術」に由来し、数を縦横に並べたものをいう。ここのテーマである行列とも重なる。

未知数が多い連立一次方程式を解けばすぐ実感することであるが、未知数を表わす文字というのは本質的な役目はせず、大事なのはその係数のやりくりである。ということで、係数だけを抜き出して計算してもよいわけで、よほどの変わり者でないかぎり 係数を縦横に並べた形式を採用することになる。例えば、

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1\\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2\\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3
\end{aligned}
$$

から 2 次元配列を作るとなると

$$
\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \quad \text{または} \quad \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix}
$$

であろう。一見、後者が自然に見えるかも知れないが、a, b, c が関係する部分と d が関係する部分は異質なので、

$$
\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}
$$

といった書き方もあり得るだろう。先程は未知数の文字はどうでもよいと言ったが、そうは言っても係数と未知数の対応関係もわかるような目印をつけておくのも悪くはない。目印の付け方として自然に思えるのは、

$$
\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}
$$

であろうか。このように、2 次元配列といっても諸々の綾があり、十人十色、様々な表記法が考えられるところである。このような任意性のある部分を初めから決めてかかるのは、往々にして後々齟齬をきたすので、ここでは、そういったことに左右されないであろう本体の部分

$$
\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{matrix}
$$

にまず注目し、これをいろいろ調べ、しかる後にそれ以外の部分を定めるとしよう。

さて、こういった 2 次元配列であるが、その塊の範囲を明確にするために適宜括弧でくくることにする。多く使われる括弧は丸括弧と角括弧であるが、波括弧だろうがなんだろうが構わない。紛れのないときは、上のように括弧をつけなくてもよい、というか括弧をつけないのが本来の様式である。丸が良いとか角に限るとかいろいろ言う人もいるようであるが、どうでもよいことなので好きなように。

注意ついでに、特別な場合として 2 種類の一次元配列があることを認識しておこう。横配列と縦配列である。これが行列の行と列に相当し[*8]、英語では row と column を当てる[*9]。

$$
\mathrm{row} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{column} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.
$$

*8 行も列も縦横と結びついたものではないので、どちらがどちらか混乱しませんか。行列でなく縦横あるいは横縦でよかったのであるが、偉い人が決めたのだとか。漢字は行列のほうが簡単でよいか。わからなくなったら、縦列駐車と唱える。

*9 本来の row は縦横関係なく「列」を表わす言葉であるが、column (円柱) は確かに縦であるなあ。

横配列の方は、個々の数の間の隙間が十分でないと数の積と混乱するので、区切り記号としてカンマを入れて (a,b,c) のようにも書く。この横配列は、高校以来慣れ親しんできた（？）ベクトルの成分表示と同じ形をしている。ということもあり、一般に行列に含まれる個々の数を行列の**成分** (component) と呼ぶ。成分の場所を指定したかったら、２行３列成分[*10]のように言えばよい。また、縦横のサイズにこだらわず成分の個数がいくつであっても、これらを行ベクトル (row vector) 列ベクトル (column vector) と呼ぶ習慣である。

せっかく数を並べたので、それを対象に代数計算を行ってみよう。といっても簡単なことで、行列の加減は、その縦横のサイズが等しい場合にのみ、各成分ごとに行う。ベクトルのときの類似で、数を行列に掛けるという操作を、すべての成分に同じ数を掛けることと定める。２次元配列ではあるがやっていることは一次元配列の場合に相当するベクトルの成分計算と寸分違わない。

行列の和と定数倍を定めたところで、次は積である。これもできれば、通常の計算規則をできるだけ温存しておきたい。もっとも安直な成分ごとの積[*11]は、割算以外のすべてを満たすので、それだけを見れば申し分ないようにも思えるが、行列の２次元配列が生かされていないので、行列の積としては難がある。適切な積のヒントは、実は連立一次方程式の解き方に隠されている。

連立一次方程式を解く際の手法として、代入法と加減法[*12]があった。代入法は素朴ながら計算効率が悪いので、多くの場合は加減法に頼ることになるのであるが、この代入法の究極の一般化である変数変換の方法が行列の積を考える上での重要な手がかりとなる、というよりも行列の積そのものを与えてくれる。

たとえば、先の一次式系に

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 s + \alpha_2 t \\ y &= \beta_1 s + \beta_2 t \\ z &= \gamma_1 s + \gamma_2 t \end{aligned}$$

を代入すると s,t についての一次式系

$$\begin{aligned} &(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1)s + (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2)t \\ &(a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1)s + (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2)t \\ &(a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1)s + (a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2)t \end{aligned}$$

を得るので、これから作られる行列を、代入する前の２つの行列の積と同定すると、

$$\begin{pmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

代入の入れ子については結合法則が成り立つので、こうして定めた積も結合法則をみたす。また分配法則もなりたつ。上の計算規則は一見複雑そうであるが、代入の基本形として、$ax+by+cz$ に $x = \alpha t, y = \beta t, z = \gamma t$ を代入した場合を書いてみると、$(a\alpha + b\beta + c\gamma)t$ となるので、

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

[*10] 縦横だと、この言い方に難があるか。やはり偉い人は良く考えてつけたのでしょう。
[*11] 安直にもかかわらず、アダマール積 (Hadamard product) という名前がついている。
[*12] 昔は消去法と言った。いい加減なものである。これは後に、掃き出し法として体系化される。

のような計算の可能な組合せについてのくり返しになっている。ということで、最初の連立一次方程式にもどると、未知数を置く場所も定まり、次の表記にたどりつく。

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

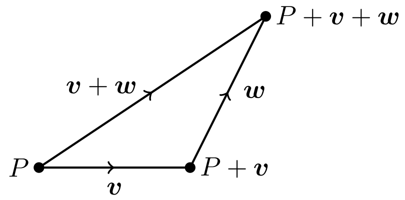
何と Arthur Cayley のあみ出した行列代数を再発見してしまった。あとは、これを色々いじって遊ぶだけである。決して何の役に立つかを気にしてはいけない。遊ぶに足るものであるかどうかの問いかけだけは忘れずに。

2　直線と平面の幾何学

「ベクトルというのは、平行移動のことなんだ」— Hermann Weyl

高校では、有向線分の同値類として（幾何）ベクトル を学んだ。これはこれで良いのであるが、ベクトルを移動量と考えることでより多くのことが見えてくる。移動量としてのベクトルは特定の点と無関係に考えられるべきもので、例えば、一定の向きと速さで流れる風は、場所と独立したベクトルと見ることができる。ただし、始点 P と終点 Q の 2 点が指定されると、点 P から点 Q への移動量としてベクトル[*13](**変位ベクトル**, displacement vector という) $\boldsymbol{v}$ が決まる、という繋がりはもちろんある。これを $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$ のように書くことは周知のとおり。

逆に点 P とベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、P をベクトル $\boldsymbol{v}$ に従って移動させて得られる点 Q が定まる。これを $Q = P + \boldsymbol{v}$ のように書く。こちらは、なぜか高校では[*14]出てこないのであるが、便利な書き方で、ベクトルの和の平行四辺形則が、$(P + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = P + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ という結合法則もどきに昇華する。そういう代数規則の辻褄が合うようになっているので、$\boldsymbol{v} = Q - P$ すなわち $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ と書いても一向に差し支えない。



もっと大胆に、点の純一次式（定数項のない一次式）$t_1P_1 + \cdots + t_nP_n$ ($t_1, \cdots, t_n$ は実数) なるものを考えることも可能で、$t_1 + \cdots + t_n = 1$ のときは点を[*15]、$t_1 + \cdots + t_n = 0$ のときは幾何ベクトルを表わすことがわかる。いずれにせよ、点の純一次式の計算は自由に行って良く、そのなかで、係数の和が 1 の塊は点とみなすことができ、係数の和が 0 の塊はベクトルと同定して良い、ということである。

世間でこのような計算が流行らない理由は、次のような疑問に魂を奪われると人間としての存在そのものが危うくなる、ということを恐れた為政者が巧妙に操作した結果なのかも知れない。

問 2.1. $t_1 + \cdots + t_n$ が 0 でも 1 でもないときの $t_1P_1 + \cdots + t_nP_n$ は何を意味するか。

[*13] ベクトルであることを強調して、$\vec{v}$ とか $\boldsymbol{v}$ のように書いたりするが、面倒なときは、普通の文字でベクトルを表わすこともある。以下では、矢印と太文字の両方を特に こだわりなく使用する。

[*14] 実は大学でも教わることはまれで、数学科であれば代数関連の「群作用」という形で知ることになる。歴史的には Grassmann か。

[*15] Möbius の重心座標と呼ばれるもので、幾何ベクトル一歩手前の 1827 年に発表されるも注目されず。

なお、$t_1P_1+\cdots+t_nP_n$ $(t_1+\cdots+t_n=1,\, t_j\geq 0)$ という形の点には名前がついていて、$P_1,\cdots,P_n$ の**凸結合** (convex combination) という。

問 2.2. 点の集合 C が凸であるとは、$P,Q\in C \Longrightarrow tP+(1-t)Q\in C$ $(0\leq t\leq 1)$ となること。点 $P_1,\cdots,P_n$ の凸結合全体は $P_1,\cdots,P_n$ を含む最小の凸集合である。$n=2,3,4$ の場合を順に調べてみよ。

さて、点を一つ選んでそれを基準点とみなすと、他の点とベクトルの間には一対一の対応がつくので、点をベクトルで表わすことができる。ベクトルをこのように解釈したものが**位置ベクトル** (position vector) である。平面の場合は、移動の自由度は２つ、空間の場合は３つあり、２次元あるいは３次元という言葉で区別される。そこで、空間の場合であれば、独立な３つの変位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を指定しておくことにより、すべてのベクトルが $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ の形に表わされる。いいかえると、空間ベクトルは、３つの数の組 (x,y,z) で指定することができる。これをベクトルの成分表示といい、個々の数はベクトルの**成分** (component) と呼ばれる。

これを位置ベクトルに適用することで、空間の点が３つの数の組（**座標**＝ coordinates*[16]）で指定されることになる。すなわち、基準点 O と基準ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ を指定することで、空間の点が３つの数の組と同定される。基準系を別のものに取り替えると、同じ点に別の３つ組が対応する。このときの数の間の関係は一次式で表わされ、**座標変換** (coordinate transformation) と呼ばれる。以上が、座標幾何の仕組みと付随するベクトルの成分表示の関係である。簡単のために平面すなわち２次元の場合であれば、

$$\boldsymbol{i}'=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{j}'=c\boldsymbol{i}+d\boldsymbol{j},\quad O'-O=s\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}$$

を

$$P-O=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\quad P-O'=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'$$

に代入して少し計算すると、

$$x=ax'+cy'+s,\quad y=bx'+dy'+t.$$

これが座標変換の関係式。とくに $O'=O$ すなわち $s=t=0$ とすると、ベクトルの成分変換の関係式となる。こちらは座標の純一次式であることに注意。

ここまでは、二点間の距離の情報は一切使っていない。現実の空間は距離が意味を持つようなものになっていて、これは別の言い方をすると、移動量の大きさ（長さ）という正の数 $|\boldsymbol{v}|$ が決まるということ。これと２つのベクトルの成す角 θ を使って $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})=|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|\cos\theta$ とおけば、これがいわゆる**内積***[17] (inner product) の性質*[18]（分配法則など）を満たすのであった (角を使わず、長さの情報だけから内積を得る方法については付録参照)。こういった内積の情報があれば、基準ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ として、大きさが 1 で互いに直交するものを取ることは自然なことであるので、以下、そうしておく。ちなみに、大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) と呼び習わしている。そうすることで、座標 (x,y,z) は距離の情報もあわせ持つことになり、例えば２点 (x,y,z), (x',y',z') の間の距離は、

$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

*[16] ラテン語で「一緒にきちんと並べたもの」を意味する。服飾関係でコーディネートというのと同じ言葉。
*[17] 内積を表わす記号としては、$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ のほかに、このような括弧記号もよく使われる、
*[18] この良い性質をもった ベクトルの大きさと角の情報の組み合わせが内積であり、そのことを理解するキーワードが正射影。

によって計算される。これすなわち、**デカルト座標** (Cartesian coordinates) である。これに呼応して、ベクトルの内積は、その成分表示 $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\boldsymbol{v'} = (\alpha', \beta', \gamma')$ を使って、

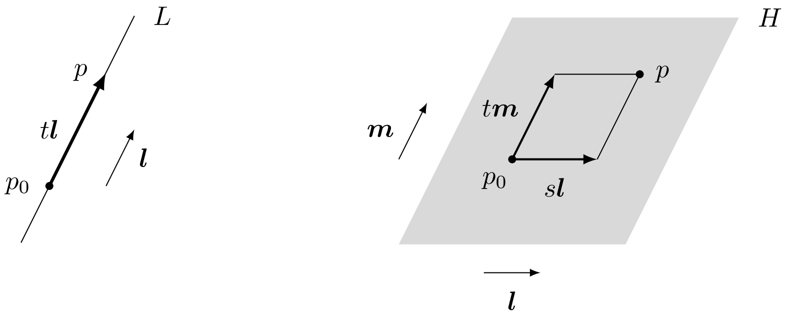
$$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v'}) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

と表わされることになる。

歴史的には、ベクトルの概念よりも座標の概念の方がはるかに古いのであるが、それは、素朴なものほど認識に時間がかかる、ということを意味するのであろう。

さて、ユークリッド幾何が成り立つ場所としての空間を数学的に記述する一つの方法は、デカルト座標を使用するものである。ただし、幾何学的諸性質が座標系のとり方に依らないことを確かめる必要が生じる。すなわち、座標変換で不変な性質であることが要求される。これは、ある意味現実の観測手段と幾何学的実体を結びつける堅実な方法で、広く物理学等で採用される立場である。一方で、座標系のとり方は人為的なもので本質ではない、という見方に立てば、座標に依存しない記述というのもあってしかるべきである。その一つが Hermann Weyl によるユークリッド空間の作り方[19]で、移動ベクトル全体 V を代数的構造を有するものとしてまず定式化し、さらに内積の情報を付与したもの（内積空間とよばれる）を用意しておく。その上で、**ユークリッド空間** (Euclidean space) とは、内積空間のベクトルが平行移動を引き起こすような点の集まりであるとする、というものである。この Weyl 方式のユークリッド空間において、基準点と基準ベクトルを指定すれば、先に見たように、デカルト座標が出現するという仕組みになっている。

ユークリッド空間における幾何学の重要な構成要素として、点の他に直線と平面がある。次にこれらを、ベクトル的方法で記述してみよう。以下、ユークリッド空間の点はアルファベット小文字で表わすことにする。直線 L に対して、L を L に移すベクトル全体 ΔL を考えると、$\Delta L = \{p - q; p, q \in L\}$ であり、これはまた $\mathbb{R}\boldsymbol{l} = \{s\boldsymbol{l}; s \in \mathbb{R}\}$ の形である。そして、L の点 p_0 を一つ用意すれば、L の他の点 p は、$p = p_0 + t\boldsymbol{l}$ $(t \in \mathbb{R})$ と表わされる。逆に、点 p_0 とベクトル $\boldsymbol{l} \neq 0$ に対して、このような点全体が一つの直線を表わす。直線が、実数をパラメータとする一次式の形で表わされることになる。これを**直線のパラメータ表示** (the parametric form of a line) と呼ぶ。

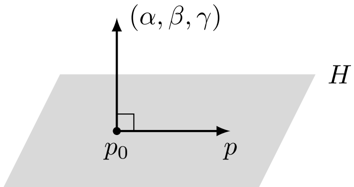


次に、平面 H を考えよう。同じく、H を H に移すベクトル全体を $\Delta H = \{p - q; p, q \in H\}$ で表せば、ΔH は 2 次元的な集まりになっていて、2 つの独立なベクトル $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を使って、$\Delta H = \mathbb{R}\boldsymbol{l} + \mathbb{R}\boldsymbol{m}$ のように[20]表わされる。したがって、H 内の点 p_0 を一つ用意すれば、H の一般的な点は $p = p_0 + s\boldsymbol{l} + t\boldsymbol{m}$ のように 2 つの実数 s, t を用いて表示される。これを**平面のパラメータ表示** (the parametric form of a plane) という。

直線と平面のベクトル表示がわかったので、デカルト座標を用いた表示について調べよう。こちらは、ま

[19] Raum, Zeit, Materie, Springer, 1923. 和訳：空間・時間・物質（ちくま学術文庫)。
[20] ベクトル $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ の純一次式 $s\boldsymbol{l} + t\boldsymbol{m}$ 全体 (s, t は実数) をこのような記号で表わす。

ず平面の方から考える。デカルト座標では、点 p は実数の組 (x, y, z) で表わされるのであった。そこで、この3つの座標の間にどのような関係式が成り立つとき平面を表わすか考えてみる。そのために、ΔH と直交するベクトル (α, β, γ) を用意し、p_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) とすれば、$(p - p_0) \perp (\alpha, \beta, \gamma)$ が求める条件となる。すなわち、$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$ である。これを**平面の方程式** (the equation[*21] of a plane) とよぶ。逆に、一次方程式 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ をみたす点全体というのは、その一つの解を (x_0, y_0, z_0) とするとき、$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$ の形に書き直せるので、点 (x_0, y_0, z_0) を通り、ベクトル (α, β, γ) を**法線ベクトル**[*22] とする平面を表わす。まとめると、デカルト座標系において、平面は一次方程式で表わされる。



次に直線を考えよう。直線 L の方向ベクトルである $\boldsymbol{l}$ の成分表示を $\boldsymbol{l} = (a, b, c)$ とし、$p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in L$ を一つ用意しておけば、L の一般の点 $p(x, y, z)$ は、

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b.c) = (x_0 + at, y_0 + +bt, z_0 + ct)$$

とパラメータ表示されるので、t を消去すると

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

という関係式が得られる。逆に、このような等式が成り立つとき、この共通の量を t とおけば、L のパラメータ表示が復活する。ということで、これを（空間）直線の方程式と呼ぶこともあるが、その実態はパラメータ表示である。直線のパラメータ表示で、t を時刻と思えば、点の軌跡として直線という意味をもつ。そのときは、方向ベクトルが速度ベクトル

$$\frac{d}{dt}(x, y, z) = (a, b, c)$$

と解釈される。

一方、$\Delta L = \mathbb{R}\boldsymbol{l}$ に垂直なベクトルとして、独立なものを2つ $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')$ とることができるので、L の一般の点 $p(x, y, z)$ は、2つの一次方程式

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0, \quad \alpha'(x - x_0) + \beta'(y - y_0) + \gamma'(z - z_0) = 0$$

を同時に満たすことになる。逆に、連立一次方程式

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta'$$

の解は、平行でない2つの平面の共通部分として、直線を表わす。

[*21] この場合の equation は、（平面を表わすために座標が満たすべき）関係式という意味である。

[*22] normal vector の訳であることから、法ベクトルと呼ぶ人もいる。normal の語源をたどれば直角定規に行き着くので良いとして、「法」の字には直角ないし垂直の意味はない。おそらく、normal に含まれる基準・標準の意味に引きづられて、法の字をあてたものであろうが、有理数と同類の誤訳か。数学用語としては垂直ベクトルでよかったような。

直線の方程式 $(x-x_0)/a=(y-y_0)/b=(z-z_0)/c$ を、$(x-x_0)/a=(y-y_0)/b$, $(y-y_0)/b=(z-z_0)/c$ という２つの一次方程式の連立であると考えると、２つの平面

$$(x-x_0)/a=(y-y_0)/b \iff bx-ay=bx_0-ay_0,$$
$$(y-y_0)/b=(z-z_0)/c \iff cy-bz=cy_0-bz_0$$

の共通部分として、確かに直線を表わしている。１つめの平面は z 軸と、２つめの平面は x 軸と平行であることに注意。

例 2.1. パラメータ表示から方程式へ、方程式からパラメータ表示へ。

(i) パラメータ表示 $L:(x,y,z)=(1,2,3)+t(3,2,1)$, $H:(x,y,z)=(1,1,-1)+s(-1,1,1)+t(1,-1,1)$ から方程式を導く。
L の表示式からパラメータ t を消去すると、

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=z-3$$

となる。これは２つの平面 $2x-3y+4=0$, $y-2z+4=0$ の共通部分として直線を表わしている。
H の表示式

$$x=1-s+t, \quad y=1+s-t, \quad z=-1+s+t$$

からパラメータ s, t を消去する（例えば、後の２つの式を s, t について解いて、それを最初の式に代入する）と、$x+y=2$ となる。これは z 軸に平行な平面を表わしている。

(ii) 方程式 $L:x+2y+3z=-1, -x+y=1$, $H:\sqrt{2}x-y+2z=3$ からパラメータ表示を導く。
例えば $x=t$ をパラメータと思って、L の式を y, z について解くと、$(x,y,z)=(t,t+1,-1-t)$.
法線ベクトル $(\sqrt{2},-1,2)$ と直交するベクトル (α,β,γ) は、$\sqrt{2}\alpha-\beta+2\gamma=0$ を満たすものなので、そのようなもの（で独立なもの）を２つ選び、平面のパラメータ表示式に当てはめてみる。例えば、$\alpha=0$ となる方向ベクトルとして $(0,2,1)$、$\beta=0$ となる方向ベクトルとして $(-\sqrt{2},0,1)$ を取り、さらに H 上の点として $p_0=(0,-1,1)$ を取れば、H 上の点 p は

$$p=p_0+s(0,2,1)+t(-\sqrt{2},0,1)=(-\sqrt{2}t,-1+2s,1+s+t)$$

とパラメータ表示される。

問 2.3. ($\sharp$) 問題を自由に設定して稽古せよ。答えは他所にはない、自らの中にこそ見出すべきもの。

例 2.2. 平面同士、あるいは、平面と直線の位置関係を表わす量として、この２つの図形の成す角 φ $(0\le\varphi\le\pi/2)$ がある。

(i) ２つの平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ と $\alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\delta'$ の間の角であれば、法線ベクトル (α,β,γ), (α',β',γ') との間に、$\varphi=\theta$ または $\varphi=\pi-\theta$ という関係が成り立つので、

$$\cos\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{(\alpha')^2+(\beta')^2+(\gamma')^2}}$$

である。

(ii) 平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ と直線 $(x,y,z)=(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$ との間の角であれば、法線と方向ベクトルの成す角 θ $(0\le\theta\le\pi)$ とは $\varphi=|\theta-\pi/2|$ という余角 (complementary angle) の関係にあるので、

$$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

である。

問 2.4. ($\sharp$) 直線 $(x,y,z)=(1+t,-1+2t,-t)$ と平面 $x-y+2z=0$ の間の角を φ とするとき、φ は $\pi/4$ より大きいか否か。

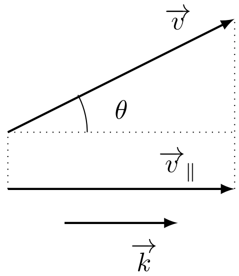
例 2.3. 原点を中心とする半径 $r>0$ の球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は、$ax+by+cz=r^2$ である。これは、接平面の法線ベクトルが (a,b,c) であることから、接平面の方程式が $a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0$ となるので、$a^2+b^2+c^2=r^2$ に注意して書き直せばよい。

平面 H と空間内の点 q が与えられると、二点間の距離 $|p-q|$ を最小にする点 $p\in H$ がちょうど一つ存在する。いわゆる垂線の足 (foot of perpendicular) とよばれるものである。直感的には明らかな事実であるが、これを正射影の方法で確かめておこう。

まずは用語であるが、ベクトル $\overrightarrow{v}$ のある方向への**正射影**[*23](orthogonal projection) とは、$\overrightarrow{v}$ をその方向に垂直に投影した部分をいう。投影する方向ベクトルを $\overrightarrow{k}$、その単位ベクトル化を $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{k}/|\overrightarrow{k}|$、$\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{l}$ (あるいは $\overrightarrow{n}$) との成す角を θ で表わすとき、$\overrightarrow{v}$ の $\overrightarrow{k}$ 方向への射影は

$$|\overrightarrow{v}|\cos\theta\,\overrightarrow{n}=(\overrightarrow{n}|\overrightarrow{v})\overrightarrow{n}=\frac{(\overrightarrow{k}|\overrightarrow{v})}{(\overrightarrow{k}|\overrightarrow{k})}\overrightarrow{k}$$

で与えられる $\overrightarrow{k}$ 方向のベクトルである。この最後の表式からわかることであるが、正射影は $\overrightarrow{k}$ の方向だけに依存し、その大きさと向きの取り方によらない。すなわち、$\overrightarrow{v}$ の $\overrightarrow{k}$ への正射影と $\lambda\overrightarrow{k}$ $(\lambda\ne 0)$ への正射影は同じものである。



以下、射影を考える方向ベクトル $\overrightarrow{k}$ を固定し、$\overrightarrow{v}$ の $\overrightarrow{k}$ への正射影を $\overrightarrow{v}_{\parallel}$ と書き、さらに $\overrightarrow{v}_{\perp}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}_{\parallel}$ と置くと、

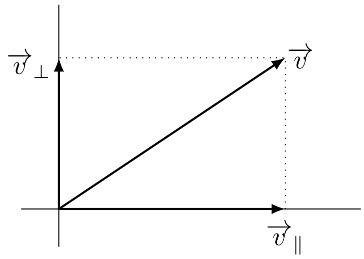
$$(\overrightarrow{k}|\overrightarrow{v}_{\perp})=(\overrightarrow{k}|\overrightarrow{v})-(\overrightarrow{k}|\frac{(\overrightarrow{k}|\overrightarrow{v})}{(\overrightarrow{k}|\overrightarrow{k})}\overrightarrow{k})=0$$

より $\overrightarrow{v}_{\perp}$ は $\overrightarrow{v}_{\parallel}$ と直交し、

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}_{\parallel}+\overrightarrow{v}_{\perp}$$

[*23] 直交射影ともいう。ラテン語の ortho には正統という意味があり、それに引きづられた正の字の使用であろう。受験数学界では正射影ベクトルと くどく言うようであるが、vector projection は使っても projection vector とは言わないだろうと思う。

と表わされる。これを $\overrightarrow{v}$ の直交分解 (orthogonal decomposition) という。$\overrightarrow{k}$ 方向とそれに直交する方向への分解という意味である。一般に、直交する 2 つのベクトル $\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{w}$ があれば、$|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}|^2 = |\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{w}|^2$（ピタゴラス）が成り立つので、$|\overrightarrow{v}_\parallel + \overrightarrow{v}_\perp|^2 = |\overrightarrow{v}_\parallel|^2 + |\overrightarrow{v}_\perp|^2$ である。



平面と点の距離の問題に戻って、H の単位法線ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とし H 上の点 p_0 をひとつ選んでおくと、$\overrightarrow{p_0q}$ は H の法線方向のベクトル $\overrightarrow{p_0q}_\parallel$ と H に平行なベクトル $\overrightarrow{p_0q}_\perp$ の和に分解される。一方、H 上の一般的な点 p に対して、$\overrightarrow{p_0p}$ は H に平行すなわち $\overrightarrow{p_0p} \perp \overrightarrow{n}$ であることから、

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p_0q} - \overrightarrow{p_0p} = \overrightarrow{p_0q}_\parallel + \overrightarrow{p_0q}_\perp - \overrightarrow{p_0p}$$

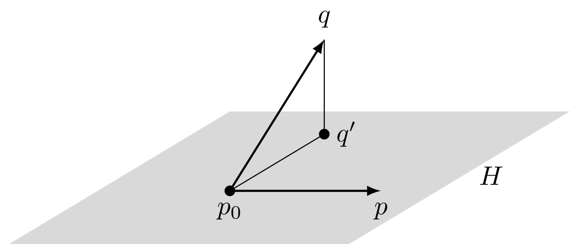
という表示において $\overrightarrow{p_0q}_\parallel \perp (\overrightarrow{p_0q}_\perp - \overrightarrow{p_0p})$ かつ $\overrightarrow{p_0q}_\perp$ が H 平行となるので、

$$|\overrightarrow{pq}|^2 = |\overrightarrow{p_0q}_\parallel|^2 + |\overrightarrow{p_0q}_\perp - \overrightarrow{p_0p}|^2$$

は、p が H 上を動くとき、$\overrightarrow{p_0p} = \overrightarrow{p_0q}_\perp \iff p = p_0 + \overrightarrow{p_0q}_\perp$ となる点 p で最小であることがわかる。すなわち $|\overrightarrow{pq}|$ が最小となる点 $q' \in H$ は $q' = p_0 + \overrightarrow{p_0q}_\perp$ であり、その最小値は $|\overrightarrow{p_0q}_\parallel|$ となる。この最小値を与える点 $q' \in H$ であるが、

$$\overrightarrow{q'q} = q - (p_0 + \overrightarrow{p_0q}_\perp) = \overrightarrow{p_0q} - \overrightarrow{p_0q}_\perp = \overrightarrow{p_0q}_\parallel$$

が平面 H と直交しているので、点 q から平面 H に下ろした垂線の足になっている。



以上のことを座標により書き表わしてみよう。H が方程式 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ で表わされ、q, p_0 の座標をそれぞれ (a,b,c), (x_0,y_0,z_0) とすると、$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = \delta$ であり、H の単位法線ベクトルは $\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}(\alpha,\beta,\gamma)$ で与えられる。これと $\overrightarrow{p_0q} = (a-x_0, b-y_0, c-z_0)$ との内積は、

$$(\overrightarrow{n}|\overrightarrow{p_0q}) = \frac{\alpha(a-x_0)+\beta(b-y_0)+\gamma(c-z_0)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} == \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

となるので、H と q との距離は

$$\frac{|\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

で与えられる。$q \in H$ であることと $\alpha a + \beta b_\gamma c - \delta = 0$ とが同値であることに注意しよう。

また、垂線の足である q' の座標は、$\overrightarrow{q'q} = \overrightarrow{p_0q}_{\parallel} = (\overrightarrow{n}|\overrightarrow{p_0q})\overrightarrow{n}$ であるから、

$$q - \overrightarrow{q'q} = (a,b,c) - \frac{\alpha(a-x_0)+\beta(b-y_0)+\gamma(c-z_0)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}(\alpha,\beta,\gamma) = (a,b,c) - \frac{\alpha a+\beta b+\gamma c-\delta}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}(\alpha,\beta,\gamma)$$

となることもわかる。

例 2.4. 点 $(1,1,1)$ を中心とする半径 r の球が平面 H: $x-2y+z=6$ に接するとき、r は $(1,1,1)$ と H との距離に等しいので、

$$r = \frac{|1-2+1-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \sqrt{6}$$

であり、球面の方程式は $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$ となる。

問 2.5. ($\sharp$) 直線 $L: x+2y+3z=-1, -x+y=1$ 上の点で、点 $q(1,1,0)$ との距離が最小となるものを求めよ。

問 2.6. ねじれの位置 (skew position) にある 2 本の空間直線 L, M に対して、点 $a \in L$, $b \in M$ で、$\overrightarrow{ab}$ が L と M の双方に直交するものがちょうど一組存在することを示せ。また、a, b は $|\overrightarrow{pq}|$ ($p \in L$, $q \in M$) を最小にする点として特徴づけられる。（数式を使わない初等幾何で示すこともできるが、ここでは内積を使って処理する。）ヒント：L と M の双方と直交する単位ベクトル $\overrightarrow{n}$ と $p_0 \in L$, $q_0 \in M$ を補助的に取り、$\overrightarrow{p_0q_0}$ を $\overrightarrow{n}$ 方向と $\overrightarrow{n}$ に直交する方向に分解し、直線のパラメータ表示を使うことで、平面と点との距離の場合と似たように処理できる。

連立一次方程式の幾何学的意味

座標平面において、直線が一次方程式 $ax+by=s$ の形で表されることは周知のとおり。その見方に立てば、連立一次方程式

$$ax+by=s, \quad cx+dy=t$$

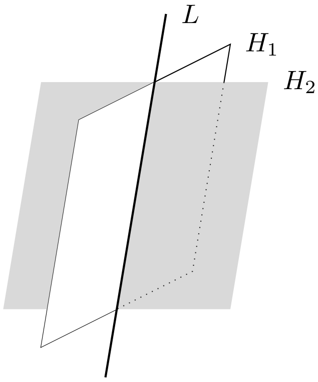
を解くということは、2 つの直線 $ax+by=s$ と $cx+dy=t$ の交点の座標を求めることに他ならない。この交点があるかないか、あれば一つかどうかは、直線の位置関係で次のように決まる。

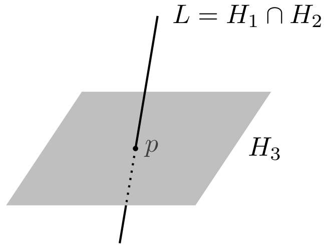
2 直線が平行でない場合：$ad \neq bc$ のとき、交点はちょうどひとつだけ存在する。

2 直線が平行である場合：$ad = bc$ のとき、交点はないので、連立一次方程式は解をもたない。

ただし、例外があって、2 直線が一致する場合、すなわち (a,b,s) と (c,d,t) が比例するときは、解は無数に存在する。

以上の幾何学的解釈を座標空間にまで広げてみよう。最初に、2 平面 $\alpha_j x+\beta_j y+\gamma_j z=\delta_j$ $(j=1,2)$ の位置関係を調べる。平行でない場合、すなわち $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ と $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ が比例しないときは、平面の共通部分として、空間内の直線 L が得られるので、解は直線の点に相当するだけ沢山（不定）存在する。平行であるときは共通部分がないので、この段階で連立方程式は解がないとわかる。





次に互いに異なる３平面の位置関係について。３つの法線ベクトル $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ が独立な方向を表している場合：３平面の交点が一点 p に定まるので、連立一次方程式はちょうど一つの解をもつことがわかる。それ以外の位置関係は、２平面が平行で残りの平面が平行にならない場合。３平面が平行である場合。この２つは、ともに連立一次方程式に解がない。どの２つの平面も平行でなくかつ共通解がないものとして、三角柱の側面を構成する場合がある。

最後に、三角柱が細くなった極限として直線が現れるとき、すなわち３平面がひとつの直線を共有する場合：これは、連立一次方程式の解が沢山ある場合（解不定）である。

この解のあるなしと、３つの法線ベクトルの相互関係を組み合わせることで、すべての場合を識別することができる。とくに、解がちょうど一つであることと３つの法線ベクトルが３次元的広がりをもつことが同値となる。

問 2.7. ($\sharp$) 原点と点 $(1, 1, 1)$ を結ぶ直線 L について、L を共有する３平面を表わす連立一次方程式を一組作れ。

以上、三元連立一次方程式の解の存在の様子が幾何学的に解釈できることを見てきた。一方、連立一次方程式自体は未知数がいくつあっても考えることができて、その解の様子を代数の技で調べてみると、３次元ユークリッド幾何の直感が、実に、高次元の場合にまで広く有効であるという事実に行き当たる。これが、いわゆる線型代数（行列代数）における「抽象の直感」とでも言うべきもので、視覚的直感は、そのための確かな手がかりをもたらしてくれる。

3　行列とその計算

添え字 (index) に数を結びつけた一種の**配列**[*24](array) について考えよう。以下では具体的に $\{1, 2, \cdots, n\}$ を添え字集合に取るが、実はなんでもよい。自然数である必要もない。

Remark 1. 添字集合を { 馬, 鹿 } とした場合の馬鹿行列であれば、添字の組と数の対応

$$(\text{馬}, \text{馬}) \mapsto a_{\text{馬馬}}, \quad (\text{鹿}, \text{鹿}) \mapsto a_{\text{鹿鹿}}, \quad (\text{馬}, \text{鹿}) \mapsto a_{\text{馬鹿}}, \quad (\text{鹿}, \text{馬}) \mapsto a_{\text{鹿馬}}$$

がその実体で、それをどのような順番で並べようが（あるいは並べなくても）同じ行列を表わすことになる。あえて混乱するように書けば、次のいずれも同じ馬鹿行列を表しているということである。

$$(a_{\text{馬馬}}, a_{\text{鹿鹿}}, a_{\text{馬鹿}}, a_{\text{鹿馬}}), \qquad \begin{pmatrix} a_{\text{馬馬}} & a_{\text{馬鹿}} \\ a_{\text{鹿馬}} & a_{\text{鹿鹿}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{\text{鹿鹿}} & a_{\text{鹿馬}} \\ a_{\text{馬鹿}} & a_{\text{馬馬}} \end{pmatrix}.$$

[*24] 形式的には有限集合上の関数に他ならない。

さて、数の 2 次元的配列[*25]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$$

を $m \times n$ 型の**行列** (matrix) と言い、個々の数 a_{ij} を行列の**成分** (component) とよぶ。とくに、$m = 1$ のとき、**行ベクトル** (row vector)、$n = 1$ のとき、**列ベクトル** (column vector) と呼ぶ。$n \times n$ 型の行列を n 次の**正方行列**[*26] (square matrix) ともいう。正方行列 $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ においては、左上から右下へかけての対角線上にある成分 $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ をとくに**対角成分** (diagonal component) と呼ぶ。

ここでは、行列として配列された範囲をはっきりさせるために丸括弧を使ったが、角括弧を使う人も多い。区切りさえわかれば何を使ってもいいし、紛らわしくなければ括弧で括る必要もない[*27]。ただし、縦線で区切ることは普通しない。のちに出てくる行列式の記号と区別つかなくなって困るので。

- **和** (addition) と**スカラー倍**（scalar multiplication）は、成分ごとに行う。
- **積** (product) は $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ と $n \times l$ 行列 $B = (b_{jk})_{1\le j\le n, 1\le k\le l}$ に対して

  $$C = AB, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

  で定義される $m \times l$ 行列である。このように、積を考える行列のサイズには制限がつき、積の結果のサイズも変化を受ける。これは、最初の節で見たように、式の代入という積の由来によるものである。
- **零行列** (zero matrix) とは、すべての成分が 0 である行列。型を意識して $\mathbf{0}_{m,n}$ のように書くこともあるが、通常は $\mathbf{0}$ と略記するか 0 で代用する。行列の和と積に関して零のごとく振る舞う。

行列の積 AB は一見複雑であるが、つぎのように見ると覚えやすい。まず、行ベクトルと列ベクトルを視覚的に区別するために、

$$\overleftarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

という記号を用意する。そうして左の行列 A を横分けして

$$A = \begin{pmatrix} \overleftarrow{a_1} \\ \vdots \\ \overleftarrow{a_m} \end{pmatrix}, \quad \overleftarrow{a_i} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

のように表わし、右の行列 B は縦分けして

$$B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{b_1} & \dots & \overrightarrow{b_l} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b_k} = \begin{pmatrix} b_{1,k} \\ \vdots \\ b_{n,k} \end{pmatrix}$$

[*25] このように配列そのものを一つの文字で表わすことが、些細なことのように見えて行列の数学を展開する上で極めて重要である。

[*26] 単に行列のサイズが縦横一致するだけではなく、成分を指定するためのラベルも縦横で同じものを使用する。

[*27] 括弧は必要なくとも添え字の存在は必要である。したがって、１行１列の行列とスカラーとは別のもの。もっと詳しく（混乱させるように）言うと、同じ１行１列でも背後の添え字集合が違っていれば別の行列を表わすと考える。もっとも添え字集合が何であっても、１行１列の場合は、すべてスカラーと対応がつくので、同一視することがしばしばであることもまた事実。例：行ベクトルと列ベクトルの積を数と同一視。

のように表わし、これを左横右縦と唱える。

そうすると、行列の積が

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

の形の数（内積型の積和）を規則的に配列することで構成されることになり、

$$AB = \begin{pmatrix} \overleftarrow{a_1}\overrightarrow{b_1} & \dots & \overleftarrow{a_1}\overrightarrow{b_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overleftarrow{a_m}\overrightarrow{b_1} & \dots & \overleftarrow{a_m}\overrightarrow{b_l} \end{pmatrix}$$

という表示を得る。

積の計算に慣れる方法としては、まず基本の内積型を目に焼き付ける。その上で、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as + bt \\ cs + dt \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

といった手順で広げていくとよいだろう。

問 3.1. 行列の計算を実際に色々と行ってみよう。（何をためらっている、手を動かすんだ。）

命題 3.1. 行列の和と積については、以下の計算規則が有効である。

(i) 行列の和に関して、**結合法則** (associative law) と**交換法則** (commutative law) が成り立つ。
(ii) 行列の積に関して、**結合法則**は成り立つが、交換法則は（一般には）成り立たない。
(iii) 行列の和と積に関して、**分配法則** (distributive law) が成り立つ。

- 積の結合法則の証明で、和の記号の使い方[*28]の一般形を知る必要がある。それは、

$$\sum_{\text{和をとる範囲}} \Big(\text{和をとる対象} \Big)$$

というもので、とくに和をとる範囲が $1, 2, \cdots, n$ で指定される場合には、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ のようにも書く、と正しく理解すべきである。

- n 次正方行列で対角成分がすべて 1 かつそれ以外の成分がすべて 0 であるものを I_n と書き、**単位行列**[*29] (unit matrix) と呼ぶ。単位行列の成分は、**クロネッカーのデルタ記号** (Kronecker's delta)

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

[*28] 今は大昔、和の記号の本来の使い方に初めて接し、しばし茫然とした記憶がよみがえる。

[*29] 数の場合の 1 に相当するので、こうよばれるが、単位ベクトルの場合と整合しないので注意。ちなみに、単位行列を表わす記号として、I (英語 identity から) または E (独語 Einheit = 英語 unit から) がよく使われる。

を使うと、$I_n = (\delta_{j,k})_{1\le j,k\le n}$ と表わされる。

このデルタ記号というものは、一般に 2 つのものを比較する時、それが等しければ 1 を、違っていれば 0 を返す一種の関数になっていて、とくに、2 つ自然数を比較した場合をクロネッカーのデルタと呼ぶ。ということで、$n=3$ の場合を書き下せば[*30]、

$$I_3 = \begin{pmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

単位行列が積に関して 1 のように振る舞うことは、次のような等式による。

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{i,j}\, a_{j,k} = a_{i,k} \iff I_m A = A.$$

問 3.2. $m \times n$ 行列 A に対して、$AI_n = A$ である。

結合法則 $A(BC) = (AB)C$ は、次の等式で $f(j,k) = a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l}$ の場合から分かる。

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(j,k) = \sum_{1\le j\le m, 1\le k\le n} f(j,k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(j,k).$$

というのは、B のサイズを m 行 n 列とするとき、$A(BC)$ の (i,l) 成分は

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}(BC)_{j,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \sum_{k=1}^{n} b_{j,k}c_{k,l} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l}$$

である一方で、$(AB)C$ の (i,l) 成分は、

$$\sum_{k=1}^{n} (AB)_{i,k}c_{k,l} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l}.$$

問 3.3. 結合法則の本質は次の等式にあり。$m \times n$ 行列 A と m 次行ベクトル $\overleftarrow{x}$、n 次列ベクトル $\overrightarrow{y}$ に対して、$(\overleftarrow{x}\,A)\overrightarrow{y} = \sum_{1\le i\le m, 1\le j\le n} x_i a_{ij} y_j = \overleftarrow{x}\,(A\overrightarrow{y})$ が成り立つ。改めてこれを確かめる。

問 3.4. 正方行列 $(a_{j,k})_{1\le j,k\le n}$ の成分の和に関して、

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}$$

である。何故か。

例 3.2. 和の記号を使うと、次のような表示ができる。ここで、最右辺の和の記号の意味に注意。

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)(c_1 + \cdots + c_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right) = \sum_{1\le i,j,k\le n} a_i b_j c_k.$$

[*30] このように 特殊にしたら具体的にどうなっているかは、一々言われなくても自分でいろいろやってみる。

例 3.3. $(x+y+z)^n$ の展開式は次のように書ける。これを多項定理 (multinomial theorem) という。

$$(x+y+z)^n = \sum_{a+b+c=n} \frac{n!}{a!b!c!} x^a y^b z^c.$$

ただし、和を取る範囲は「a, b, c は自然数で $a+b+c=n$ を満たす」と書くべきところを略記してある。

証明は、組み合わせ数の意味を考えてもよいが、ここでは和の記号の練習もかねて、二項定理のくり返しとして代数的に処理してみよう。

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^n &= \sum_{a=0}^{n} \frac{n!}{a!(n-a)!} x^a (y+z)^{n-a} \\
&= \sum_{a=0}^{n} \frac{n!}{a!(n-a)!} x^a \sum_{b=0}^{n-a} \frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!} y^b z^{n-a-b} \\
&= \sum_{a=0}^{n} \sum_{b=0}^{n-a} \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!} x^a y^b z^{n-a-b} \\
&= \sum_{a+b+c=n} \frac{n!}{a!b!c!} x^a y^b z^c.
\end{aligned}$$

行列の積では交換法則が成り立たないことは、実例で確認するとよい。

問 3.5. 次の２つの行列（ベクトル）の積を計算し、その結果を比較せよ。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

問 3.6. (♯) ２次の正方行列 A, B で、$AB \neq BA$ かつ $AB = 0$ となるものがあるかどうか調べよ。

結合法則が成り立つときは、括弧を省いて、$(A+B)+C = A+(B+C)$ を $A+B+C$ のように、あるいは $(AB)C = A(BC)$ を ABC のように書くことは、数の場合の和・積と同様である。これは３個に限らずもっと沢山の行列でも正しい。例えば、４個の行列の積 $ABCD$ の場合、その定義として

$$((AB)C)D, \quad (AB)(CD), \quad A(B(CD)), \quad A((BC)D), \quad (A(BC))D$$

の５通りの方法が考えられるが、隣り合ったもの同士は $(XY)Z = X(YZ)$ の形の等式により一致する。５個以上の場合も基本的に括弧のつけかえをくり返すだけなので、「当たり前」のように扱うことも多いのであるが、一度その仕組みを確かめておくのも悪くはない。ということで、

定理 3.4 (一般結合法則[*31]). n 個の行列の積 $A_1 A_2 \cdots A_n$ は、括弧のつけかた[*32]によらず全て一致する。

Proof. n に関する帰納法で示す。n より少ない個数の積については正しいとし、括弧を省いた書きかたも許すことにすると、n 個の行列 $A_1, \cdots, A_n$ の積として可能なものは $B_k = (A_1 \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_n)$ $(1 \le k \le n-1)$ という形になるので、$B_1 = B_2 = \cdots = B_{n-1}$ を示せばよい。これは、帰納法の仮定から成り立つ $A_k \cdots A_n = A_k(A_{k+1} \cdots A_n)$ と $A_1 \cdots A_k = (A_1 \cdots A_{k-1})A_k$ $(2 \le k \le n-1)$ に注意して、結合法則を

$$B_{k-1} = (A_1 \cdots A_{k-1})(A_k(A_{k+1} \cdots A_n)) = ((A_1 \cdots A_{k-1})A_k)(A_{k+1} \cdots A_n) = B_k$$

[*31] Generalized associative law. 実にこれが学部の入試で問われたことがあった。人が悪いというか、人を食ったというか。

[*32] 括弧のつけかたは $(2n-2)!/(n!(n-1)!)$ 通りある。これをカタラン数 (Catalan number) と称える。$1, 1, 2, 5, 14, 42, \cdots$.

のように使えばわかる。これだけのことではあるが、「当たり前」は明らかに言い過ぎ、と思いませんか。 □

n 次正方行列 A と自然数 m $(m = 1, 2, \cdots)$ に対して、A を m 回かけて得られる行列[*33]を $A^m = A \cdots A$ のように書いて A の m 乗 (the m-th power[*34] of A) と呼ぶ（**行列の冪**）。指数法則 $(A^l)^m = A^{lm}$, $A^lA^m = A^{l+m}$ が成り立つことに注意する[*35]。とくに、$A^lA^m = A^mA^l$ である。

例 3.5. 行列の和の冪を計算（展開）してみよう。分配法則を使えば、

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

であり、これが $A^2 + 2AB + B^2$ に一致する必要十分条件は $AB = BA$ である。

例 3.6. n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

の m 乗は、

$$A^m = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

におけるスカラー部分

$$\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = s_1t_1 + \cdots + s_nt_n$$

を先に計算すれば、

$$A^m = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} (s_1t_1 + \cdots + s_nt_n)^{m-1} \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = (s_1t_1 + \cdots + s_nt_n)^{m-1}A$$

となる。ここで、スカラー倍の部分 $(s_1t_1 + \cdots + s_nt_n)^{m-1}$ は、行列の積の中で場所を自由に移動できることに注意。

問 3.7. $(\sharp)$ $(A+B)^3$ の展開式を書き下し、$AB = BA$ のときには二項展開に帰着することを確かめよ。

問 3.8. 例 3.6 の行列 A について、$(I_n + A)^m$ を求めよ。

問 3.9. 変な和を $a \diamond b = |a+b|$ で定義するとき、結合法則が成り立たない。

例 3.7. 連立一次漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1x_n + b_1y_n + c_1 \\ y_{n+1} = a_2x_n + b_2y_n + c_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

[*33] ここでも一般結合法則が必要。明らかなことではないにも係わらず、言及する本も人も稀という怪。慣れのこわさかな。
[*34] $m = 2, 3$ については、second power, third power の代わりに square (平方), cube (立方) が常用される。
[*35] 一般結合法則を認めれば、自然数の積和の意味そのもの。

について考える。列ベクトルの列[*36]と行列をそれぞれ

$$\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定めると、上の漸化式は $\overrightarrow{v_{n+1}} = A\overrightarrow{v_n}$ と書けるので、等比数列の一般項の計算と同様に、

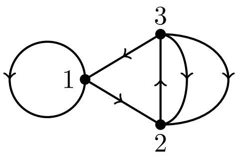
$$\overrightarrow{v_n} = A\overrightarrow{v_{n-1}} = A^2\overrightarrow{v_{n-2}} = \cdots = A^n\overrightarrow{v_0}$$

となる。すなわち、連立漸化式を解くことが行列のべき乗 A^n を求めることに帰着する。

例 3.8. N 個の点を向きのついた線で相互に結んで得られるネットワーク（有向グラフという）を用意する。点は数字 $\{1, \cdots, N\}$ をラベルとして区別し、i を始点とし j を終点とする線の個数 a_{ij} を成分にもつ N 次の正方行列（有向グラフの隣接行列 (adjacency matrix) と呼ばれる）を A とする。ただし、a_{ii} は、点 i におけるループの数を表わすものとする。

このとき、点 i から出発し、ネットワークの線の向きに沿った移動を n 回くり返し、点 j に至る経路の数が、行列 A^n の (i, j) 成分に他ならない。（場合の数の計算における積と和の公式をくり返す。）

問 3.10. 次の有向グラフ[*37]について、3回の移動に伴う経路の数が最も多くなる始点と終点を特定せよ。



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

行列の分割計算

今、大きな行列 A, B を縦横に分割して、それぞれ小行列 $A_{i,j}$, $B_{j,k}$ を配列した形であるとしよう。ただし、小行列のサイズは、積 $A_{i,j}B_{j,k}$ がすべての i, j, k について計算できる形になっているものとする。このとき、行列 $C = AB$ は、小行列 $C_{i,k} = \sum_j A_{i,j}B_{j,k}$ を2次元的に並べたものになっている。これを行列の**分割計算** (block matrix computation) と称する。

例 3.9.

(i) 行列 A を行ベクトル $\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overleftarrow{a_m}$ を縦に並べ、行列 B を列ベクトル $\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_l}$ を横に並べたものと見ると、積 AB は次のような分割計算の形になっている。

$$A\begin{pmatrix} \overrightarrow{b_1} & \ldots & \overrightarrow{b_l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\overrightarrow{b_1} & \ldots & A\overrightarrow{b_l} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \overleftarrow{a_1} \\ \vdots \\ \overleftarrow{a_m} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \overleftarrow{a_1}B \\ \vdots \\ \overleftarrow{a_m}B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \overleftarrow{a_1} \\ \vdots \\ \overleftarrow{a_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{b_1} & \ldots & \overrightarrow{b_l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overleftarrow{a_1}\overrightarrow{b_1} & \ldots & \overleftarrow{a_1}\overrightarrow{b_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overleftarrow{a_m}\overrightarrow{b_1} & \ldots & \overleftarrow{a_m}\overrightarrow{b_l} \end{pmatrix}.$$

[*36] 列ベクトルの列は column の訳で、数列の列は sequence の訳。異なる英語に同じ訳をつけてしまったというお粗末。
[*37] 頭左尾右という魚の盛り付け作法は右利きに配慮したものであろうか。ここは左利き用になっている。

(ii) 行列 A を列ベクトル $\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ を横に並べ、行列 B を行ベクトル $\overleftarrow{b_1}, \cdots, \overleftarrow{b_n}$ を縦に並べたものと見ると、積 AB は次のような分割計算の形でもある。

$$(\overrightarrow{a_1} \quad \ldots \quad \overrightarrow{a_n})\begin{pmatrix}\overleftarrow{b_1}\\ \vdots \\ \overleftarrow{b_n}\end{pmatrix} = \overrightarrow{a_1}\overleftarrow{b_1} + \cdots + \overrightarrow{a_n}\overleftarrow{b_n}.$$

とくに、B が n 次列ベクトルであれば、

$$A\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix} = (\overrightarrow{a_1} \quad \ldots \quad \overrightarrow{a_n})\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix} = b_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + b_n\overrightarrow{a_n}.$$

(iii) サイズ n の正方行列 A, B, 列ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ とスカラー λ, μ に対して、

$$\begin{pmatrix}A & \overrightarrow{a}\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & \overrightarrow{b}\\ 0 & \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}AB & A\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{a}\\ 0 & \lambda\mu\end{pmatrix}.$$

分割計算が成り立つ理由を一般的に説明するのは煩わしいので、証明にはあえて触れないことが多い*38。何が鬱陶しいかというと、証明そのものではなく、成分と分割の関係の記述の仕方。自然数を 1 から順番に並べて配列の場所を指定するという素朴な方法にこだわると思いの外煩雑である。具体的に書いたからといってその仕組みが見えるわけでもなく。

適切な見方は、添字を自然数に限定せずに一般の有限集合 X とし、その有限分割 $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_l$ を考える。同様に、$Y = Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_m$ あるいは $Z = Z_1 \sqcup \cdots \sqcup Z_n$ とし、分割小行列を $A_{i,j} = (a_{xy})_{x\in X_i, y\in Y_j}$ のように認識すれば、$C = AB$ においては $C_{i,k} = (c_{xz})_{x\in X_i, z\in Z_k}$ であり、$x \in X_i$, $y \in Z_k$ についての

$$c_{xz} = \sum_{y\in Y} a_{xy}b_{yz} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{y\in Y_j} a_{xy}b_{yz} = \sum_{j}\text{「}A_{i,j}B_{j,k} \text{ の } (x,z) \text{ 成分」} = \text{「}\sum_{j} A_{i,j}B_{j,k} \text{ の } (x,z) \text{ 成分」}$$

を小行列の形にまとめると、$C_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}B_{j,k}$ を得る。これだけのことではあるが、行列の本質は配列の場所でも場所を表わす数字でもないということ。それが分かったかどうかの試金石というと大げさか。

4 2次・3次の行列式

2元連立一次方程式

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}$$

を x, y について解けば

$$x = \frac{sd - tb}{ad - bc}, \quad y = \frac{at - cs}{ad - bc}.$$

問 4.1. この解の表示式を導け。

*38 煩わしい説明は [1] とか [2] にあるが、見るよりは自分で考えた方が早いとしたもの。人に頼る前にまずは己を、である。

この分母に共通して現れる式 $ad-bc$ を行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**行列式** (determinant[*39]) といい、

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

などと書く[*40]。この記号を使えば、上で与えた解の公式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$

のようになる。日本語の名前は似ているが、行列式は、行列の成分を使って表される式（あるいは式の表わす数＝スカラー）であることに注意。

例 4.1. 2次行列式のたすき掛けは単純そのもので、そのまま計算することも多いのであるが、$\begin{vmatrix} 2026 & 2027 \\ 2029 & 2028 \end{vmatrix}$ のように、一歩立ち止まるとよいときもある。

「問題は難しくしないと解けない」という韜晦（とうかい）に満ちた岡潔の言葉もあるが、これは一般化を試みよ、ということで、今の場合だと、

$$\begin{vmatrix} a & a+1 \\ a+3 & a+2 \end{vmatrix} = a(a+2)-(a+3)(a+1) = -2a-3$$

と計算したあとで、$a=2026$ を代入するとよい。

行列 A を縦割にして $A=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ と書こう。

(i) **線型性** (linearity)：各ベクトルに対して、次のような分配法則が成り立つ。α, β はスカラー。

$$\det(\alpha\overrightarrow{u}'+\beta\overrightarrow{u}'',\overrightarrow{v}) = \alpha\det(\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v})+\beta\det(\overrightarrow{u}'',\overrightarrow{v}), \quad \det(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v}'+\beta\overrightarrow{v}'') = \alpha\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}')+\beta\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}'').$$

(ii) **交代性** (alternating[*41] property) ：

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}).$$

(iii) **規格化条件** (normalization condition)：

$$\det(I_2)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Remark 2. $\overrightarrow{u}$ についての線型性は、和とスカラー倍についての性質

$$\det(\overrightarrow{u}'+\overrightarrow{u}'',\overrightarrow{v}) = \det(\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v})+\det(\overrightarrow{u}'',\overrightarrow{v}), \quad \det(\alpha\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \alpha\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$

を合わせたものでもある。

Remark 3. 正方行列から行列式を作るには、行列を表わす縦横のラベル（添字）は同一のものを用いる必要がある。これは行列式の符号がラベルを並べる順序によって変化するためで（交代性）、馬鹿行列であれば、縦の馬鹿が横の何に対応するかがわからないと行列式が（とくに符号が）定まらない。

[*39] 意味は「決定式」。言い方は似ているが、行列とは別物であることに注意せよ。ついでながら、行列式を縦棒で表わすのが慣例ではあるが、絶対値記号との相性はよくない。1行1列の行列が数そのものとは区別されるべきことを知る上では良いが。

[*40] 「2次行列式は、たすき掛け」と唱えるものだが、たすき掛けを知らぬ世代には何と説く。陰の声あり、2次式の因数分解。

[*41] alternating の訳として交代がよく用いられるが、意味からすると、交互が適切。

一般化

$$a_1x + b_1y + c_1z = t_1 \tag{1}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = t_2 \tag{2}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = t_3 \tag{3}$$

未知数 x を定数とみて第２、第３式を y, z について解くと

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} t_2 - a_2x & c_2 \\ t_3 - a_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_2 & c_2 \\ t_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x, \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} b_2 & t_2 - a_2x \\ b_3 & t_3 - a_3x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & t_2 \\ b_3 & t_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} x. \tag{5}$$

そこで、(1) 式を $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 倍したものに (4), (5) 式を代入すると、

$$\left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right) x = t_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} t_2 & c_2 \\ t_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} t_2 & b_2 \\ t_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

この両辺には同じ形の式が現れるので、**３次行列式**を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

で定義する。(１行目に関する展開。) そうすると、上で求めた連立方程式の解の公式は、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} t_1 & b_1 & c_1 \\ t_2 & b_2 & c_2 \\ t_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

のようになる。

２次行列式の性質から３次行列式の性質がわかる。

(i) 線型性：行列式 $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ は、各ベクトルについて分配法則が成り立つ。
(ii) 交代性：$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のうち２つのベクトルを入れ替えると行列式の値にマイナス符号がつく。
(iii) 規格化条件：

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

問 4.2. (♯) 上の性質を確かめよ。また、線型性と交代性から、未知数 y, z を３次行列式で表わす公式を導け。

Remark 4. ３次行列式を完全に展開すれば、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

となる。これを２次行列式におけるたすき掛け公式の類似と見て the rule of Sarrus ということが多いのであるが、４次以上の行列式計算で間違いを誘発しかねず、これは覚えない方がよい。

ちなみに、フランスの数学者である Pierre Frédéric Sarrus はサリュのようにいうのが正しい音であるが、日本では Sarrus の英語読み[*42]からサラスと呼ばれている。二重に誤りをおかすことが無いように 敢えての注意。

３次行列式の導入では x について解いた。y, z について解けば、２行・３行についての展開式が得られる。

[*42] バッハの英語読みがバックであるが如く。

5 一般の行列式

n 次行列式を $n-1$ 次行列式に還元する形で、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2j}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nj}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と帰納的に定義する。ただし、$[a_{2j}], \ldots, [a_{nj}]$ とあるのはそこの部分の削除を意味する。（1行に関する展開。）

行列式のサイズに関する帰納法で（2次行列式の性質から3次行列式の性質を導いたのと同じ方法で)、次の性質を確かめることができる。

(i) 線型性：行列式 $\det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n})$ は、各ベクトルについて分配法則が成り立つ。

(ii) 交代性：$\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ のうちの2つのベクトルを入れ替えると行列式の値は符号が反対になる。

(iii) 規格化条件：

$$\det(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

たとえば、$\overrightarrow{a_k}$ と $\overrightarrow{a_l}$ $(k < l)$ の入れ換えについての交代性を示すのであれば、展開式（定義式）の和の部分を

$$\sum_{j\neq k, j\neq l} (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2j}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nj}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{k+1} a_{1k} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2k}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nk}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{l+1} a_{1l} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2l}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nl}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

といった分け方にして帰納法の仮定を使う。あるいは、線型性を確かめたあとで、２つの列を等しいとした場合に値が 0 になることを示す。これは次の仕組みに基づく。

n 次列ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ を変数とする関数 $f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ が $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ それぞれについて線型性（分配法則）をみたせば、$f(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) = -f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ がすべての $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ について成り立つこと（交代性）と $f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$ がすべての $\overrightarrow{a}$ について成り立つことは同値。実際、交代性で $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ とおけば、$f(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}) = 0$ であり、逆にこれがすべての $\overrightarrow{c}$ で成り立てば、次の等式から交代性が従う。

$$0 = f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + f(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + f(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}).$$

問 5.1. $n = 4$ のときに上の3つの性質を確かめよ。少し しつこいかな。

問 5.2. 連立一次方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{t}$ の解 $x_1, \ldots, x_n$ は $|A|x_j = \det(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{j-1}}, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{a_{j+1}}, \ldots, \overrightarrow{a_n})$ をみたす[*43]。これを行列式の性質（列に関する線型性と交代性）から導け。ヒント：右辺を書き直して左辺を導く。

[*43] クラメルの公式 (Cramèr's rule) と呼ばれ有名であるが、重要度は低い、少なくとも高くはない。他にも Hamilton-Cayley の定理というのがその類か。

ここで、一旦 行列式から離れて、行列の縦横入替えの操作を導入する。まず、行列の積の基本は次の内積型計算であったことを思い起こそう。

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

ここで、右辺の数は

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書くこともできるので、a と b を入替え、さらにベクトルの縦横も入れ替えても等しい数が現れる。この操作を行列に拡張し、$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ の**転置行列***44(transposed matrix *45) ${}^tA$ を ${}^tA = (a_{ji})$ で定める。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

転置は二度繰り返すと、${}^t({}^tA) = A$ のように元の行列に戻り、列ベクトルの転置は行ベクトル、行ベクトルの転置は列ベクトルであることに注意。

命題 5.1. 積の転置について、${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$ が成り立つ (積の順番に注意)。

Proof. 実際、$AB = C = (c_{ik})$ とし、転置行列の成分を ${}^tc_{ki}$ のように書けば、${}^tc_{ki} = c_{ik}$ などとなるので、

$${}^tc_{ki} = c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} = \sum_j {}^tb_{kj} \, {}^ta_{ji}$$

より、${}^tC = {}^tB \, {}^tA$ であることがわかる。

もう少し実体に則した説明をすると、行列の積のもとになる内積型では、

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

のように、縦横入替えについての不変性が成り立ち、それを並べる際にも縦横の入替えを施したものが、一方で ${}^tB{}^tA$ であり、一方で ${}^t(AB)$ になる、というのが等式成立の理由である。 □

*44 転置行列を表わす記号としては A^T のような書き方もあるが、これだと行列 A の T 乗と紛らわしい、かな。

*45 最近は、transpose を名詞として使って the transpose of a matrix ということが多い。転置操作は transposition という。

例 5.2. 行ベクトル $\overleftarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ の転置を $\overrightarrow{b}$ で表わせば、${}^t\overrightarrow{b} = \overleftarrow{b}$ であり、

$$\begin{aligned}
{}^t(A\overrightarrow{b}) &= ((a_{11}, \ldots, a_{1n})\overrightarrow{b}, \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})\overrightarrow{b}) \\
&= ((b_1, \ldots, b_n)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, (b_1, \ldots, b_n)\begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}) \\
&= (b_1, \ldots, b_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \overleftarrow{b}\,{}^tA
\end{aligned}$$

のように積がひっくり返る。

行列式の性質として基本的なものが次の定理である。（証明については、節を改めて述べる。）

定理 5.3.

(i) 線型性・交代性は行ベクトルについても成り立つ。
(ii) 行に関する展開式、列に関する展開式が成り立つ。展開式の符号は市松模様 (chess board rule)。
(iii) 転置行列の行列式は元の行列式に等しい。
(iv) A, B を n 次の正方行列とするとき、$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

系 5.4.

(i) 行列式の中に同じ行または列があれば、行列式の値は 0。
(ii) ある行 (列) の定数倍を他の行 (列) に加える操作（ずらし）で行列式の値は変化しない。

行列式の具体的な計算においては、行あるいは列に関する展開を行う前に、上の系 (ii) の性質を利用して、特定の行あるいは列にできるだけ多くの 0 成分を含むように加工するとよい。連立一次方程式を解く際の加減法に似ていることに注意。成分の 0 を増やすことの前処理として、同じ数を含む行あるいは列を増やす、というのもある。ただし、一定の方針を決めないでこれを行うと、0 の場所があちこちに移動するだけの堂々巡りに陥いる。

例 5.5. 4 行 4 列の計算例。途中経過を変えることで検算にも利用する。

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 & a+3 \\ a+11 & a+12 & a+13 & a+4 \\ a+10 & a+15 & a+14 & a+5 \\ a+9 & a+8 & a+7 & a+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 & a+3 \\ 11 & 11 & 11 & 1 \\ 10 & 14 & 12 & 2 \\ 9 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

ここで、3 行目から 2 をくくり出したあとで、2 行目の 11 を 0 にする計算を実行すると、

$$2\begin{vmatrix} -10a-33 & -10a-32 & -10a-31 & a+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -5 & 1 \\ -18 & -22 & -23 & 2 \end{vmatrix}$$

そこで、$b = -10a - 33$ とおいて、2 行について展開すれば、

$$2\begin{vmatrix} b & b+1 & b+2 \\ -6 & -4 & -5 \\ -18 & -22 & -23 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b & b+1 & b+2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 18 & 22 & 23 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b & b+1 & b+2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 0 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} b & b+1 & b+2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

このあたりで 0 を作る作業は切り上げて、最後の行列式を 1 列について展開すれば、

$$4\left(b\begin{vmatrix}4 & 5\\ 5 & 4\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}b+1 & b+2\\ 5 & 4\end{vmatrix}\right) = 12(12-b) = 60(2a+9).$$

ということで、a に適当な数字を入れると、行列式の計算問題が無数に作れる。

例 5.6.

$$\det\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 0.$$

例 5.7. 三角行列 (triangular matrix) の行列式。

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

問 5.3. $|tA| = t^n|A|$ を示せ[*46]。

問 5.4. ($\sharp$) 座標平面内の 3 点 (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ が同一直線上にないとき、この 3 点を通る円の方程式は

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2 & x & y & 1\\ a_1^2+b_1^2 & a_1 & b_1 & 1\\ a_2^2+b_2^2 & a_2 & b_2 & 1\\ a_3^2+b_3^2 & a_3 & b_3 & 1\end{vmatrix} = 0.$$

問 5.5 (*). Vandermonde 行列式の計算。右辺の鳥居のような記号 (π の大文字) は、積をとる操作を表わす。

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j - \lambda_i).$$

6 行列式の特徴づけ

行列式を n 次列ベクトル $\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ の関数 $\det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n})$ と思ったとき、(i) 列に関する線型性、(ii) 列に関する交代性、(iii) 規格化条件 $\det(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = 1$ を満たす。ここで、

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

は単位行列を縦割にしたとき現れる列ベクトルの集団で**基本ベクトル**[*47]と呼ばれる。この節の目標は、この性質が行列式を特徴づけていること。

[*46] そそっかしい人は、$|tA| = |t|\,|A|$ などとやらかす。その点、$\det(tA)$ だとさすがに慎重になれるかな。

[*47] これは日本だけの言い方のようで、該当する英語はなさそう。基本ベクトルの集団であれば、standard basis と呼べるのであるが、個々のベクトルを fundamental vector とか standard vector とは呼ばない。苦し紛れに standard basis vectors と呼んでる英語の本を目にしたことはあるが。

目標： n 個のベクトル $\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ の関数 $f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n})$ で、線型性と交代性を満たすものがあれば、それは行列式の定数倍になる。さらに規格化条件もみたせば、行列式に一致する。

数字 $1, 2, \cdots, n$ を並べ換えたものを n 次の**並換え**[*48](permutation) とよび記号 σ, τ 等で表わす。また、並換え σ の i 番目の数字を $\sigma(i)$ で表わす：$\sigma = (\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$.

例 6.1. $\sigma = (3, 1, 2), \quad \tau = (3, 5, 1, 4, 2)$ のとき、

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2, \quad \tau(1) = 3, \tau(2) = 5, \tau(3) = 1, \tau(4) = 4, \tau(5) = 2.$$

以下の証明で、n を具体的に取ることが理解の助けになるとも思えぬのであるが、どうしてももやもや感が払拭できなければ、$n = 3$ の場合を具体的に書き切ってみるとよいだろう、手間を惜しまずに。

補題 6.2. 与えられた n 次の並換え σ に対して

$$f(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \overrightarrow{e_{\sigma(n)}}) = \det(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \overrightarrow{e_{\sigma(n)}}) f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}).$$

Proof. 等式

$$f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = \det(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$$

から出発して左辺の f および右辺の det のなかの 2 つの列ベクトルを入れ替えるたびに両辺の符号が同時に反転し、上の式の等号が成り立ち続ける。勝手な並換えはこのような 2 つの入れ替えを何回か繰り返して得られるので、補題の等式が一般の並換えでも成り立つ。 □

定理 6.3.

$$f(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = \det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}).$$

Proof. 基本ベクトルを使うことにより、$\overrightarrow{a_j}$ は

$$\overrightarrow{a_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{e_i}$$

と表示されるので、f の多重線型性により

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) &= f(\sum_{i_1} a_{i_1 1} \overrightarrow{e_{i_1}}, \cdots, \sum_{i_n} a_{i_n n} \overrightarrow{e_{i_n}}) \\ &= \sum_{i_1, \cdots, i_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} f(\overrightarrow{e_{i_1}}, \cdots, \overrightarrow{e_{i_n}}). \end{aligned}$$

f の交代性により、$i_1, \cdots, i_n$ のなかに同じ数字が 2 ヶ所以上現れると、$f(\overrightarrow{e_{i_1}}, \cdots, \overrightarrow{e_{i_n}}) = 0$ となる。このような場合を除くと上の和は $(i_1, \cdots, i_n) = \sigma$（$\sigma$ は並換え）という形のものだけを考えれば良いことがわかる。すなわち

$$f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} f(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \overrightarrow{e_{\sigma(n)}}).$$

この右辺で上の補題を使えば、

$$f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \det(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \overrightarrow{e_{\sigma(n)}}).$$

[*48] ここだけの言い方で「ならべかえ」と読む。通常は、置換ないし順列という実態にそぐわない用語が使われる。個々の並換えを表わす際に、ギリシャ小文字を使うのが慣例である。σ = sigma, τ = tau など。

一方 f として行列式 det をとると、行列式の規格化条件により

$$\det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \det(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \overrightarrow{e_{\sigma(n)}}).$$

これら 2 つの表示式を合わせると定理の主張が得られる。 □

系 6.4. *A, B を $n \times n$ 行列とするとき、$|AB| = |A|\,|B|$ が成り立つ。*

Proof. 行列 A は固定して、行列 B の列ベクトルを変数とする関数

$$f(\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_n}) = |AB|$$

を考える。$|AB| = \det(A\overrightarrow{b_1}, \cdots, A\overrightarrow{b_n})$ であるから f は再び定理の仮定を満たし、したがって

$$|AB| = f(\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_n}) = |B|\, f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = |B|\,|A|.$$

($f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = \det(A\overrightarrow{e_1}, \cdots, A\overrightarrow{e_n}) = \det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = |A|$ に注意。) □

並換え σ の**符号** (signature) を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \det(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \overrightarrow{e_{\sigma(n)}})$$

で定める。

この定義の仕方と行列式の性質から、並換えの符号は、もし並換えが 2 文字の入れ替えを偶数回行って実現されるならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$, 奇数回行って実現されるならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ となる。

系 6.5 (行列式の完全展開)**.**

$$|A| = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

とくに、行列式 $|A|$ は、a_{ij} について n 次の同次多項式 *(homogeneous polynomial)* である。

問 6.1. ($\sharp$) $n = 3$ の場合に上の完全展開式を具体的に書き下してみよ。

問 6.2. 勝手な並換えは、隣り合った 2 箇所の入れ替えを繰り返すことにより実現できる。(あみだ籤のしくみ。)

問 6.3. 並べかえ σ に伴う並べかえ行列 (permutation matrix) $P_\sigma = (\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \overrightarrow{e_{\sigma(n)}})$ について、$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}$ を確かめよ。ここで、$\sigma\tau$ は、並べかえを操作 (写像) と思ったときの合成 (積) であり、$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$ $(1 \leq i \leq n)$ という並べかえを表わす。

例 6.6. $(2, 3, \dots, n, 1)$ という特殊な並換えは $1 \to 2 \to \to \cdots \to n \to 1$ のように数字を巡回させるもので巡換え[*49] (cyclic permutation) と呼ばれる。この巡換えの符号は

$$\det(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \dots, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}|I_{n-1}| = (-1)^{n-1}$$

となるので、n が奇数であれば 1、偶数であれば -1 となる。

このことは、巡換えが、$1 \leftrightarrow n, 2 \leftrightarrow n, \dots, n-1 \leftrightarrow n$ という 2 文字の入れ替えを $n-1$ 回くり返して実現されることからもわかる。

[*49] 巡回置換ともいう。循環と音が重ならないように「めぐりかえ」と読む。

例 6.7. 並換えの符号と１５パズル。不可能性と解法のアルゴリズム。

少し一般化して縦横 $m \times n$ $(m, n \geq 2)$ の長方形を mn 個の小正方形に分割し、それに 1 から $mn-1$ までの数字と 1 個の空白を配置する状況を扱う。この $mn-1$ 個の数字の 2 次元配列をつづら折りに並べたもの（$mn-1$ 次の並換え）を考える（空白は取り除く）と、空白の横の移動で並換えは変わらず、空白の上下移動で奇数個の巡回移動が引き起こされるので、いずれの場合も並換えの符号は変わらない。ということで、符号が異なる並換えは空白の移動では実現されない。

逆に、並換えの符号が一致する 2 種類の配列は空白の移動で移り合えることを示すことができる。こちらはアルゴリズムの問題でもあり、詳しく書くと多少長くなるが概ね次のようなことになっている。

実際にゲームを行ってみるとわかるように、例えば一番上の行から数字の並びを整えていくと、最後の 2 行の手前までは難なく実現できる。ところが、同じことを下から 2 つ目の行で試みると、最後の行の並びが正しくなるとは限らず、そこでやり直しになる。

実は $m = 2$ の場合のゲームの解き方は、行ではなく列を例えば左から整えていくことで、最終的に $m = n = 2$ の場合に還元される。この最小サイズのゲームの場合、$mn - 1 = 3$ 次の並換えが問題になり、その可能な場合は $3! = 6$ 通りで、符号の正負で 2 組の 3 通りに分けられる。そうして、符号が一致するものどうしが空白の移動で実現可能であることがわかる。

問 6.4. (*) 上の説明を参考に、１５パズルの問題を仔細に検討する。

命題 6.8 (分解型行列式)**.** $m \times m$ 型行列 A と $n \times n$ 型行列 B に対して、

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\,|B| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix}.$$

Proof. 左辺に現れる $m+n$ 次正方行列を C とすると、$c_{ij} = a_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq m)$、$c_{m+k,m+l} = b_{kl}$ $(1 \leq k, l \leq n)$、$c_{m+k,j} = 0$ $(1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n)$ である[*50]。$m+n$ 次の並換え ρ による完全展開式

$$|C| = \sum_{\rho} \mathrm{sgn}(\rho) c_{\rho(1),1} \cdots c_{\rho(m+n),m+n}$$

で、$c_{\rho(1),1} \cdots c_{\rho(m),m}$ の部分に注目する。もし $\{\rho(1), \dots, \rho(m)\}$ の中に $m+1, m+2, \dots, m+n$ の数字が一つでも現れると $c_{\rho(1),1} \cdots c_{\rho(m),m} = 0$ となるので、$\{\rho(1), \dots, \rho(m)\} = \{1, 2, \dots, m\}$ であるようなものについてのみ和を取ればよい。すなわち、ρ としては、m 次の並換え σ と n 次の並換え τ を使って、

$$(\rho(1), \dots, \rho(m), \rho(m+1), \dots, \rho(m+n)) = (\sigma(1), \dots, \sigma(m), m+\tau(1), \dots, m+\tau(n))$$

と表される場合についての和が問題であるが、これは $\mathrm{sgn}(\rho) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$ に注意して、以下のように計算する。

$$\begin{aligned}
|C| &= \sum_{\sigma,\tau} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau) c_{\sigma(1),1} \dots c_{\sigma(m),m} c_{m+\tau(1),m+1} \dots c_{m+\tau(n),m+n} \\
&= \sum_{\sigma,\tau} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(m),m} b_{\tau(1),1} \dots b_{\tau(n),n} \\
&= \left(\sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(m),m} \right) \left(\sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau) b_{\tau(1),1} \dots b_{\tau(n),n} \right) \\
&= |A|\,|B|.
\end{aligned}$$

[*50] ということで、$*$ は、条件なしの範囲を表している。

□

問 6.5. 上の公式を

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |AB - 0C| = |AB| = |A|\,|B|$$

のように「証明」するのは大たわけ[*51]である。その理由を大たわけに何と説く。

問 6.6. n 次の正方行列 A の (i,j) 成分 $a_{i,j}$ が条件

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{for } i+j \geq n+2$$

を満たすとき、行列式 $|A|$ の値を $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n,1}$ の積で表せ。

完全展開式から即座に見えるものとして、行列式の微分について触れておくと、

命題 6.9. パラメータ t の微分可能な関数を成分とする正方行列 $C(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$ の行列式の微分は、

$$\det(c_1'(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)) + \det(c_1(t), c_2'(t), c_3(t), \ldots, c_n(t)) + \cdots + \det(c_1(t), \ldots, c_{n-1}(t), c_n'(t))$$

に一致する。

例 6.10. パラメータ t を含む n 次行列

$$C(t) = \begin{pmatrix} t & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

の行列式を求めてみよう。$t=0$ のときは、例 6.6 の巡換えの符号として $\det C(0) = (-1)^{n-1}$ である。一般の $\det C(t)$ を求めるために、その微分を上の命題により計算する。分解型行列式の公式を使うと、

$$\det(c_1(t), \ldots, c_i'(t), \ldots, c_n(t)) = \begin{vmatrix} A(t) & * \\ 0 & B(t) \end{vmatrix} = \det A(t) \det B(t) = t^{i-1} t^{n-i} = t^{n-1}.$$

ただし、i 次正方行列 $A(t)$ と $n-i$ 次正方行列 $B(t)$ は次の形のものである。

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

しがかって、$\det C(t)$ の微分が nt^{n-1} となるので、それを $t=0$ から t まで積分すると、

$$\det C(t) - \det C(0) = t^n \iff \det C(t) = t^n + (-1)^{n-1} \ (n \geq 2)$$

がわかる。

[*51] 行列といえども人の命に関わりかねない世の中、扱っている量を正しく認識することは極めて重要である、と肝に銘じる。

定理 5.3（行列式の性質）の証明

まず、行についての交代性を示そう。i 行と j 行 $(i < j)$ を入れ替えることにして、行列 $A = (\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n})$ の i 行と j 行を入れ替えたものを A' で表わし

$$f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = |A'|$$

とおく。行列式の列に関する性質（これは既に確かめてある）を使って、f が列についての線型性と交代性を満たすことがわかる。そこで上の定理を適用すれば

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) &= \det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) \\ &= \det(A)|I'|. \end{aligned}$$

ところが I' は単位行列の i 列と j 列を入れ替えたものに等しいので、列に関する交代性と規格化条件により $|I'| = -|I| = -1$ であることに注意すると、

$$|A'| = f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = -|A|.$$

次に特定の i 行に注目して、その i 行を一つ前の行と次々入れ替えて最初の行に持ってきて行列式の帰納的定義式 (1 行目に関する展開) を使えば、i 行に関する展開式

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

が得られる。ここで、A_{ij} は A から i 行と j 列を取り除いた残りの $(n-1) \times (n-1)$ 行列を表わす。A_{ij} は i 行の成分を含まないから、i 行目に関する線型性は上の展開式から明らか（i 行目の成分の 1 次式で書ける)。

次に転置行列についての性質を示そう：今度は、$f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = |{}^tA|$ と置く。証明したばかりの行に関する線型性・交代性により、f は定理 6.3 の仮定を満たす。そこで $f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = |{}^tI| = |I| = 1$ に注意して、

$$|{}^tA| = f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = |A| f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = |A|.$$

この転置に対する不変性と行に関する展開式から列に関する展開式が得られる。

問 6.7. 以上の説明を参考に証明の細部を埋めよ。

問 6.8 (*). 行列式は、n^2 個の文字（成分）の多項式として因数分解されない (既約である)。

行列式の幾何学的意味

平面の上のベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ を考える。$S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ で 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ から作られる平行 4 辺形の面積を表わす。ただし、$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ がこの順序で時計回り[*52]の位置にあるときには、面積の値にマイナス符号をつけ

[*52] 角度を測るときの符号の選び方でも使われる、直感的には明らかな時計回りであるが、数学としての定義は、それほど明らかではない。これは、平面の向きに 2 つの選び方があることに対応しているのだが、問題は、物質的ないし物理的裏付けのない状況で「正の向き」は決められないということ。これに関連したものに空間座標の選び方における右手系・左手系というのがあり、こちらは、平面の向きの存在のようには直感的に明らかではないものの、数学的には、座標変換の変換行列の行列式の符号として捉えられるものである。もう少し感覚的な説明を試みると、座標系の選び方で連続変形で互いに移り合うものを考えると 2 つの種類に集約することがわかるので、それに右手系・左手系という名前を当てているわけであるが、問題は、どちらが右でどちらを左と呼ぶべきかは数学的には定まらず、その弁別は物理現象に頼らざるを得ないということ。具体的には、人間の身体の 3 次元的非対称性を基準にしての選別という他ない。虚数単位の定義にも通底するビュリダンのロバ (Buridan's ass) の悩ましさ。

たものを $S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ とする。平行４辺形の面積が平行変形で不変であることから

$$S(\overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

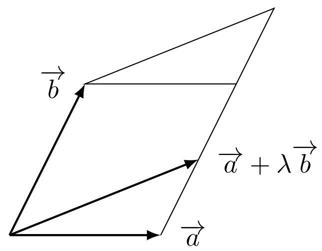
等が成り立つ。これから S の（多重）線型性が出てくる：

$$\begin{aligned} S(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) &= S(\overrightarrow{a} + \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = S((1+\alpha)\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (1+\alpha)S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \\ &= S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + S(\alpha \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + S(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}). \end{aligned}$$

また定義から S は交代性をもつ。従って基本定理により

$$S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) S(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).$$

すなわち２次の行列式は**平行４辺形の符号つき面積** (signed area of parallelogram) を表わす。同様の考察により３次の行列式は**平行６面体の符号つき体積** (signed volume of parallelepiped) を表わすことがわかる。



問 6.9. 体積の符号をどう定めるべきか考え（ヒント：右手系と左手系)、$\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ が、$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を稜とする平行６面体の符号付き体積に一致することを確かめよ。

例 6.11. 同一直線上にない３点 (a_j, b_j, c_j) $(j = 1, 2, 3)$ を通る平面の上の点 (x, y, z) は、３つのベクトル $(a_j - x, b_j - y, c_j - z)$ の張る平行６面体の体積が 0 であることから、次の方程式をみたす。

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & b_1 - y & c_1 - z \\ a_2 - x & b_2 - y & c_2 - z \\ a_3 - x & b_3 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

問 6.10. ($\sharp$) 同一直線上にない３点 (a_j, b_j, c_j) $(j = 1, 2, 3)$ を通る平面の方程式は、次のように書ける[*53]。

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

問 6.11. 空間内の４点 O, A, B, C を頂点とする三角錐（４面体）の体積は $\dfrac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})\right|$ である。

例 6.12 (ベクトル積)**.** ここでは、縦横の区別をしない幾何ベクトルの成分表示について考える。２つの平行でないベクトル $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して、ベクトル

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

[*53] これを面白いと見るか、くだらんと思うか、何も感じないか。面白うて、やがて虚しき母式かな。

は、$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ と直交し、その大きさが $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の張る平行四辺形の面積に一致する。これを**ベクトル積**[*54] (vector product or cross product) という。

問 6.12. $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ に注意して、上の性質を導け。

問 6.13. 等式 $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$ を確かめ、これから $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}) - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2$ を導け。

問 6.14. 3 次元空間内の点の運動のベクトル表示 $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(a \leq t \leq b)$ において、速度ベクトル $\frac{d}{dt}\overrightarrow{r}(t)$ が $\overrightarrow{r}(a) \times \overrightarrow{r}(b)$ と直交するような時刻 $a < t < b$ が存在することを Rolle の定理から導け。

とくに、運動が平面 $z = 1$ に限定されているばあいには、$(x(b) - x(a))y'(t) = (y(b) - y(a))x'(t)$ となる $a < t < b$ が存在する。（これをコーシーの平均値定理という。）

7 連立一次方程式

いささか唐突ではあるが鍵言葉の定義を：サイズの等しい有限個の列ベクトル $\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_l}$ に対して、$\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_l\overrightarrow{x_l}$ ($\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ はスカラー) の形のベクトルを $\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_l}$ の**一次結合**[*55] (linear combination) という。この一次結合を許容することが線型性の肝とでも言うべきもので、これまでにも様々な形で経験したところであるが、これからもくり返し出会うことになる。

さて、A を $m \times n$ 行列とし、連立一次方程式[*56] (a system of linear equations)

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を考える。このように定数項が零である方程式を斉次型 (homogeneous) といい、列ベクトルの集合

$$S = \{\overrightarrow{x}; A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}$$

をその**解空間** (the space of solutions) とよぶ。当然のことながら $\overrightarrow{0} \in S$ であり、これを自明な解 (trivial solution) と呼ぶ。解空間の基本的な性質として、解空間に属するベクトル $\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_l}$ の一次結合は再び解空間に属すること、を注意しておく。実際、$\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_l} \in S$ であれば、行列の積についての分配法則を使って、

$$A(\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_l\overrightarrow{x_l}) = \lambda_1 A\overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_l A\overrightarrow{x_l} = \overrightarrow{0}$$

より、$\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_l\overrightarrow{x_l} \in S$ がわかる。

連立一次方程式の意味から、ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対して、

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \iff B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \iff C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \iff D\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

[*54] 日本では、外積とか outer product ということもあるが、外積はまだしも、どちらも別の概念である。外積 (exterior product) は何次元でも考えられるものであるのに対してベクトル積は 3 次元だけである。また、outer product はテンソル積に関するもので内積 (inner product) の対比語ではない。

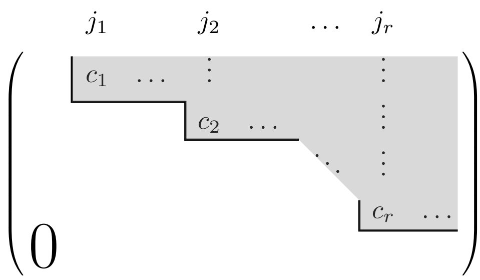
[*55] 線型結合ともいう。linear に対する日本語訳として、「一次」と「線型」が同程度に、しかも混在した形で使われる。「一次」の方は純一次式を意味する代数的形式を、「線型」の方は純一次式が示す性質を抽象化したものを、と言った感覚的な違いがあるか。

[*56] 線型方程式系という言い方をする人もいるが、その翻訳調が何とも。

ここで、B は A の２つの行を入れ替えた行列。C は A のどこかの行に別の行の定数倍を加えたもの。D は A のどれかの行に 0 でない数を掛けたものを表わす。言い換えると、連立１次方程式 $A\overrightarrow{x} = 0$ の解空間は、行列 A に次の３種類の操作を施して行列の形を変えていっても変化しない。

(i) A の行を入れかえる。
(ii) A のいずれかの行の定数倍を別の行に加える。
(iii) A の何れかの行に 0 でない数を掛ける。

連立１次方程式の解法の基本は、この３種類の操作＝行基本変形 (elementary row operarion) を繰り返すことにより、与えられた行列を**階段行列**[*57](matrix of echelon form) に書き改める (**掃き出し法**[*58]) というものである。ここで、階段行列とは、左下に 0 がならび、上から一段ずつ零でない行成分が減っていく形のものをいう。（すべての行成分が零になったら、それ以降の行は零ベクトルが続く。）階段の角が現れる列を小さい順に $j_1, j_2, \dots j_r$ とすると、0 でない行が r 行続く階段行列ということになる。



Remark 5. 行列の掃き出し法による計算と行列式の計算が似ていることはすぐに認められるところではあるが、その違いを確認しておくと、(i) 行列式の計算では縦横（列と行）の操作が可能である一方で、(ii) 掃き出し計算では行の操作に限定される。(iii) 行列式では、定数倍と行の入れ替えで値が変わってくるのに対して、掃き出し計算では気にしなくてよい。

掃き出し計算の際に現れる行列の変形を表わす決まった記号はないようであるが、等号 $=$ を使ってはいけない。矢印記号が無難である。あるいは、掃き出し変形は同値関係になっているので $\sim$ を使い、上の B, C, D の操作であれば、$A \sim B \sim C \sim D$ のように書くのでもよい。

定理 7.1. 最初の二種類の操作をくり返すことで、全ての行列は階段行列に変形できる。さらに最後の操作も許すことで、階段の各コーナーの成分が 1 でコーナーを含む列の他の成分はすべて 0 であるような階段行列に変形することができる。このような階段行列を**簡約された**[*59]*(reduced)* と呼ぶ。

Proof. 行列を階段化するときは、必要に応じて行の交換を適宜行い、左列から右列へと掃き出しを行う。階段行列を簡約する際は、右下の段列から左列へと掃き出す。 □

例 7.2. 具体的な行列を上の二種類の操作で階段化する。行列の掃き出し計算は場所をとるので、複数の操作を適宜まとめて一つの同値変形として計算する。ただし、やみくもに行うと堂々巡りに陥る。確実に進めるには、掃き出す要 (かなめ、pivot という) を決めて、掃き切るようにする。

[*57] 階段というよりは段々畑のイメージで段々行列と呼びたいところであるが、大勢にしたがっておく。ちなみに、英語の echelon は、フランス語の échelle (はしご) に由来する軍隊用語で、段々状の陣形を意味する。
[*58] 欧米では、C. F. Gauss (1777–1855) にちなんで Gaussian elimination (ガウス消去法) などと称されるが、方法そのものは、紀元前１世紀ごろの中国で編纂された数学書「九章算術」に見られるという。掃き出しとは、めずらしくも粋な言いまわし。
[*59] 学術用語としては、還元の訳語をあてることが多いのであるが、いずれも硬すぎる。「切りつめ」で済んだものを。

問 7.1. ($\sharp$) 3 次正方行列の階段化として可能な形（段の位置パターン）をすべて列挙せよ。

定義 7.3. $m \times n$ 行列 A を階段行列に変形したときの 0 でない行の数を行列 A の**ランク**[*60](rank) と呼び $\mathrm{rank}(A)$ と書く。定義から、$\mathrm{rank}(A) \leq m$ かつ $\mathrm{rank}(A) \leq n$ である。ランクが階段行列の作り方によらないことは、少し後で示す。

Remark 6. 行についての操作の他に、列の入れ替え（すなわち変数の入れ替え）も許すことで、左上を単位行列（サイズがランクに等しい）に直すこともでき、そのサイズがランクに一致することもあり、これを掃き出し計算のゴールとして扱う本もあるので要注意である。このように掃き出し計算に列の操作を混入させてもランクには影響しないのであるが、連立一次方程式を解くという本来の目的のためには、どの変数を入れ替えたかの情報も必要となるため、掃き出しは行についてだけ行うとするのが賢明というもの。

例 7.4. 例 3.6 で扱った正方行列

$$A = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

は、$(s_1, \dots, s_n) \neq (0, \dots, 0)$, $\overleftarrow{t} = (t_1, \dots, t_n) \neq (0, \dots, 0)$ であればランク 1 である。というのは、A のすべての行は $\overleftarrow{t}$ の定数倍なので、その階段行列は $\begin{pmatrix} \overleftarrow{t} \\ \overleftarrow{0} \\ \vdots \\ \overleftarrow{0} \end{pmatrix}$ となるから。

逆にランク 1 の正方行列はこの形の階段行列に掃き出し変形を逆に施すことで、その行ベクトルはすべて $\overleftarrow{t}$ の定数倍になるので、

$$\begin{pmatrix} s_1 \overleftarrow{t} \\ \vdots \\ s_n \overleftarrow{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

問 7.2. 次の行列のランクが 3 であるための条件を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & a & d & f \\ 0 & 0 & b & e \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

連立一次方程式 (斉次型) の解法

階段行列に対して、変数（未知数）を、階段の角に対応するもの（段変数）とそれ以外の変数（自由変数）にわける。そうして、下の段から連立 1 次方程式を段変数について解いていく（自由変数は自由に選べるパラメータとして扱う）。

まず r 行の式から、x_{j_r} を変数 $x_{j_r+1}, \dots, x_n$ の 1 次式で表わすことができる。次に、$r-1$ 行の式から、$x_{j_{r-1}}$ を $x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_n$ で表わすことができるが、このうち x_{j_r} は、$x_{j_r+1}, \dots, x_n$ で表されるので、この段階で自由に選べる変数は、$x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_{j_r-1}$ の $j_r - j_{r-1} - 1$ 個。以下、これを繰り返すことで、$x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ をそれ以外の変数について解ききった式が得られる。

[*60] 階数という訳語も見かけるが、回数と音の区別がつかないこともあり、話す際は、外来語そのままにランクということが多い。行列の「位」で済んだものを。なお、ランクとは呼ぶものの、その実態は行列の肥満度といったところ。

階段行列が簡約された形のときには、この議論は次のように簡単になる：ベクトル $\overrightarrow{x}$ の成分を階段のコーナーとして現れる列成分 x' とそれ以外の成分 x'' に分ければ、考えている連立一次方程式は、x' が x'' の一次式で表される、という形になるので、x'' を任意定数 (パラメータ) として即座に解くことができる。

例 7.5. 階段行列に対する連立一次方程式の解き方と解の一次結合による表示のさせ方を具体例で検証する。

問 7.3. ($\sharp$) 次の４次行ベクトルの一次結合を二種類用意し、それを縦に並べることで、２行４列の行列を作り、計算練習を行う。また、求めた解空間の表示が正しいかどうかの検算方法についても確かめてみる。

$$(1, -1, 1, -1), \quad (0, 0, 2, 3).$$

問 7.4. m 次の列ベクトル $\overrightarrow{u} \neq 0$ と n 次の行ベクトル $\overleftarrow{v} \neq 0$ を使って $\overrightarrow{u}\overleftarrow{v}$ と表される $m \times n$ 行列のランクは 1 である。逆に、ランクが 1 の $m \times n$ 行列は、この形である。

サイズの等しい列ベクトルの集まり $\overrightarrow{v_1}, \cdots \overrightarrow{v_d}$ が、その中のどのベクトルも残りのベクトルの一次結合でかけないとき、言い換えると、

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$$

をみたすような数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ が自明なもの ($\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0$ の場合) に限るとき、ベクトルの集団 $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_d}$ は**１次独立** (linearly independent) であると言う。

問 7.5. 上の言い換えを確かめよ。

問 7.6. 一次独立なベクトルの集まり $\overrightarrow{v_1}, \cdots \overrightarrow{v_d}$ があれば、$\overrightarrow{0}$ は含まれず、同じベクトルが現れることもない。

いま、行列 A の階段行列への変形 A' が一つ得られたとすると、解空間 S に属するベクトルは、$(t_1, \cdots, t_d) = (x_1, \cdots, x_n) \setminus \{x_{j_1}, \cdots, x_{j_r}\}$ ($d = n - \mathrm{rank}(A)$) をパラメータとして、$t_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + t_d\overrightarrow{v_d}$ の形である。すなわち、S の勝手なベクトルは $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_d}$ の一次結合として表わされる。さらに、ベクトル $t_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + t_d\overrightarrow{v_d}$ の成分表示で、$j_1, \cdots, j_r$ 以外の成分には、$t_1, \cdots, t_d$ がそのままの形で現れることから、$\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_d}$ は一次独立となっていることがわかる。

例 7.6.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{pmatrix}$$

であれば、$r = 3$ であり、$(j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 5)$ となるので、$d = 6 - 3 = 3$ 個のパラメータ変数 x_1, x_4, x_6 を $t_1 = x_1$, $t_2 = x_4$, $t_3 = x_6$ と置き直すことで、解ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ -d \\ 0 \\ -e \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ -at_2 - ct_3 \\ -bt_2 - dt_2 \\ t_2 \\ -et_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

と表わされる。したがって、

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ -d \\ 0 \\ -e \\ 1 \end{pmatrix}$$

と置けば、ベクトル $t_1\overrightarrow{v_1} + t_2\overrightarrow{v_2} + t_3\overrightarrow{v_3}$ の 1, 4, 6 成分がそれぞれ t_1, t_2, t_3 となり、$t_1\overrightarrow{v_1} + t_2\overrightarrow{v_2} + t_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$ から $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ が得られるので、ベクトルの集まり $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ は一次独立であると分かる。

一般に、解空間 S の中から選んだベクトルの集まり $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_d}$ が

(i) 一次独立である、

(ii) S の勝手なベクトル $\overrightarrow{v}$ が $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_d}$ の一次結合として書ける、

なる 2 条件を満たすとき、その集団を解空間 S の**基底** (basis*[61]) とよぶ。連立一次方程式が自明であるとき、すなわち $A = 0$ で解空間 S がすべての列ベクトルから成るときは、S を省略して単に基底という言い方をする。基底の選び方には任意性が伴うことに注意する。

Remark 7. 基底といった場合には、配列の順番をも問題にするのが通例である。従って、$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_d}$ と $\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v_d}$ とは別の基底であると考える。このことを強調して、順序基底 (ordered basis) とか枠 (frame) と呼ぶこともあるが、正確には、順序というよりも基底を構成する個々のベクトルに識別するためのラベル（添字）を張りつけるという意味合のものである。

例 7.7. 基本ベクトルを並べたもの $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$ は基底である。これを**標準基底** (standard basis) と呼ぶ。

問 7.7. (♯) 階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に行の操作を施して、すべての成分が零とならない行列 A を一つ作れ。その作った行列に再度行の操作を施して、階段行列に変形し、斉次型連立一次方程式 $A\overrightarrow{x} = 0$ の解空間の基底を一組求めよ。

補題 7.8. A を $m \times n$ 行列、B を $n \times m$ 行列とし、$AB = I_m$ とすると、$m \leq n$ である。

Proof. 仮に、$m > n$ としよう。B の階段行列への変形を考えれば、$B\overrightarrow{x} = 0$ となる m 次の列ベクトル $\overrightarrow{x} \neq 0$ が存在する。ところが、$AB\overrightarrow{x} = I_m\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ だから矛盾。

[別解] $m > n$ と仮定する。行列 A にサイズ m の零列ベクトルを $m - n$ 個付け加えた $m \times m$ 行列を A' とし、行列 B にサイズ m の零行ベクトルを $m - n$ 個付け加えた $m \times m$ 行列を B' で表せば、簡単な計算で $AB = A'B'$ であることがわかるので、

$$1 = |I_m| = |A'B'| = |A'||B'| = 0$$

となって矛盾である。 □

*[61] 意味は土台。というか、土台と呼んで不都合があるのか。規定やら規程やら既定やらと識別するためにも土台と呼んであげたい。

定理 7.9 (掃き出し定理)**.**

(i) 連立一次方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ の解空間には基底がかならず存在する[*62]。

(ii) 解空間 S の基底を構成するベクトルの個数は基底の選び方によらずに一定である。

(iii) 行列のランクは、階段行列の作り方によらない。

Proof. (i) はすでに見た。(ii) を見るために $\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_r}$, $\overrightarrow{y_1}, \cdots, \overrightarrow{y_s}$ を 2 組の基底としよう。基底の性質 (ii) により、

$$\overrightarrow{x_i} = \sum_j b_{ji}\overrightarrow{y_j}, \quad \overrightarrow{y_j} = \sum_i c_{ij}\overrightarrow{x_i}$$

と書ける。これらを相互に代入して基底の性質 (i) を使うと、

$$BC = I_s, \quad CB = I_r$$

という関係が得られる。ここで、上の補題を使えば、$r \leq s$, $s \leq r$, すなわち $r = s$ である。

(iii) は、ランクとパラメータの個数との関係および (ii) の主張よりわかる。 □

系 7.10. 解空間の基底を構成するベクトルの個数と行列のランクの和は n に等しい。

定義 7.11. 解空間 S の基底を構成するベクトルの個数を S の**次元** (dimension) とよび、記号 $\dim S$ で表わす。$S = \{\overrightarrow{0}\}$ のときは、$\dim S = 0$ であることに注意。

一般の連立一次方程式の解法

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

を解くには、$m \times n$ 型行列 A の右側に列ベクトル $\overrightarrow{b}$ を付け加えた $m \times (n+1)$ 行列 $B = (\overrightarrow{a_1}, \ldots \overrightarrow{a_n}, \overrightarrow{b})$ を階段行列に変形し、方程式

$$B\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

が

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix}$$

という形の解をもつかどうか調べる。その際、B の階段行列化から、最下行と最右列を取り除いたものが、A の階段行列化に一致することに注意する。

- 行列 B の階段形で、最下段の角が $n+1$ 列に現れた場合には、このような解は存在しない（$y_{n+1} = 0$ となってしまうので)。
- それ以外の場合には、y_{n+1} の値を自由に選べるので、$y_{n+1} = -1$ である解が存在する。さらに、そのように選んでもなお $n - \mathrm{rank}(B) = n - \mathrm{rank}(A)$ だけの個数の自由に選べるパラメータが残る。

[*62] $S = \{0\}$ のときも 0 個のベクトルからなる基底が存在すると思う。空集合から空集合への写像がちょうど一つ存在する $(0! = 1)$。

とくに、未知数の数と方程式の数が一致する $m=n$ の場合で、A のランクが n であるとき（最も普通の場合）には、B の簡約階段行列が

$$C=\begin{pmatrix}1 & & \text{\Large 0} & c_1\\ & \ddots & & \vdots\\ \text{\Large 0} & & 1 & c_n\end{pmatrix}$$

の形になるので、

$$C\begin{pmatrix}\vec{x}\\ -1\end{pmatrix}=\vec{0} \iff \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

が求める解である。すなわち、解はちょうど一つ存在し、それが C の右端に現れる。

例 7.12. 連立一次方程式

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

を解いてみよう。

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & b_1\\ 1 & 3 & 2 & b_2\\ 2 & 4 & 3 & b_3\end{pmatrix}$$

の簡約階段行列 B' を求めると、

$$B'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -b_1-b_2+b_3\\ 0 & 1 & 0 & -b_1+2b_2-b_3\\ 0 & 0 & 1 & 2b_1-2b_2+b_3\end{pmatrix}$$

となるので、$\vec{x}$ は $B'\begin{pmatrix}\vec{x}\\ -1\end{pmatrix}=\vec{0}$ を解いて、

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-b_1-b_2+b_3\\ -b_1+2b_2-b_3\\ 2b_1-2b_2+b_3\end{pmatrix}.$$

例 7.13. 次に連立一次方程式

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

の解を調べよう。

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & b_1\\ 1 & 3 & 2 & b_2\\ 2 & 4 & 3 & b_3\end{pmatrix}$$

の階段行列 B' を求めると、

$$B'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & b_1\\ 0 & 2 & 1 & b_2-b_1\\ 0 & 0 & 0 & b_3-b_1-b_2\end{pmatrix}$$

となるので、 $B'\begin{pmatrix}\overrightarrow{x}\\-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{0}$ を満たす $\overrightarrow{x}$ があるのは、$b_3-b_1-b_2=0$ の場合に限り、このとき、斉次連立一次方程式 $B\overrightarrow{y}=\overrightarrow{0}$ の解は、y_3, y_4 を自由変数として、

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=y_3\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\end{pmatrix}+y_4\begin{pmatrix}-(3b_1-b_2)/2\\(b_1-b_2)/2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

と表わされるので、$y_4=-1$ とおき、$\overrightarrow{x}$ の部分を取りだすと、$A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ $(b_3=b_1+b_2)$ の解は

$$\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}-(3b_1-b_2)/2\\(b_1-b_2)/2\\0\end{pmatrix}+y_3\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

と表わされる。ここで、$x_3=y_3$ は、方程式 $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ についての自由変数であることに注意。

問 7.8. (*) 与えられた $m\times n$ 行列 A の簡約階段行列は一つしかないことを n についての帰納法で示せ。とくに、階段の段差を生じる列の場所 $(j_1,j_2,\cdots,j_r)$ は、階段行列のとり方によらず A だけで決まる。

8 逆行列と基底

$n\times n$ 行列 A に対して

$$AB=BA=I_n$$

となる $n\times n$ 行列 B を A の**逆行列** (inverse matrix) という。A の逆行列は、あっても一つしかない。実際、C も A の逆行列であったとすると、$I=AC$ に左から B をかけて、$B=BAC=IC=C$ となって一致する。A だけで決まるので A^{-1} と書く[*63]。逆行列が存在する行列のことを可逆 (invertible) とか正則 (non-singular) と称するのだが、以下では「逆 (行列) をもつ」ということにする。

例 8.1. 連立一次方程式 $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ の係数行列 A が逆をもてば、連立一次方程式はちょうど一つ解をもち、解は $\overrightarrow{x}=A^{-1}\overrightarrow{b}$ で与えられる。

命題 8.2. 逆行列について、以下が成り立つ。

(i) 逆行列の逆行列：$(A^{-1})^{-1}=A$.

(ii) 積の逆行列：$(A_1A_2\cdots A_r)^{-1}=A_r^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

(iii) 転置と逆行列：${}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}$.

逆をもつ行列に対しては、その負冪を $A^{-n}=(A^{-1})^n$ で定め、$A^0=I$ とおくことで、指数法則が整数指数についても成り立つ。すなわち、整数 k,l に対して、$A^kA^l=A^{k+l}$, $(A^k)^l=A^{kl}$ である。

問 8.1. 以上を確かめよ。

問 8.2. n 次正方行列 A,B が $AB=BA$ を満たし、A が逆をもてば、$A^kB=BA^k$ (k は整数) である。

[*63] 英語読みすれば「A inverse」であるが、日本語としては「A の逆」でよい。

定義 8.3. 自然数 $1 \le i, j \le n$ に対して、(i,j) 成分のみが 1 で残りの成分が 0 である正方行列を $E_{i,j}$ と書き、**行列単位**[*64](matrix unit) と呼ぶ。また、$S_{i,j}(s) = I_n + sE_{i,j}$ $(i \neq j)$、$D_i(r) = I_n - E_{i,i} + rE_{i,i}$ $(r \neq 0)$ および $T_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ の形の行列[*65]を**基本行列**[*66](elementary matrix) とよぶ。

$$S_{i,j}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & s & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

例 8.4. 基本行列は逆をもち、その逆行列も基本行列である。

$$S_{i,j}(s)^{-1} = S_{i,j}(-s), \quad D_i(r)^{-1} = D_i(r^{-1}), \quad T_{i,j}^{-1} = T_{i,j}.$$

また、行列に対する 3 種類の**行基本変形**は、これら基本行列を左から掛けることで実現される。

命題 8.5 (Sylvester)**.** $m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B に対して、$\det(I_m - AB) = \det(I_n - BA)$.

Proof. ブロック行列に掃き出し法を適用すると

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$$

のようになるので、分解型行列式 (命題 6.8) を使えば、

$$|I_m - AB| = \begin{vmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{vmatrix} = |I_n - BA|.$$

□

逆行列と行列式の関係について調べよう。正方行列 A が逆をもてば $|A|\,|A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I_n| = 1$ から $|A| \neq 0$ であり、$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ がわかる。反対に $|A| \neq 0$ のとき、A は逆行列もつことを示そう。そのために、基本行列の積 B を左から掛けることで A を簡約階段行列 C に変形しておくと、$|C| = |BA| = |B|\,|A| \neq 0$ $(|B| \neq 0)$ である。したがって、階段行列が三角行列になっていることに注意すれば、$\mathrm{rank}(A) = n$ でなければならず、このとき、C は単位行列 I_n に一致するので、B (は基本行列の積として逆行列 B^{-1} をもつ) が $A = B^{-1}C = B^{-1}$ の逆行列である。

問 8.3. i 行 j 列を除いた $n-1$ 次の行列 A_{ij} から n 次の行列 C (adjugate[*67] matrix という) を $C = ((-1)^{i+j}|A_{ji}|)$ で定めるとき、$AC = CA = |A|I_n$ を示せ。とくに $|A| \neq 0$ のとき、$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C$ である。

[*64] 単位行列 (unit matrix) と混同しないように。これを嫌って最近は identity matrix という言い方もする。

[*65] Shear, Dilation, Transpose の頭文字から。

[*66] 英語の直訳よりも、ここは掃き出し行列と唱えるべきであるような。

[*67] これは、ラテン語由来の ad と jugate を組み合わせた数学業界の造語らしいが、ラテン語の用法にかなっているのかどうか。ちなみに C の (j,i) 成分を A の (i,j) 余因子 (cofactor) とよぶ。ということで、C は cofactor の c であった。ただし、余因子行列というときは C の転置を指すのが英語での慣習であるが、和書では adjugate matrix 自体を余因子行列ということもあるので注意。

定理 8.6 (行列代数の基本定理)**.** $n \times n$ 行列 A について、次は同値。

(i) A は逆行列をもつ。

(ii) $|A| \neq 0.$

(iii) 行列 A の縦割りを $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ とすると、$\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ は一次独立。

(iv) $\mathrm{rank}(A) = n.$

Proof. (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iv) は上で示した。(iii) $\iff$ $S = \{0\}$ であり、これが (iv) と同値であることは、掃き出し定理のところで見た。 □

系 8.7. n 次正方行列 A が逆行列をもつための条件は、さらに次のように言い換えられる。

(i) 勝手な列ベクトルが、行列 A の列ベクトルを並べたもの $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ の一次結合で書ける。

(ii) $AB = I_n$ となる正方行列 B が存在する。

(iii) $BA = I_n$ となる正方行列 B が存在する。

Proof. 逆行列をもつ A に対しては、$B = A^{-1}$ と取ることで (ii), (iii) が成り立つ。逆に、(ii), (iii) が成り立てば、両辺の行列式を比較することで、$|A| \neq 0$ がわかるので、A は逆行列をもつ。

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 勝手な列ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対して、$B\overrightarrow{x}$ の成分を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とすれば、

$$\overrightarrow{x} = AB\overrightarrow{x} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n}.$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): 基本ベクトルを $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ の一次結合で表した係数を並べた行列 B を考えると $AB = I_n$。 □

Remark 8. $n = 3$ のとき、行列式 $|A|$ はベクトル $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ を稜とする平行六面体の符号付き体積を意味するので、これが 0 でないこと（定理 (ii)）と 3 つのベクトルが同一平面上にないこと（定理 (iii)）は確かに同値である。

問 8.4. ($\sharp$) 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

が逆行列をもたないような t をすべて求めよ。

問 8.5. ($\sharp$) 座標空間において、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示される平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x-a & a' & a'' \\ y-b & b' & b'' \\ z-c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

と書けることを論証せよ。

例 8.8. §2 でみたように、座標空間 $\mathbb{R}^3$ の中の平面が一次方程式で表わされ、予め与えられた 3 点を通る平面の方程式が行列式で書かれるのであった。ここでは、これを高次元に一般化してみることで、逆行列と密接に関係する余因子が一次方程式の係数として現れることを観察しよう。

$\mathbb{R}^n$ 内の n 個の点（位置ベクトル）$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ を通る平らな図形の上の点 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ は、

$$\vec{x} = \vec{a}_n + t_1(\vec{a}_1 - \vec{a}_n) + \cdots + t_{n-1}(\vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n) = t_1\vec{a}_1 + \cdots + t_n\vec{a}_n \quad (t_1 + \cdots + t_n = 1)$$

とパラメータ表示される。とくに、$\vec{a}_1 - \vec{a}_n, \dots, \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$ が一次独立である場合の平らな図形は**超平面** (hyperplane) とよばれる。これを $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ についての連立一次方程式（x はパラメータと思う）の形

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n & \vec{x} \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

に書き直すと、$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ -1 \end{pmatrix}$ という 0 と異なる解をもつことが、$\vec{x}$ についての条件である。一方、最後の成分が 0 となる解 $\begin{pmatrix} \vec{s} \\ 0 \end{pmatrix}$ については、方程式を

$$s_1(\vec{a}_1 - \vec{a}_n) + \cdots + s_{n-1}(\vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n) = \vec{0}$$

と書き戻せるので、$\vec{a}_1 - \vec{a}_n, \dots, \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$ が一次独立であれば、$\vec{s} \neq \vec{0}$ となる解はない。かくして、上の連立一次方程式をみたす $\vec{t}$ があることと

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n & \vec{x} \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が同値である。（このように、パラメータ表示からパラメータを消去する際に行列式が現れることがよくある。）この左辺の行列式を最後の列について展開すると、定数項として行列式 $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ が、x_i の係数として、

$$(-1)^{n+i} \begin{vmatrix} (\vec{a}_1)_i & \dots & (\vec{a}_n)_i \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+i} \det((\vec{a}_1 - \vec{a}_n)_i, \dots, (\vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n)_i)$$

が現れる。ここで、$(\vec{a}_j)_i$ は $\vec{a}_j$ から i 行成分を除いた $n-1$ 次列ベクトルを表わす。これをさらに $(\vec{a}_n)_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ について展開すると、$(\vec{a}_n)_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ が 2 回以上現れる項が交代性から消え、$(\vec{a}_n)_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ が残る項の列を適宜入れ替え符号を前に出すことで、

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det((\vec{a}_1)_i, \dots, \widehat{(\vec{a}_j)_i}, \dots, (\vec{a}_n)_i)$$

を得る。すなわち、x_i の係数は 正方行列 $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ の (i,j) 余因子 C_{ji} を j について足したものに一致し、超平面の方程式として次を得る。

$$\sum_{i,j} C_{ji} x_i + |A| = 0.$$

とくに $\vec{a}_n = \vec{0}$ のとき、超平面は原点を通り、その方程式は

$$\sum_{i=1}^{n} C_{n,i} x_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \det((\vec{a}_1)_i, \dots, (\vec{a}_{n-1})_i)\, x_i = 0$$

で与えられる。

最後に、掃き出し法による逆行列の計算方法[*68]について触れておこう。逆行列をもつ行列 A を行基本操作により、階段行列 A' に変形すると、A' は対角成分に 0 でない数が並ぶ三角行列となる。そこで、さらに行基本操作を施して簡約しておくと、A' は単位行列 I_n となる。一方、A' は、左から基本行列を何個か掛けることで実現されるので、$I_n = A' = BA$ の形、ただし B は有限個の基本行列の積、である。これは、$B = A^{-1}$ を意味する。さて、行列 B の具体的な計算方法であるが、ブロック等式 $B(A\ I_n) = (BA\ B) = (I_n\ B)$ に着目し、この左辺が行列 $(A\ I_n)$ に行基本変形を施したものであること、右辺が（簡約）階段行列の形であることに注意すれば、$n \times 2n$ 行列 $(A\ I_n)$ から得られる簡約階段行列の右半分が B すなわち A の逆行列に他ならない。すなわち、$(A\ I_n) \sim (I_n\ A^{-1})$ である。

特殊な形の掃き出し計算ではあるが、説明の途中で出てきた事実の方がより重要なので、抜き出しておくと、

命題 8.9. n 次正方行列 A が逆行列を持てば、それは n 次基本行列を何個か掛けた形で書ける。

問 8.6. n 次正方行列 A, B が $AB = A + B$ を満たせば、$I_n - A$ と $I_n - B$ は互いの逆行列で、とくに $AB = BA$ となる。

9 部分空間の双対性

本来、行列も行列式も、縦横の違いは見かけの形式に過ぎず 本質的ではない。それにも係わらず、掃き出し法とそれに伴う階段行列・ランクは 行に偏ったものとして導入された。この節で、その歪みを取り除いておくことにする。なお、ここで扱う内容のうち、補題 9.3 と命題 9.5 以外は後の議論に直接の影響を及ぼさないので、省略して次に進むことも可能である。というよりも、飛ばして次に進み、後で必要になってから ここに戻ることを勧める。

以下、列ベクトル、行ベクトルの集まりが頻繁に そして対等に登場するので、それらを表わす記号をまず導入しておこう。その際、スカラーとして何を考えるかを明示する必要に迫られるので、今まで何となく、数＝実数、のようにしていたものを、次の対角化へ向けた準備も兼ねて、複素数にまで範囲を広げて考えることにする。これまでに学んだ行列計算も連立一次方程式の構造解析も、数の性質のうち使っているのは、加減乗除が可能であることだけであるので、複素数を成分あるいは係数にする場合でも何ら問題なく機能する[*69]ことを強調しておく。

そこで、複素数を成分とする $m \times n$ 行列全体を $M_{m,n}(\mathbb{C})$ という記号であらわし[*70]、とくに $M_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$, $M_{1,n}(\mathbb{C}) = {}^t\mathbb{C}^n$ とおく。それぞれ、n 次元列ベクトル全体、行ベクトル全体を表わす。また、列ベクトルと行ベクトルを矢印の向きで区別する代わりに、今後は列ベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ を基本に, 行ベクトルを ${}^tv \in {}^t\mathbb{C}^n$ のようにも書くことにする。

さて、零ベクトルを含む n 次元列ベクトルの集まり $V \subset \mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}^n$ の**部分空間**[*71] (subspace) であるとは、V が和とスカラー倍について閉じていること：すなわち、

$$v, v' \in V,\ \alpha \in \mathbb{C} \Longrightarrow v + v',\ \alpha v \in V.$$

*68 掃き出し法で逆行列を計算させることにいかほどの意味ありや、他に経験すべきことを差し置いてまで。
*69 もっと一般のもの、体 (field) とよばれる、であってもよい。逆に、数の範囲を有理数に制限して考えることも可能で、これはこれで意味のあることである。
*70 本当は、$M_{m,n}(\mathbb{C}) = {}^m\mathbb{C}^n$, $M_{n,1}(\mathbb{C}) = {}^n\mathbb{C}$, $M_{1,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ と書きたかったのだが、散々迷った挙句、断念。
*71 接頭辞 sub に「部分」を訳語として当てるのが慣例であるが、どうだろう。「下部」の方が音も似ていてよいと思うのだが。

このとき、有限個の $v_1, \cdots, v_l \in V$ と複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ に対して、$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_l v_l \in V$ であることに注意。$\{\mathbf{0}\}$ は最も小さい部分空間で、$\mathbb{C}^n$ はもっとも大きい部分空間となる。同様に、${}^t\mathbb{C}^n$ の部分集合で、和とスカラー倍について閉じているものを ${}^t\mathbb{C}^n$ の部分空間と称する。部分空間の幾何学的イメージは 原点を含み端のない平らな部分というものである。

次に、部分空間の**基底**と**次元**を解空間の場合と同じように定義する。掃き出し定理 7.9 の証明により、基底を構成するベクトルの個数は一定であるから、それを部分空間の次元と呼ぶわけである。

定義 9.1. 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ の解空間をここでは、$\ker A = \{v \in \mathbb{C}^n ; Av = 0\}$ という記号で表して、A の核 (kernel) と呼ぶ。さらに、$A\mathbb{C}^n = \{Av ; v \in \mathbb{C}^n\}$ とおいて、A の像 (image) と呼ぶ。これらは、それぞれ、$\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ の部分空間である。

例 9.2. 段数 r の階段行列 A について、$A\mathbb{C}^n$ は 基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_r}$ の一次結合全体であり、したがって $\dim A\mathbb{C}^n = r$。

問 9.1. ($\sharp$) $A = (\overrightarrow{a}_1, \cdots, \overrightarrow{a}_n)$ ($\overrightarrow{a}_j \in \mathbb{C}^m$) とする。$A\mathbb{C}^n$ が $\overrightarrow{a}_j$ の一次結合全体の集合であり、$\mathbb{C}^m$ の部分空間であることを確かめよ。

補題 9.3 (補充定理)**.** 一次独立なベクトルの集まり $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{C}^n$ があるとき、これに何個かベクトルを補って $\mathbb{C}^n$ の基底にすることができる。とくに $m \leq n$ である。

Proof. 標準基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ の中のベクトルで、$v_1, \cdots, v_m$ の一次結合で書けないものがあったときには、その書けないベクトルを v_{m+1} とおくと、$v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}$ は一次独立である。実際、

$$t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m + t_{m+1} v_{m+1} = 0$$

として、もし $t_{m+1} \neq 0$ であれば、

$$v_{m+1} = \frac{t_1}{t_{m+1}} v_1 + \cdots + \frac{t_m}{t_{m+1}} v_m$$

が $v_1, \cdots, v_m$ の一次結合となるので仮定に反する。したがって $t_{m+1} = 0$ であり、

$$t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m = 0$$

を得るので、$v_1, \ldots, v_m$ が一次独立であることから、$t_1 = \cdots = t_m = 0$ でもある。すなわち、$v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}$ は一次独立である。

この議論を繰り返すと、最終的に一次独立なベクトルの集団 $\{v_1, \cdots, v_l\}$ で、全ての基本ベクトル e_j がこれらの一次式で表されるものが出現する。勝手なベクトルは基本ベクトルの一次結合で書けるので、$\{v_1, \ldots, v_l\}$ の一次結合で全てのベクトルが表示される。すなわち、$(v_1, \cdots, v_l)$ は基底である。これと標準基底の個数を比較することで、$n = l \geq m$ もわかる。 □

命題 9.4. $\mathbb{C}^n$ の部分空間には基底が存在する。

Proof. 部分空間 $V \subset \mathbb{C}^n$ のベクトル $v_1, v_2, \cdots$ を一次独立であるように次々と取ってこよう。補題 9.3 により、その最大個数 m は n 以下である。このとき、$v_1, \cdots, v_m$ は V の基底となる。実際、勝手な $v \in V$ に対して、$v_1, \cdots, v_m, v$ は一次独立にならないので、

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$$

となる $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \lambda) \neq (0, \cdots, 0, 0)$ がある。$\lambda = 0$ のときは、$v_1, \cdots, v_m$ の一次独立性から、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ となるので、$\lambda \neq 0$ であり、$v = (\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_m v_m)/(-\lambda)$ は、$v_1, \cdots, v_m$ の一次結合で書ける。 □

ここで、部分空間 $V, W \subset \mathbb{C}^n$ に対して、その和 $V + W = \{v + w; v \in V, w \in W\}$ と共通部分 $V \cap W$ も部分空間であることに注意する。(一目でわからなければ、証明を書き下してみる。)

問 9.2. 部分空間 V, W に対して、$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$ を示せ。また、3 つの部分空間 U, V, W に対して、加減公式

$$\dim(U+V+W) = \dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)-\dim(U\cap W)-\dim(V\cap W)+\dim(U\cap V\cap W)$$

が成り立つかどうか調べよ。ここにもまた量子の影ひとつ。

次に、像の次元が行列のランクに一致することを確かめよう。行列 A の階段行列 A' への行変形は、基本行列を左から掛ける形で実現された。とくに、$A' = BA$ (B は基本行列の積として逆をもつ行列である)の形である。まず、ランクの定義と例 9.2 から、$\dim A'{}^n\mathbb{C} = \mathrm{rank}(A)$。さらに、部分空間 $A\mathbb{C}^n$ の基底 $(v_1, \cdots, v_l)$ に対して、$(Bv_1, \cdots, Bv_l)$ は、部分空間 $A'\mathbb{C}^n = BA\mathbb{C}^n$ の基底を与えるので、$\dim A\mathbb{C}^n = l = \dim A'\mathbb{C}^n = \mathrm{rank}(A)$ がわかり、次の前半を得る。

命題 9.5. $m \times n$ 行列 A に対して、$\dim A\mathbb{C}^n = \mathrm{rank}(A)$ であり、$\dim A\mathbb{C}^n + \dim\ker A = n$ が成り立つ。

Proof. 後半は、これと系 7.10 からわかる。あるいは、補充定理を使って次のように直接示すこともできる。

部分空間 $\ker A$ の基底 $(v_1, \ldots, v_d)$ を用意し、これにベクトルを補って $\mathbb{C}^n$ の基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ を作る。このとき、$Av_{d+1}, \cdots, Av_n$ は $A\mathbb{C}^n$ の基底である。実際、$A\mathbb{C}^n$ のベクトルは、$\{Av_1, \ldots, Av_n\} = \{0, \ldots, 0, Av_{d+1}, \ldots, Av_n\}$ の一次結合で書け、また、

$$\lambda_{d+1} Av_{d+1} + \cdots + \lambda_n Av_n = 0$$

とすれば、$\sum \lambda_k v_k \in \ker A$ がわかり、これが $\{v_1, \cdots, v_d\}$ の一次結合で書けることから

$$\sum_{k=d+1}^{n} \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j v_j$$

を満たす $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ がある。一方、$\{v_1, \cdots, v_n\}$ は一次独立であったから、これは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ を意味する。とくに $\lambda_{d+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ であり、$\{Av_{d+1}, \cdots, Av_n\}$ が一次独立であるとわかる。書けば長くなるが、単純な推論の単純な連なりに過ぎない。 □

問 9.3. ($\sharp$) $Bv_1, \cdots, Bv_l$ が $A'\mathbb{C}^n$ の基底であることを確かめよ。

系 9.6. 逆をもつ n 次正方行列 B に対して、$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$ である。とくに、列に関する基本変形を施しても行列のランクは変わらない。

Proof. $B\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$ に注意して、$\dim((AB)\mathbb{C}^n) = \dim(A(B\mathbb{C}^n)) = \dim(A\mathbb{C}^n)$ からわかる。 □

例 9.7. 行変形による階段行列 $A' = BA$ の形から、像 $A\mathbb{C}^n$ の基底を求めることができる。すなわち、階段の角が現れる列番号を $j_1, j_2, \ldots, j_r$ とし、それに対応する A の列ベクトルを並べた $(\overrightarrow{a_{j_1}}, \ldots, \overrightarrow{a_{j_r}})$ は、$A\mathbb{C}^n$ の基底となる。

実際、j を $j_1,\ldots,j_r$ 以外の列番号とし、解空間のベクトル $\overrightarrow{x}$ の自由に選べる成分を $x_k = 0$ ($k \notin \{j,j_1,\ldots,j_r\}$) かつ $x_j = 1$ と選べば、$A\overrightarrow{x} = 0$ は、$\overrightarrow{a_j}$ が $\{\overrightarrow{a_{j_1}},\ldots,\overrightarrow{a_{j_r}}\}$ の一次結合で書けることを意味する。とくに、$\dim A\mathbb{C}^n \leq r$ である。一方、$\dim A\mathbb{C}^n = r$ であるから、これは $\{\overrightarrow{a_{j_1}},\ldots,\overrightarrow{a_{j_r}}\}$ が一次独立であることを意味する。

なお、$\{\overrightarrow{a_{j_1}},\ldots,\overrightarrow{a_{j_r}}\}$ の一次独立性は次のようにしてもわかる。階段行列 A' を簡約しておけば、$e_k = B\overrightarrow{a_{j_k}}$ $(1 \leq k \leq r)$ となり、$e_1,\cdots,e_r$ が一次独立であることから、$\{\overrightarrow{a_{j_1}},\ldots,\overrightarrow{a_{j_r}}\} = \{B^{-1}e_1,\cdots,B^{-1}e_r\}$ も一次独立である。

問 9.4. ($\sharp$) このことを具体例で確かめよ。

Remark 9. m 次元 列ベクトルの集まり $\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ に対して、行列 $A = (\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n})$ を階段化した際に現れる角の列番号を $j_1,\ldots,j_r$ とすれば、$\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_m}$ の中の零でない最初のベクトルが $\overrightarrow{a_{j_1}}$ であり、$\overrightarrow{a_{j_1}}$ と独立な最初のベクトルが $\overrightarrow{a_{j_2}}$、$\{\overrightarrow{a_{j_1}},\overrightarrow{a_{j_2}}\}$ と独立な最初のベクトルが $\overrightarrow{a_{j_3}}$、以下同様 となっている。

掃き出し計算では、行に関する基本変形をくり返すのであるが、同様の操作は列についても可能で、こちらの方は基本行列を右からかけることで実現される。これを列に関する基本変形とよぶ。

命題 9.8. 単位行列の右あるいは下に零行列を付け加えた形の行列を正方階段行列、略して正段行列[*72]と呼ぶことにすれば、すべての行列は、行あるいは列に関する基本変形を繰り返すことで、正段行列に変形できる。そして、正段行列に含まれる単位行列のサイズが元の行列のランクに一致する。

系 9.9. $m \times n$ 行列 A に対して、$\mathrm{rank}({}^tA) = \mathrm{rank}(A)$ である。

Proof. 逆行列をもつ $m \times m$ 行列 B と $n \times n$ 行列 C で、BAC が正段行列となるものが取れる。そうすると、${}^t(BAC) = {}^tC{}^tA{}^tB$ は正段行列の転置として正段行列となり、${}^tA$ のランクと A のランクが一致する。 □

縦横の双対性

以上述べてきたことだけで通常の用には足りるはずであるが、縦横の対等性について さらに掘り下げてみよう。そのために、行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ には、既に見た列表示の連立一次方程式とは別に、行表示の連立一次方程式を対応させることができ、その解空間と「像」空間もまた行部分空間の例を提供することに注意する。それを

$$\mathrm{coker}A = \{{}^tv \in {}^t\mathbb{C}^m; {}^tvA = 0\}, \quad {}^t\mathbb{C}^mA = \{{}^tvA; {}^tv \in {}^t\mathbb{C}^m\}$$

と書いて、それぞれ、A の余核 (cokernel)、余像 (coimage) と呼ぶ[*73]ことにしよう。一つの行列には、核、像、余核、余像という合計４つの部分空間が付随することになるので、これら相互の関係が後の問題となる。

基底を使えば、すべての部分空間は、ある行列の (余) 像の形であることがわかる。同様のことは像を核（解空間）に置き換えても成り立つのであるが、これを見る前に、部分空間の双対性について述べておこう。

部分集合 $S \subset \mathbb{C}^n$ に対して、その余空間[*74] (dual complement) を

$$S^\perp = \{{}^tv \in {}^t\mathbb{C}^n; {}^tvw = 0 \text{ for any } w \in S\}$$

[*72] これを表わす用語はないようなので、ここだけの言い方。
[*73] cokernel と coimage の本来の定義は少し違うのだが、まあ、いいだろう。
[*74] これもここだけの用語である。英語では polar set とも呼ばれるので、余でなく極でよかったのであるが、cokernel, coimage に合わせて。あと、余空間を表わす記号として「直交補空間」のそれを流用しているので使い分けに注意。

で、部分集合 $T \subset {}^t\mathbb{C}^n$ の余空間を

$$T^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n; {}^twv = 0 \text{ for any } {}^tw \in T\}$$

で定めると、$S^\perp \subset {}^t\mathbb{C}^n$, $T^\perp \subset \mathbb{C}^n$ はそれぞれ部分空間となる。定義の意味から、$R \subset S \Longrightarrow S^\perp \subset R^\perp$ であり、$S \subset (S^\perp)^\perp$ となる[*75]。また、$(A\mathbb{C}^n)^\perp = \mathrm{coker}A$, $({}^t\mathbb{C}^m A)^\perp = \ker A$ であることにも注意。

補題 9.10. 列ベクトルの基底 $a_1, \cdots, a_n$ に対して、行ベクトルの基底 ${}^tb_1, \cdots, {}^tb_n$ で、${}^tb_j a_k = \delta_{j,k}$ となるものが存在する。

Proof. 行列 $A = (a_1, \cdots, a_n)$ の逆行列 B を $B = \begin{pmatrix} {}^tb_1 \\ \vdots \\ {}^tb_n \end{pmatrix}$ と行分割して得られる基底を ${}^tb_1, \cdots, {}^tb_n$ とすればよい。 □

命題 9.11. $(S^\perp)^\perp$ は、S を含む最小の部分空間となる。とくに部分空間 V に対して、$(V^\perp)^\perp = V$ が成り立つ。また、部分空間の次元について、$\dim V + \dim V^\perp = n$ が成り立つ。

Proof. 部分空間 V が S を含めば、$S \subset (S^\perp)^\perp \subset (V^\perp)^\perp$ であるから、前半は、$(V^\perp)^\perp = V$ に帰着する。

そこで、これと後半部分をまとめて処理するために、V の基底 $a_1, \cdots, a_m$ を用意し、それにベクトルを補って ${}^n\mathbb{C}$ の基底 $a_1, \cdots, a_n$ を作る。そうして、行ベクトルの基底 ${}^tb_1, \cdots, {}^tb_n$ を ${}^tb_j a_k = \delta_{j,k}$ であるようにとれば、${}^tb_{m+1}, \cdots, {}^tb_n$ は $V^\perp$ の基底を与える。実際、${}^tw \in \mathbb{C}^n$ を ${}^tw = \sum_{j=1}^n \beta_j {}^tb_j$ と表せば、

$${}^tw \in V^\perp \iff {}^twa_j = 0 \ (j = 1, \ldots, m) \iff \beta_j = 0 \ (j = 1, \ldots, m).$$

この段階で $\dim V + \dim V^\perp = m + (n - m) = n$ がわかる。さらに、$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \in \mathbb{C}^n$ が $(V^\perp)^\perp$ に入るための条件は、${}^tb_j u = 0 \ (j = m+1, \ldots, n) \iff \alpha_j = 0 \ (j = m+1, \ldots, n) \iff u \in V$. □

系 9.12. すべての部分空間 $V \subset \mathbb{C}^n$ は $V = \ker A$ の形である。

Proof. $V^\perp = {}^t\mathbb{C}^m A$ のように表せば、$V = (V^\perp)^\perp = ({}^t\mathbb{C}^m A)^\perp = \ker A$. □

問 9.5. $(S^\perp)^\perp$ は、S に含まれる有限個のベクトルの一次結合全体に一致する。また、$R \subset S$ ならば $R^\perp \supset S^\perp$ であり、$Q, R \subset {}^n\mathbb{C}$ に対して $(Q + R)^\perp = Q^\perp \cap R^\perp$ が成り立つ。

問 9.6. 2×4 行列 A を適当にとってきて、列に関する変形を施すことで、それを下階段行列に直し、A の余像と余核の基底をそれぞれ一組求めよ。

問 9.7. $m \times n$ 行列 A のランクが r であれば、一次独立なベクトルの集まり $\{u_1, \cdots, u_r\} \subset \mathbb{C}^m$, $\{v_1, \cdots, v_r\} \subset \mathbb{C}^n$ をとってきて、

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ \vdots \\ {}^tv_r \end{pmatrix}$$

と表わすことができる。

問 9.8. 連立一次方程式 $Av = b$ が解をもつための必要十分条件は $b \in (\mathrm{coker}A)^\perp$ となることである。

[*75] $v \in S$, ${}^tw \in S^\perp$ ならば ${}^twv = 0$ である。これを言い換える。

連立一次方程式の行列を使った解法では、行に関する変形を常用した。これは言い換えれば、$\ker A$ と ${}^t\mathbb{C}^m A$ を保存する変形に他ならない。一方、列に関する操作の方は coker$A$ および $A\mathbb{C}^n$ を維持するものになっている。上で見た部分空間に関する双対性は、その連動性を明確に示してくれる。ここまで理解すると、行列の縦横の操作が文字通り縦横にできて、そのような操作に対して、付随する 4 つの部分空間の次元（とくにランク）は一定であり続ける[*76]。

なお、この節の最初でも指摘したように、双対性に関する議論で必要なことは、数の範囲が加減乗除で閉じていることで、複素数あるいは実数に限るものではないことを再度強調しておく。

10 固有値と固有ベクトル

この節では、スカラーの範囲は、とくに断らない限り複素数とする。正方行列 D で次の形のものを**対角行列** (diagonal matrix) という。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \text{\Large 0} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ \text{\Large 0} & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

与えられた $n \times n$ 行列 A に対して、逆をもつ $n \times n$ 行列 T をうまく選んで $T^{-1}AT$ (A の相似変形という) が対角行列となるようにする操作を行列の**対角化** (diagonalization) と呼ぶ。対角化の直接の御利益は冪の計算が簡単になること。

ここで、行列の冪 (べき) について復習しておこう。正方行列 A と自然数 m ($m = 1, 2, \cdots$) に対して、A を m 回かけて得られる行列を $A^m = A \cdots A$ のように書いて A の m 乗とよぶのであった。指数法則 $(A^l)^m = A^{lm}$, $A^l A^m = A^{l+m}$ が成り立つことに再度注意。

問 10.1. 対角行列 D に対して、$D^2, D^3, \cdots$ の表示を与えよ。また、$(T^{-1}AT)^m = T^{-1}A^mT$ を確かめよ。

対角化行列を見つけるために、T を縦割りにして $T = (\overrightarrow{x_1}, \ldots \overrightarrow{x_n})$ と表わすと、$AT = TD$ という関係は

$$A\overrightarrow{x_j} = \lambda_j \overrightarrow{x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

となる。そこで、行列 A に対して、ベクトル $\overrightarrow{x} \neq 0$ が

$$A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}$$

なる関係（固有方程式という）をみたすとき、λ を A の**固有値** (eigenvalue)、$\overrightarrow{x}$ をその**固有ベクトル** (eigenvector) とよぶ。固有ベクトル $\overrightarrow{x}$ は、A の特性を表している特別な方向のベクトル、固有値 λ は A の固有ベクトルに対する効果が倍率として表わされる特別な数ということで、固有値と固有ベクトルは組で現れる。

ここでは 行列の対角化と結びつけて導入したのであるが、固有値・固有ベクトルの考えは はるかに汎用的なもので、対角化以外の場面でも重宝する。具体的には、例 3.7 の問題を解く 次のような使い方である。

[*76] 群の言葉を使えば、行列群 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の $M_{m,n}(\mathbb{C})$ への双作用に関する軌道の完全不変量がランクの意味である。

例 10.1. 連立一次漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n + b_1, \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n + b_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を A の固有値・固有ベクトルの組

$$A\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u}, \quad A\overrightarrow{v} = \beta\overrightarrow{v}$$

で、$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ が一次独立なもの（この場合は平行でないもの）が見つかったとして、上の漸化式を解いてみよう。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = s_n\overrightarrow{u} + t_n\overrightarrow{v}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v}$$

のように表したものを漸化式に代入すれば、

$$s_{n+1}\overrightarrow{u} + t_{n+1}\overrightarrow{v} = A(s_n\overrightarrow{u} + t_n\overrightarrow{v}) + p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v} = s_n\alpha\overrightarrow{u} + t_n\beta\overrightarrow{v} + p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v}$$

となるので、両辺の $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ の係数を比較すると、

$$s_{n+1} = \alpha s_n + p, \quad t_{n+1} = \beta t_n + q$$

のように、分離した形の二種類の単独な漸化式に帰着する。これは造作なく解けるであろうが、念のため書いておくと、

$$s = \alpha s + p, \quad t = \beta t + q$$

を満たす s, t があるとき、すなわち $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ のときは、

$$(s_{n+1} - s) = \alpha(s_n - s), \quad (t_{n+1} - t) = \beta(t_n - t),$$

と書き直すことで、$s_n = s + (s_0 - s)\alpha^n$, $t_n = t + (t_0 - t)\alpha^n$ と表されるので、x_n, y_n も具体的に表される。

$\alpha = 1$ であれば、$s_{n+1} = s_n + p$ は (s_n) が等差数列であることに他ならないので、$s_n = s_0 + np$ と求まる。$\beta = 1$ のときも同様。

行列 A の特性としては、固有値が最も重要な情報で、それは、パラメータ λ を含む連立一次方程式 $(\lambda I_n - A)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ が非自明な解 $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ を持つということである。ということで、パラメータ（文字）を含む掃き出し計算を実行することになる。

例 10.2. 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを掃き出し法で求めてみよう。

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda^2 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

であるから、これが $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ という解をもつ条件は $\lambda^3 - 2\lambda = 0$ となって、固有値は $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{2}$ の 3 種類。

各固有値ごとの固有ベクトルは、$\lambda = 0$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて、

$$\overrightarrow{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x_1 \neq 0).$$

$\lambda = \pm\sqrt{2}$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて、

$$\overrightarrow{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

このように、固有ベクトルは方向だけが決まるので、0 でない定数倍は問題でなく、具体的に一つので固有ベクトルを選んで代表させることもできる。まとめると、A の固有値・固有ベクトルは、次の 3 種類である。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

上の例で、最下段に現れる式 $\lambda^3 - 2\lambda$ は $\det(\lambda I_3 - A)$ に一致する。このことは、偶然ではなく必然である。以下しばらく、これに関連した固有値の性質を調べよう。

定理 10.3. 行列 A の固有値 λ は、方程式（固有値方程式, *eigen*[*77] *equation,* という）

$$|tI_n - A| = 0$$

の解である（左辺を固有多項式という）。

Proof. 定理 8.6 による。 □

系 10.4. 行列 A の固有値と転置行列 ${}^tA$ の固有値は一致する。

問 10.2. (*) n 次正方行列 A, B に対して、2 つの行列 AB, BA の固有多項式が一致することを示せ。

命題 10.5. 行列 A の固有多項式 $f_A(t) = |tI_n - A|$ は、

$$f_A(t) = t^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})t^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|$$

という形の t の n 次式であり、相似変形で不変である。すなわち、

$$|tI_n - T^{-1}AT| = |tI_n - A|.$$

とくに、複素数を成分とする正方行列は複素数の固有値を必ずもち[*78]、固有値の個数は重複度も込めて n 個である。

[*77] これは独語であるが、その英訳である characteristic を使うことも多い。ちなみに、こちらの和訳は「特性」をあてる。

[*78] 行列代数における複素数および行列式の意義は、この一点に尽きるといってよいだろう。

Proof. 相似不変性は、$|tI_n - T^{-1}AT| = |T^{-1}(tI_n - A)T| = |T|^{-1}|tI_n - A||T| = |tI_n - A|$ と計算する。行列式の完全展開式

$$|B| = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(n),n}, \qquad B = tI_n - A$$

で、t が含まれる因子は対角成分 $b_{11}, \dots, b_{nn}$ のみであるから、一箇所でも対角成分でない因子が現れると、その項には他にも対角成分からはずれる因子が現れることになり、そのような項に含まれる t の次数は $n-2$ 以下になる。従って、$|tI_n - A|$ の中の t^n, t^{n-1} の係数は対角成分の積

$$(t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn}) = t^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})t^{n-1} + \cdots$$

の中に含まれるそれと一致する。定数項は $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ である。

あとは、複素係数の n 次方程式は複素数の範囲内で必ず解をもつこと (定理 D.1) を使うだけ。 □

例 10.6. 実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ について、$f_A(t) = (t-a)^2 + b^2$ であるから、その固有値は $\lambda = a \pm ib$ である。

このように、固有値を扱うには、数の範囲を複素数に広げておくのがよい。

問 10.3. (♯) 正方行列 A の対角成分の和 $a_{11} + \cdots + a_{nn}$ を A の**跡**[*79]あるいは**トレース** (trace) と呼んで、$\mathrm{tr}(A)$ のように表わす。上の命題からわかるように跡は相似変形で不変であるが、より強く $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ が成り立つ。

問 10.4. (♯) 行列式 $\det(X)$ で X の各成分 x_{ij} が 実変数 t の関数であるとき、等式

$$\frac{d}{dt}\det(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}) = \det(\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}) + \cdots + \det(\overrightarrow{x_1}, \dots, \frac{d}{dt}\overrightarrow{x_n})$$

を確かめ、上の命題に対する別証明を試みよ。また、3 次の正方行列 $A = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ に対して、

$$\det(tI_3 - A) = t^3 - (a_1 + b_2 + c_3)t^2 + \left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) t - \det(A)$$

を示せ。

定義 10.7. 行列 A の異なる固有値全体 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を使って、固有多項式を

$$|tI_n - A| = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r}$$

と因数分解するとき、n_j を固有値 λ_j の**重複度** (multiplicity) という。普通、固有値が重なることはないので、2 以上の重複度をもつというのは特別な状況で起こる。

ここから、固有値と固有ベクトルとのかかわり合いについて調べる。

定義 10.8. n 次正方行列 A の固有値 λ に対して、連立一次方程式 $(\lambda I_n - A)\overrightarrow{x} = 0$ の解空間 $\ker(\lambda I_n - A)$ を固有値 λ の**固有空間** (eigenspace) と呼び $\mathbb{C}^n_\lambda$ と書くことにする。

命題 10.9. 行列 A の固有値 λ に対して、固有空間 $\mathbb{C}^n_\lambda$ の次元 d は、λ の重複度以下である。

[*79] 積と紛れがないように、「あと」と唱える。

Proof. 固有空間 V_λ の基底 $\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_d}$ を補う形で全体の基底を作り (補題 9.3)、$T = (\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_n})$ による行列 A の相似変形を行うと

$$AT = T \begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

という形になるので、$|tI_n - A| = |tI_n - T^{-1}AT| = (t-\lambda)^d |tI_{n-d} - C|$ (命題 6.8) からわかる。 □

定理 10.10. 行列 A の異なる固有値すべてに名前をつけて $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ とする。固有値 λ_i の固有空間の次元を d_i、その重複度を n_i で表わす。このとき A が対角化可能であるための必要十分条件は、すべての $1 \le i \le r$ について $d_i = n_i$ が成り立つこと。

Proof. 対角化できれば、固有ベクトルからなる基底が存在するから、$n \le \sum_{i=1}^r d_i$. これと $d_i \le n_i$ および $\sum_i n_i = n$ と併せて、等号の成立がわかる。

逆に、等号がなりたつとする。$(\overrightarrow{x_{i,j}})_{1 \le j \le d_i}$ を固有空間 $\mathbb{C}^n_{\lambda_i}$ の基底とする。これらを一列に並べると、等号成立の仮定から、n 個のベクトルの集団が得られる。そこで、あとはこれが 1 次独立であるかが問題となり、次の補題[*80]からわかる。実際、

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{d_i} t_{i,j} \overrightarrow{x_{i,j}} = 0$$

とすると、$\sum_{j=1}^{d_i} t_{i,j} \overrightarrow{x_{ij}} \in \mathbb{C}^n_{\lambda_i}$ は異なる固有値 λ_i の固有空間に属すので、$\sum_j t_{i,j} \overrightarrow{x_{i,j}} = 0$ $(i = 1, \cdots, r)$ となり、$(\overrightarrow{x_{i,j}})_{1 \le j \le d_i}$ が $\mathbb{C}^n_{\lambda_i}$ の基底であることから、$t_{i,j} = 0$ $(1 \le j \le d_i,\ 1 \le i \le r)$ が従う。 □

補題 10.11. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を異なる固有値とし、$\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_r}$ を対応する固有空間のベクトルとする。もし、

$$\overrightarrow{x_1} + \cdots + \overrightarrow{x_r} = 0$$

が成り立てば、$\overrightarrow{x_1} = \cdots = \overrightarrow{x_r} = 0$ である。

Proof. 実際、$(A - \lambda_1) \cdots (A - \lambda_{r-1})$ をかけると、

$$\overrightarrow{0} = (A - \lambda_1) \cdots (A - \lambda_{r-1}) \overrightarrow{x_r} = (\lambda_r - \lambda_1) \cdots (\lambda_r - \lambda_{r-1}) \overrightarrow{x_r}$$

から $\overrightarrow{x_r} = \overrightarrow{0}$ がわかる。他についても同様。 □

系 10.12. 異なる固有値の固有空間に属する固有ベクトルの集まりは一次独立である。

問 10.5. $A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}$ であれば、

$$(A - \alpha_1 I) \cdots (A - \alpha_m I) \overrightarrow{x} = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_m) \overrightarrow{x}.$$

対角化の手続き これは、固有ベクトルから成る基底をいかに見つけるかということ。

ステップ 1　固有方程式を解くことにより、固有値を求めると共に固有値の重複度を調べる。
ステップ 2　固有空間を連立一次方程式の解空間として実現し、掃き出し法により固有空間の基底を求める。

[*80] これの更なる拡張が定理 F.2 で与えられる。

ステップ３　ステップ２で求めた固有空間の次元とステップ１で求めた重複度が一致しない固有値が一つでもあれば、扱っている行列は対角化できない。そうでなければ、すなわち、すべての固有値に対して、固有空間の次元と重複度が一致しているならば、各固有空間の基底を並べることにより全体の基底を得るので、対応する行列を

$$T = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}), \qquad A\overrightarrow{x_j} = \lambda_j \overrightarrow{x_j}$$

と書けば、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

という形で対角化が実現する。

対角化の手順で最も面倒な部分は、固有方程式を解く（固有値を求める）ところである。行列のサイズが３以上の場合は、固有方程式は一般には具体的に解きがたい。よく本とかに載っている対角化の問題は、ではどうやって作るのかと言えば、固有値と固有ベクトルと T を最初に与えて、それから対角化する前の行列を逆算するという「ずるい」方法を取ることになる。

例 10.13. 与えられた固有値と固有ベクトルから、もとの行列を復元し、復元した行列から逆に、上で述べた対角化の手順に従って対角化を実行してみよう。例えば、次の行列は対角化可能である。

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a-2b-3c & 4a-2b-2c & 2a-2c \\ -6a+3b+3c & -4a+3b+2c & -2a+2c \\ -3a+3c & -2a+2c & -a+2c \end{pmatrix}.$$

問 10.6. ($\sharp$)

(i) 上の例で、a, b, c に色々な値を代入して対角化の手順を確認する。

(ii) 行列 T およびその逆行列 T^{-1} の成分が全て整数となるような行列はどのようにして作り出せるか考えてみる。（ヒント：基本行列の積。）

２行２列の行列については、固有方程式が２次方程式になることもあって、全てのことを完全に実行することが可能である。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と置いて、その対角可能性について調べてみよう。

まず固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} = t^2 - (a+d)t + ad - bc = 0$$

となるので、これが異なる二つの解をもてば対角化可能となる (何故か)。

そこで対角化できない可能性のあるのは、重根 (multiple root）をもつ場合、すなわち

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = 0$$

でなければならない。このとき A の固有値は、$\lambda = (a+d)/2$ のただ一つである。したがってこのような行列が対角化できるのは、

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1} = \lambda I_2$$

の場合、すなわち、$a = d$, $b = c = 0$ のときに限る。

まとめると、2×2 行列 A が対角化できるための必要十分条件は、(i) A が単位行列のスカラー倍であるかまたは (ii) $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$、である。

問 10.7. a, b, c, d が実数のときに、固有方程式が実数解をもつための必要十分条件を調べ、実数の固有値をもたない実行列を具体的に一つ挙げよ。

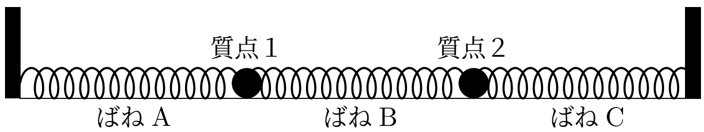
問 10.8. $(a-d)^2 + 4bc = 0$ の場合の固有ベクトルを求めよ。

例 10.14. 行列
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix}$$
は、$b \neq 0$ であれば、対角化できない。

問 10.9. 上の例で与えた行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

対角化の具体的応用例では、上で述べたような対角化そのものよりも、固有値と固有ベクトルを求めたあとは、問題になっているベクトルを固有ベクトルの和で表わすだけで済むことが多い。また、固有値を求める際も、行列式としての固有方程式を計算せずに直接固有ベクトル方程式を解いてしまう方がときには効率的である。

質量が 1 の 2 つの質点を 3 つのバネでつないだ



という状況を考えよう。質点 1 の変位を x で、質点 2 の変位を y で表し、それぞれのばねのばね定数を a, b, c とすれば、運動方程式は、
$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -b-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
となる。そこで、右辺の行列の固有ベクトル
$$\begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -b-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
が見つかれば、
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = f(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
と置くことにより、
$$\frac{d^2}{dt^2} f = \lambda f(t)$$
に帰着する。

問 10.10. ($\sharp$) 三つのばね定数が共通の値 k に近いとき、すなわち $\alpha = (a-k)/k$, $\beta = (b-k)/k$, $\gamma = (c-k)/k$ が微小量であるとき、行列
$$\begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -b-c \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを α, β, γ について1次の項まで近似的に求めよ。

上で述べた対角化の手続きは、理屈の上ではその通りなのであるが、実際に計算してみると効率の悪さが実感されるであろう。どういうことかというと、ステップ1の固有多項式を求めるところで、掃き出し法的な計算を一度行い、固有値が見つかったあとのステップ2で掃き出し法をもう一度行うという二度手間に近いことをしている。

ということで、固有多項式を相手にせず、固有値パラメータが入った行列 $A - \lambda I_n$ に掃き出し法を適用してみる方がときに実践的である。既に出だし（例 10.1）で経験したことであるが、別の例でも確かめてみよう。

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

という行列の固有値と固有ベクトルを掃き出し法で求める。その際に文字が入っている行列では階段行列への移行に際して 段が現れる箇所を場合分けして処理していく必要があり、これはこれで枝の処理が増えるので、行操作に限定した掃き出し法に加えて列の並替え（未知数の入れ替え）も許すことにし、どのような並替えを行ったかの記録も残して最終的な変数の入れ替えを忘れないようにする。

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -(\lambda+1) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -(\lambda+1) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -(\lambda+1) \\ 1-\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-a & -(\lambda+1) \\ 0 & (1-\lambda)(\lambda-a) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-a & -(\lambda+1) \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

途中第一変数と第二変数の入れ替えを行ったことに注意。固有多項式は対角成分の積として実質的に現れる。

固有値は、ランクが下がる（行列式が消える）という条件から、$\{\pm 1, a\}$ である。固有値が重複していない $a^2 \neq 1$ のとき、

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2(a-1) \\ 1-a \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ 0 & -(a+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

$\lambda = a$: さらに階段化を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+1) \\ 0 & 0 & -(a+1)(a-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

次に、固有値が重複している $a = \pm 1$ の場合であるが、$a = -1$ とすると、

$$\begin{pmatrix} 1 & -(\lambda+1) & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \\ 0 & 0 & -(\lambda^2-1) \end{pmatrix}$$

より、

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

固有値 $\lambda = -1$ は重複しているものの、独立した 2 つの固有ベクトルが取れるので、A は対角化可能である。

一方、$a = 1$ とすると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -(\lambda+1) \\ 0 & 0 & -(\lambda^2-1) \end{pmatrix}$$

より、

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

固有値 $\lambda = 1$ は重複しているにもかかわらず、独立した固有ベクトルは一つしか取れないので、A は対角化できない。

Remark 10. このように、具体的に固有値が計算できる場合（とくに試験問題で）の実用度は高いのであるが、世間の教科書では取り上げられない不思議。

11 ベクトル空間と線型写像

「ベクトルもまた線型写像」— Agsaryim Ghuamie

幾何ベクトルの成分表示と連立一次方程式の解法を結びつけることで、これまで数ベクトルおよび行列の理論を展開してきた。このような座標幾何学的手法はきわめて強力なもので、これ以上の一般化は必要ないという考え方もあり得る。これはまた、観測量は最終的に数と関連づけられて初めて、その定量的法則性が確立されるという自然科学の実態にもかなったものとなっている。一方で、少なくとも幾何ベクトルにおいては、特定の座標系とは独立な存在としてのベクトルを認めるのが自然であり、そこでは、人為的かつ任意性のある座標系の設定が 物理的実体と観測量を結びつける仲立ちの役割を果たしている。

ということで、数を並べた形のベクトルについても同様の扱い、すなわち座標系ないし成分による表示に依存しない存在としてのベクトルを認めた上で、座標系という仲立ちを経由して、成分表示としての数を取り出すという流れが考えられる。これは、３次元幾何ベクトルを手本に高次元の幾何学的実体を志向する過程でグラスマンによって初めてなされた。このように高次元のベクトルを成分表示から解放することは、仮に成分表示を専ら扱う際にも有用であるのみならず、その後に発見された量子物理の記述においても欠くべからざる数学的枠組みを提供するものとなっている。

その内容の把握のためには、急がば回れ、集合と写像の言葉遣いから始めるのがよい。これについては、付録等を参考に、基本的な概念と用語を深入りはせずにひと通り自習しておく[*81]。この先で必要となるのは、写像、単射、全射、全単射。写像の合成。恒等写像、逆写像。写像の像と逆像。写像空間 Y^X, 関数空間 $\mathbb{C}^X$, 列空間 $Y^{\mathbb{N}}$ といったところ。

さて、幾何ベクトル空間を手本に、改めて一般のベクトル空間を導入しよう。その際、数の範囲は加減乗除ができればよいので、そのようなもの（体[*82]と呼ばれる）を一つ用意し、$\mathbb{K}$ と書く[*83]。具体的には、$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ を念頭において、当面は（あるいは永久に）不自由しない。体 $\mathbb{K}$ の元をベクトルとの対比で、**スカラー** (scalar) ともいう。

$\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間** (vector space) とは、ベクトルと称されるものの集まり（集合）V に和 $v, w \in V \Longrightarrow v + w \in V$ とスカラー倍 $\alpha \in \mathbb{K}, v \in V \Longrightarrow \alpha v \in V$ が定められていて、以下の条件を満たすもの[*84] をいう。

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$, $v + w = w + v$.
(ii) **零ベクトル** (zero vector) と呼ばれる特別な $\mathbf{0} \in V$ があって、すべての $v \in V$ に対して、$0v = \mathbf{0}$.
(iii) すべての $v \in V$ に対して、$1v = v$.
(iv) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$, $(\alpha + \beta)v = (\alpha v) + (\beta v)$, $\alpha(v + w) = (\alpha v) + (\alpha w)$.

性質 (i) により、ベクトルの足し算は何個であっても括弧を省略できるし、和の順番を気にする必要もない。零ベクトルは しばしば 0 で代用され、和に関して零のように振る舞う $v + \mathbf{0} = 1v + 0v = (1 + 0)v = v$ ことに注意。ベクトル $(-1)v$ は、$-v$ とも書かれ、$w + (-v) = w - v$ のように略記される。$v - v = 1v + (-1)v = (1 - 1)v = \mathbf{0}$ に注意。以下では、区別する煩雑さを避けて、$\mathbf{0}$ の代わりに 0 という書き方もする。様々な零行列を 0 で済ますのと同じ手法である。

ベクトル空間 V の部分集合 $W \subset V$ で、零ベクトルを含み、和とスカラー倍ではみ出さないものを V の**部分空間** (subspace) と呼ぶ。このとき、W 自身がベクトル空間となっていることに注意。

Remark 11. ベクトルのスカラー倍は、スカラーをベクトルの左に書くのが慣例であるが、行列代数との整合性を考えると右に配置するのが合理的である。そこで、左からのスカラー倍に対して、右からのスカラー倍を $v\alpha = \alpha v$ と定めると、$\alpha(v\beta) = (\alpha v)\beta$, $v(\alpha\beta) = (v\alpha)\beta$ のように左右からのスカラー倍がかみ合い便利である。なお、この左右のかみ合い

[*81] 本を読めば済むことなので、あえて授業という形で取り上げなくても、必要と感じた人は勝手に勉強しておくもの。いつまでも手取り足取りの教育を望むようなところからは innovation の生まれようもない。

[*82] 体 (field) という考えは、代数方程式の解の公式の研究をきっかけに徐々に認識されたもので、多項式の根から加減乗除をくり返して得られる数全体が典型的な例である。そのような意味での体はすべての有理数を含むので、無限性を有するものであるが、偶数全体を 0 で、奇数全体を 1 で代表させて得られる二元集合は、やはり加減乗除が可能な集団を作り、最も小さい体を提供する。他にも素数に関係した有限体とかがよく知られていて、これらが数学者のおもちゃではなく情報理論の様々なところで活用される。

[*83] 体（からだ）を意味するドイツ語 Körper の頭文字。

[*84] このように、数学では代数構造に着目して「ベクトル」という用語を使っていて、「大きさと向きをもつ量」という素朴な意味でのベクトルの概念とはずれがあることに注意する。例えば、力学における速度や力は「大きさと向きをもつ量」には違いはないが、その物理的効果という観点からは空間点に束縛された量と見るのが妥当で、したがって、異なる空間点に結び付けられたベクトルどうしの和が、仮にそれが可能であっても、何を意味するかは自明ではない。

において、スカラーどうしの積についての交換法則が使われていることに注意。

問 11.1. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ($\alpha \in \mathbb{K}$ は何でも) である。なぜか。

問 11.2. 幾何ベクトルが上記性質をみたすことを確認。また、与えられた平面に対して、その平面を保つ幾何ベクトル（平行移動）全体が部分空間を構成することも確認。

問 11.3. V の部分空間 W, W' に対して、$W \cup W'$ が部分空間となるのは、$W \subset W'$ または $W \supset W'$ の場合に限る。

例 11.1.

(i) 空間内のある点に作用する力全体は、力の合成に関する平行四辺形則と力の定数倍を和とスカラー倍として、ベクトル空間を形成する。このことは、力と幾何ベクトルの関係を暗示するものであるが、それを明示的に述べたものがいわゆるニュートンの運動方程式[*85]に他ならない。

(ii) 行列の作るベクトル空間 $M_{m,n}(\mathbb{K})$。とくに、列ベクトル空間 $\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$ と行ベクトル空間 ${}^t\mathbb{K}^n = M_{1,n}(\mathbb{K})$。

(iii) 関数の作るベクトル空間 $\mathbb{K}^X$ とその部分空間 $\mathbb{K}X$。ここで、$\mathbb{K}X$ は、有限集合で支えられた関数 $f : X \to \mathbb{K}$ 全体を表わす。とくに、数列の作るベクトル空間 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ とその部分空間 $\mathbb{K}\mathbb{N}$。

(iv) 形式的べき級数の作るベクトル空間 $\mathbb{K}[[t]]$ と多項式の作る部分空間 $\mathbb{K}[t] \subset \mathbb{K}[[t]]$。

(v) 収束半径が $r \geq 0$ よりも大きいべき級数の作る部分空間 $\mathbb{C}_r[[t]] \subset \mathbb{C}[[t]]$。$\sum_{n\geq 0} c_n t^n \in \mathbb{C}_r[[t]] \iff \limsup |c_n|^{1/n} < 1/r$ である。入れ子関係 $\mathbb{C}[t] \subset \mathbb{C}_\infty[[t]] \subset \mathbb{C}_r[[t]] \subset \mathbb{C}_0[[t]]$ に注意。

ベクトル空間 V の要素であるベクトルの集まり $v_1, \cdots, v_r$ があるとき、その一次結合全体は V の部分空間となる。これを $\{v_1, \cdots, v_r\}$ の**張り出し** [*86](linear span) といって、$\langle v_1, \cdots, v_r \rangle$ のように書き表わす。また、$v_1, \cdots, v_r$ が一次独立とは、どのベクトルも残りのベクトルの一次結合で書けないこと。有限とは限らないベクトルの集まり S が一次独立であるとは、S に含まれるすべての有限部分集合が一次独立であること。一次独立でない集団は**一次従属である** (linearly dependent) [*87]とよばれる。すなわち、あるベクトルが、残りのベクトルの一次結合で表される（一次式の形で依存する）とき、集団全体を一次従属であると称する。一次独立な集まり $v_1, \cdots, v_r$ に対しては、次の係数比較の性質が成り立つことに注意する。

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r \iff \alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_r = \beta_r.$$

例 11.2.

(i) 行列単位 $E_{j,k} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ は一次独立。ここで、$E_{j,k}$ は、(j,k) 成分だけが 1 で残りが 0 の行列を表わす。とくに、基本ベクトル $e_j = E_{j,1} \in \mathbb{K}^n$, ${}^te_j = E_{1,j} \in {}^t\mathbb{K}^n$ の集まりは、それぞれ一次独立。

(ii) 単項式 $t^n \in \mathbb{K}[t]$ $(n = 0, 1, \dots)$ の集まりは一次独立。

(iii) 指数関数の集まり $\{e^{\lambda t} \in \mathbb{C}_\infty[[t]]; \lambda \in \mathbb{C}\}$ は一次独立 (系 12.7, 問 5.5 参照)。

(iv) 三角関数の集まり $\{\cos(ax), \sin(bx); a \geq 0, b > 0\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ は一次独立。

[*85] Newton 自身は、運動の法則を、微分も座標も使わないユークリッド幾何的手法で述べている (1687)。それを座標と微分による形に書き改めたのが Euler (1750) で、今の力学の教科書にあるような変位ベクトルの時間に関する２階微分が力に比例する（比例定数＝慣性質量）という定式化は Grassmann (1840) による。実に１５０年余におよぶ紆余曲折であった。

[*86] span の訳には「張る」という動詞を当てるのが普通で、その名詞形のつもり。「張り」では間が抜けているので。

[*87] dependence に従属をあてる慣例ではあるが、その実相は（相互）依存とでもいうべきもの。

問 11.4. 零ベクトル 0 を含む集団は一次従属であること及び上の例を確かめよ。(iii) と (iv) は要工夫。

有限個のベクトル $v_1, \dots, v_N$ があって、すべてのベクトルがこれらの一次結合で書けるとき、V を**有限次元** (finite-dimensional) と呼ぶ。有限次元でないベクトル空間は無限次元と称される。

例 11.3.

(i) 関数空間 $\mathbb{K}^X$ が有限次元であるための必要十分条件は、X が有限集合であること。

(ii) 複素数ベクトル $c = (c_1, \dots, c_n) \in {}^t\mathbb{C}^n$ に対して、次の漸化式 (recurrence relation)

$$x_{k+n} = c_1 x_{k+n-1} + \cdots + c_n x_k \quad (k \geq 0)$$

をみたす複素数列[*88]$(x_j)_{j\geq 0}$ 全体を $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ と書けば、$\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ は数列空間 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ の有限次元部分空間。とくに、$c = (0, \dots, 0, 1)$ のときは、周期 n の周期的数列の作る部分空間である。

問 11.5. ($\sharp$) 上の例をすべて確かめよ。無限次元であることの証明には、定理 11.6 を使うとよい。

有限次元ベクトル空間におけるベクトルの列 $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ が**基底** (basis) であるとは、

(i) $\{e_1, \dots, e_n\}$ が一次独立な集団であり、

(ii) V のすべてのベクトルが $e_1, \dots, e_n$ の一次結合で書けること。

次は、もはや自前で証明できて欲しい。

定理 11.4. 有限次元ベクトル空間 V は基底をもち[*89]、基底を構成するベクトルの個数は一定である。この一定の個数を V の**次元**とよび $\dim V$ とかく。

Proof. 基底の存在は、有限個の生成元を一列に並べ、一次独立なものを取り出していけばわかる。

2 つの基底 $e = (e_1, \dots, e_m)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ に対して $m = n$ となることは、$m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B を使って、$f = eA$, $e = fB$ と表わすと、$eAB = fB = e$, $fBA = eA = f$ すなわち $AB = I_m$, $BA = I_n$ となるので、補題 7.8 からわかる。あるいは跡の性質を使って、$m = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = n$ のように処理してもよい。

[別解]: 行列代数の結果を使わない直接的な証明も可能で、それは、次のような置き換え原理に基づく。

一次独立な集まり $e = (e_1, \dots, e_m)$ と基底 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ があったとき、f の並べかえ $f' = (f_1', \dots, f_n')$ を適切に行うことで, $(e_1, \cdots, e_m, f_{m+1}', \dots, f_n')$ が基底であるようにできる。

これを m についての帰納法で示す。$m = 1$ であれば、e_1 を f の一次結合で表して、0 でない係数をもつ f_j をひとつ選びそれを f_1' とするように並べ替える。このとき、$\{e_1, f_2', \dots, f_n'\}$ も基底である。つぎに、m まで正しいとし、一次独立な集まり $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}$ の最初の m 個に帰納法の仮定を適用した f の並べ替えを $(f_1', \dots, f_n')$ とする。e_{m+1} を基底 $(e_1, \dots, e_m, f_{m+1}', \dots, f_n')$ の一次結合で表したとき、$f_{m+1}', \dots, f_n'$ の係数に 0 でないものが現れるので（そうでないと $\{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ が一次独立であることに反する)、その一つが先頭にくるように $\{f_{m+1}', \dots, f_n'\}$ を並べかえたものを $f_{m+1}'', \dots, f_n''$ とすれば、$(f_1', \dots, f_m', f_{m+1}'', \dots, f_n'')$ は $(f_1, \dots, f_n)$ の並べ替えになっており、$(e_1, \dots, e_{m+1}, f_{m+2}'', \dots, f_n'')$ が基底になることから帰納法が進む。 □

[*88] 列を表わす記号として { } を使うことが多いのであるが、これは集合の記号と紛らわしいので、ここでは丸括弧で表わすことにする。

[*89] $V = \{0\}$ のときは、零個のベクトルからなる基底をもつ、すなわち $\dim V = 0$、と解釈する。

問 11.6. 別解において、$(e_1, \ldots, e_{m+1}, f''_{m+2}, \ldots, f''_n)$ が基底であるのは何故か。

Remark 12. 無限次元ベクトル空間の場合にも、選択公理なるものを仮定すると、基底の存在と「個数」の一定性を示すことができる。集合の濃度を学べば、その良い練習問題である。

例 11.5.

(i) 行列単位の集まり $\{E_{j,k}\}$ は $M_{m,n}(\mathbb{K})$ の基底。とくに、$\dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$ である。

(ii) 基本ベクトル (e_j), $({}^t e_j)$ は $\mathbb{K}^n$, ${}^t\mathbb{K}^n$ の基底。とくに、$\dim \mathbb{K}^n = \dim {}^t\mathbb{K}^n = n$ である。

(iii) 初期条件 $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) = (\delta_{j,k})_{0 \leq k < n}$ で定められる c 漸化式の解を δ_j $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ で表せば、$\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{n-1}$ は $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ の基底。とくに $\dim \mathbb{C}_c^{\mathbb{N}} = n$ である。

問 11.7. (♯) 上の例をすべて確かめよ。

定理 11.6. n 次元ベクトル空間 V において、一次独立なベクトルの集まりを $v_1, \cdots, v_m$ とすると、$m \leq n$ であり、一次独立な $v_1, \cdots, v_m$ が V の基底となるための必要十分条件は $m = n$ である。とくに、有限次元ベクトル空間 V の部分空間 W は有限次元であり[*90]、不等式 $\dim W \leq \dim V$ を満たす。

Proof. 補題 9.3 とそれに続く命題の証明を繰り返すだけ。 □

問 11.8. 複素ベクトル空間 V は、スカラー倍の範囲を実数に限定することで実ベクトル空間と思える。V が有限次元であるとき、実ベクトル空間としての次元は $2\dim V$ である。これを $\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim V$ のように書く。とくに $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ である。

ここで、一次独立性の概念を部分空間の集まりに拡張しておこう。まず部分空間の集まり $(V_i)_{1 \leq i \leq r}$ $(V_i \neq \{0\})$ に対して、$v_1 + \cdots + v_r$ $(v_j \in V_j)$ の形のベクトル全体を $\sum_{i=1}^r V_i = V_1 + \cdots + V_r$ という記号で表わす。これも部分空間である。次に $(V_i)_{1 \leq i \leq r}$ が**一次独立**であるとは、

$$v_1 + \cdots + v_r = 0 \ (v_i \in V_i) \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \cdots = v_r = 0$$

となること。この性質は $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ $(i = 1, \ldots, r)$ と言い換えられる[*91]。ベクトルの集まり (v_i) $(v_i \neq 0)$ が一次独立であることは、1次元部分空間の集まり $(\mathbb{K}v_i)$ が一次独立であることに他ならない。

ベクトル空間 V が部分空間 V_i $(1 \leq i \leq r)$ に**直和分解**されるとは、(V_i) が一次独立で、$V = V_1 + \cdots + V_r$ であること。この状況を $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ のように表記する[*92]。直和分解が与えられると、各直和成分 V_i の基底を用意して、それぞれを $i = 1, \cdots, r$ の順番に並べたものは全体の基底となる。これを**直和分解に合わせた基底**と呼ぶ。

問 11.9. 上の言い換えを示せ。また $V = V_1 + V_2 + V_3$ かつ $V_j \cap V_k = \{0\}$ $(j \neq k)$ であるが、直和分解にならない例を作れ。

線型写像

[*90] このことは決して当たり前ではないのだが、当然のごとく扱う本の多いこと。

[*91] 集合算の場合と異なり分配法則が成り立たないので、$V_i \cap V_j = \{0\}$ $(i \neq j)$ といった条件に置きかえることはできない。

[*92] これは本来の直和記号の乱用ではあるが、よく使われる。

ベクトル空間 V からベクトル空間 W への写像 $\phi : V \to W$ が**線型** (linear) であるとは、

$$\phi(v+v') = \phi(v) + \phi(v'), \quad \phi(\alpha v) = \alpha\phi(v)$$

が成り立つこと。一次結合を一次結合に移す写像と言ってもよい。2つの線型写像の合成は再び線型写像となる。線型写像においては、関数記号に由来する括弧を省略して $\phi(v) = \phi v$ のような表記がしばしば使われる。

線型写像 ϕ の**核**と**像**を $\ker\phi = \{v \in V; \phi(v) = 0\}$, $\phi(V) = \{\phi(v); v \in V\}$ で定める。それぞれ、V, W の部分空間である。確かめよ。

命題 11.7. 線型写像 ϕ について、$\ker\phi = \{0\}$ であることと ϕ が単射であることは同値である。

Proof. 実際、$\phi(v) = 0$ となる $0 \neq v \in V$ があれば、$\phi(v) = \phi(0)$ となって ϕ は単射ではない。一方、$\phi(v) = \phi(v')$ とすると、$\phi(v - v') = 0$ より $v - v' \in \ker\phi$ がわかるので、$\ker\phi = \{0\}$ ならば $v = v'$ である。 □

ベクトル空間 V からベクトル空間 W への線型写像全体を $L(V,W)$ で表せば、$L(V,W)$ は、次の和とスカラー倍でベクトル空間となる。

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (\alpha\phi)(v) = \alpha\phi(v).$$

例 11.8. 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を左から掛けることで、線型写像 $[A] : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ が得られる。逆に $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への線型写像はこの形である。さらに、この対応で、行列の和と線型写像の和、行列のスカラー倍と線型写像のスカラー倍、行列の積と写像の合成がうつりあうこと、すなわち

$$[A+B] = [A] + [B], \quad [\lambda A] = \lambda[A], \quad [AB] = [A] \circ [B]$$

がわかる。ということで、$M_{m,n}(\mathbb{K})$ を $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ と同一視することが多い。

ベクトル空間 V に対して、V のベクトルを横に m 個並べたもの全体 V^m は、和とスカラー倍を

$$(v_1, \cdots, v_m) + (w_1, \cdots, w_m) = (v_1 + w_1, \cdots, v_m + w_m), \quad \lambda(v_1, \cdots, v_m) = (\lambda v_1, \cdots, \lambda v_m)$$

とすることでベクトル空間となる。これを V の**多重ベクトル空間** (multiple vector space) と呼ぶ[*93]。

定義 11.9. 多重ベクトル $v = (v_1, \ldots, v_m) \in V^m$ と線型写像 $\phi : V \to W$ あるいは行列 $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ との積 $\phi v \in W^m$, $vA \in V^n$ をそれぞれ

$$\phi v = (\phi(v_1), \ldots, \phi(v_m)), \quad vA = (\sum_i v_i a_{i1}, \ldots, \sum_i v_i a_{in})$$

で定める。ただし、vA の右辺では、ベクトル v のスカラー倍を $\lambda v = v\lambda$ のように書いた。

命題 11.10. 二つの積 ϕv, vA は分配法則と次の三種類の結合法則をみたす。

(i) 線型写像 $\phi : V \to W$, $\varphi : W \to X$ に対して、$\varphi(\phi v) = (\varphi\phi)v$.

(ii) 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,l}(\mathbb{K})$ に対して、$(vA)B = v(AB)$.

(iii) 線型写像 $\phi : V \to W$ と行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対して、$(\phi v)A = \phi(vA)$.

[*93] $\mathbb{K}^m$ は、本来、行ベクトルを表わすべきであった。世間の無理に道理を引っ込める理由もなく、あえて記法の矛盾を放置する。放置したくない場合は、$V^{\oplus m}$ とでも書く。

これにより、いずれの場合も括弧を省いて $\varphi\phi v$, vAB, ϕvA のように書くことが許される。

問 11.10. これを確かめる。また、一般結合法則が成り立つことを $\varphi\phi vAB$ について確かめよ。

問 11.11. 一般の写像 $\phi : V \to W$ に対しても、その多重化を $\phi(v_1, \cdots, v_m) = (\phi(v_1), \cdots, \phi(v_m))$ と定める。このとき、結合法則 $(\phi v)A = \phi(vA)$ が成り立つことと ϕ が線型であることは同値である。

例 11.11. 多重ベクトル $v = (v_1, \cdots, v_m) \in V^m$ を列ベクトル $x \in \mathbb{K}^m = M_{m,1}(\mathbb{K})$ に左から掛けることで、線型写像 $[v] : \mathbb{K}^m \to V$ をえる。すなわち、

$$[v] : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto vx = x_1v_1 + \cdots + x_mv_m \in V.$$

逆に $\mathbb{K}^m$ から V への線型写像はこの形である。

この対応で、$\{v_1, \cdots, v_m\}$ が一次独立であることと $[v]$ が単射であることは同値であり、$V = \langle v_1, \cdots, v_m \rangle$ であることと $[v]$ が全射であることも同値。とくに、$v = (v_1, \cdots, v_m)$ が基底であることと $[v]$ が全単射であることが同値。

問 11.12. ($\sharp$) これをチェック。$v = (v_1, \cdots, v_n)$ が V の基底であれば、$\phi v = 0 \Longrightarrow \phi = 0$、$vA = 0 \Longrightarrow A = 0$。

問 11.13. 例 11.8 と例 11.11 の記号は整合的である。すなわち、v と行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ の積に関して、$[v] \circ [A] = [vA]$ が $\mathbb{K}^n$ から V への写像として成り立つ。

線型写像 $\phi : V \to W$ で全単射であるものを線型同型写像 (linear isomorphism) 略して**同型写像** (isomorphism) という。同型写像については、その逆写像も線型である。同型写像が存在する 2 つのベクトル空間は同型である[*94](isomorphic) といい、$V \cong W$ のように書き表わす。

問 11.14. ($\sharp$) 同型写像の逆写像も線型であることを確かめよ。

例 11.12. 転置写像により、$M_{m,n}(\mathbb{K})$ と $M_{n,m}(\mathbb{K})$ は同型である。とくに、$\mathbb{K}^n$ と ${}^t\mathbb{K}^n$ は同型である。

例 11.13. 複素数列 $c = (c_1, \cdots, c_n)$ に対して、c 漸化式の解空間 $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ から ${}^t\mathbb{C}^m$ への線型写像 ϕ を $\phi((x_k)_{k\geq 0}) = (x_0, x_1, \cdots, x_{m-1})$ で定めると、ϕ が単射 $\iff$ $m \geq n$, ϕ が全射 $\iff$ $m \leq n$ である。とくに、ϕ が全単射 $\iff$ $m = n$ となる。

例 11.14 (テイラー展開)**.** $T : \mathbb{C}[[t]] \ni \sum_k a_k t^k \mapsto (k!a_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ は同型写像 (テイラー写像と呼ぼう) で、その逆写像 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ni (a_k) \mapsto \displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k!} t^k \in \mathbb{C}[[t]]$ はテイラー級数（マクローリン級数ともいう）を作ることに他ならない。関数記号 $f(t) = \sum a_k t^k$ を使えば、形式的に $Tf = (f^{(k)}(0))_{k\geq 0}$ と書ける。

また、収束べき級数環 $\mathbb{C}_0[[t]]$ の T による像は

$$T\mathbb{C}_0[[t]] = \{(a_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}; \limsup |a_k/k!|^{1/k} < \infty\}$$

と書き表される。

[*94] 同型写像を通じて、ベクトル空間の構造が同一であることに注意。

定理 11.15. 2つの有限次元ベクトル空間 V, W が同型であるための必要十分条件は、その次元が一致すること。とくに、n 次元ベクトル空間はすべて $\mathbb{K}^n$ と同型である。また、同型写像 $\phi : \mathbb{K}^n \to V$ と V の基底 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ との間には、関係 $\phi = [e]$ すなわち $\phi(x) = ex$ $(x \in \mathbb{K}^n)$ により一対一の対応がある。

Proof. ベクトル空間 V の基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ を用意すると、$[e] : \mathbb{K}^n \to V$ は同型写像である。逆に、同型写像 $\phi : \mathbb{K}^n \to V$ に対して、$e = (\phi(\delta_1), \cdots, \phi(\delta_n))$ は、V の基底であり、$\phi = [e]$ となる。また、同型写像 $\varphi : V \to W$ があれば、$(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n))$ は、W の基底となるので、$\dim V = n = \dim W$ である。 □

定義 11.16. 例 11.11 で与えた対応により、$L(\mathbb{K}^m, V)$ と V^m は自然な形で同型であるので、以後 $V^m = L(\mathbb{K}^m, V)$ の如く扱う。すなわち、$v = [v]$ とみなす。とくに $m = 1$ の場合、$V = L(\mathbb{K}, V)$ は、ベクトル $v \in V$ と線型写像 $\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \lambda v \in V$ の同一視を意味する。ベクトルもまた線型写像。

さて、V の基底 $e = (e_1, \ldots, e_n)$ が与えられると、各ベクトル $v \in V$ は $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ のように表され、この表し方は一つしかない。この係数の集まり (x_j) を、基底 e に関する v の**成分**という。基底の定める同型写像 $e = [e] : \mathbb{K}^n \to V$ を使えば、

$$v = e\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e^{-1}v$$

ということである。

別の基底 $f = (f_1, \ldots, f_n)$ を用意し、最初の基底 e に関する f_j の成分を $(p_{ij})_{1 \le i \le n}$ とすれば、$f = (\sum_i p_{i1}e_i, \ldots, \sum_i p_{in}e_i)$ である。この関係式は、行列 $P = (p_{ij})$ を使って、$f = eP$ と表される。同様に、基底 f に関する e_j の成分を (q_{ij}) とすると、行列 $Q = (q_{ij})$ により $e = fQ$ と表される。P, Q を**基底取替行列** (change-of-basis matrix) という。$n \times n$ 行列と付随する線型写像 $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ を同一視すれば、$P = e^{-1}f$, $Q = f^{-1}e$ となるので、P と Q は互いに逆行列の関係にあることがわかる。さらに、e, f に関する v の成分を縦にならべた列ベクトルをそれぞれ $x, y \in \mathbb{K}^n$ とすれば、$ex = v = fy$ より、$x = e^{-1}fy = Py$ あるいは $y = f^{-1}ex = Qx = P^{-1}x$ という 2 つの成分表示の間の関係 (一種の座標変換) を得る。

問 11.15. 基底 $e = (e_1, \ldots, e_n)$ と n 次正方行列 T から $(f_1, \ldots, f_n) = eT$ で作られるベクトルの集まり (f_j) が基底であるための必要十分条件は T の逆行列が存在すること。

線型写像 $\phi : V \to W$ と V, W の基底 $e = (e_j)_{1 \le j \le n}$, $f = (f_k)_{1 \le k \le m}$ に対して、行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を、

$$\phi(e_k) = \sum a_{j,k}f_j \iff (\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)) = (f_1, \cdots, f_m)A \iff \phi e = fA$$

で定めると、次の可換図式が成り立つ。すなわち、$[A] = f^{-1}\phi e$ である。これを 線型写像 ϕ の基底 e, f に関する**行列表示** [*95](matrix representation) と呼ぶ。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ {\scriptstyle e}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow[{[A]}]{} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

問 11.16. 上の可換図式の意味を推測し、$L(V, W) \cong M_{m,n}(\mathbb{K})$ を示せ。

[*95] representation の訳ということで行列表現とも呼ばれるが、ここでの意味合いは表示といったところ。

行列の場合の結果 (命題 9.5 =ほぼ掃き出し定理) を言いかえるか、そこでの直接証明を繰り返すことで、次がわかる。

定理 11.17. 有限次元ベクトル空間の間の線型写像 $\phi : V \to W$ について、

$$\dim \phi(V) = \dim V - \dim \ker \phi$$

であり、$\dim \phi(V)$ は ϕ の行列表示のランクに等しい。とくに、ϕ が全射であるための必要十分条件は $\dim W = \dim V - \dim \ker \phi$ である。

系 11.18. $\dim V = \dim W < \infty$ のとき、次は同値。

(i) ϕ は単射 ($\ker \phi = \{0\}$)。
(ii) ϕ は全射 ($W = \phi(V)$)。
(iii) ϕ は全単射。

問 11.17. ($\sharp$) これを確かめよ。

以上の基底を通じた線型写像と行列の間の対応はきわめて形式的なものなので、各自、必要に応じて確かめて使えばよい。必要でないかも知れないし、証明とかは敢えて授業で取り上げるほどのもの でもない。

12 線型作用素

ここでは $V = W$ とする。この場合の線型写像は、とくに、**線型変換** (linear transformation) あるいは**線型作用素** (linear operator[*96]) と呼ばれる[*97]。線型変換のほかに**一次変換**という言い方も一般的である[*98]。以下では、とくにこだわりなく何れをも使うことにする。また、ベクトル空間 V における線型作用素全体を $L(V)$ で表し、それに応じて行列の方も $M_{n,n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$ と書くことにしよう。これのありがたいところは、写像の合成=積、が自由に行えること。以下において、V における恒等写像 (identity map) を I_V あるいは略して I と書くことにする。

線型作用素 ϕ の行列表示には、基底は V におけるもの $e = (e_1, \cdots, e_n)$ を一つ用意しておけばよいことにまず注意する。すなわち、e を線型写像 $[e] : \mathbb{K}^n \to V$ と同一視(定義 11.16)すれば、$\phi e = e[\phi] \iff [\phi] = e^{-1}\phi e$ ということである。さらに、対応 $L(V) \ni \phi \mapsto e^{-1}\phi e \in M_n(\mathbb{K})$ は、ベクトル空間としての同型を与えるのみならず、積の構造も保つ:$(e^{-1}\varphi e)(e^{-1}\psi e) = e^{-1}(\varphi\psi)e$ $(\varphi, \psi \in L(V))$.

例 12.1 (回転の行列)**.** 平面の幾何ベクトルからなるベクトル空間 V において角度 θ の回転を表わす変換 ϕ を考えると、その幾何学的意味から、R は V の一次変換である。V における基準的な基底(正確には、正規直交基底という、§ 13 参照) (e_1, e_2) を取ってくると、

$$\phi(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \quad \phi(e_2) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$$

[*96] operator の訳語としては、作用素と演算子が同程度に使われる。前者は数学関係者に、後者はそれ以外で好まれるようであるが、どちらも硬すぎる。もっと日本語らしく「働き」と呼べぬものか。

[*97] 両者の使い分けであるが、変換の方は移されるものが主役で、作用素の方は作用素自体に注目している印象がある。例:座標変換と微分作用素、積分変換と積分作用素。

[*98] 統一がとれていないのは、連立一次方程式という言い方に引きずられたせいか。すべて線型でよいようにも思うが、習慣の力は強い。なお、線型という文字の代わりに線形を使うのが近年の風潮であるが、漢字本来の意味からすれば、線型が適切であろう。ちなみに中国語(現代漢語)では線性という。型でもまだ具象に引きずられていると見たのであろうか。それとも、・・・。

となるので、その行列表示は、

$$R(\theta) = e^{-1}\phi e = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

例 12.2 (折り返し行列)**.** 今度は座標平面において、直線 $y = x\tan\theta$ に関する折り返し ϕ の行列を求めてみよう。ここでも標準基底を $e = (e_1, e_2)$ で表わし、それを角 θ 回転させた基底を $f = (f_1, f_2)$ で表わすと、$f = eR(\theta) \iff e = fR(-\theta)$ であり、$\phi f = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ すなわち $f^{-1}\phi f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。したがって、ϕ の e に関する行列表示は、

$$e^{-1}\phi e = R(\theta)f^{-1}\phi fR(-\theta) = R(\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

問 12.1. ($\sharp$) n 次以下の多項式の作るベクトル空間における線型作用素 $\phi_a : p(t) \mapsto p(t+a)$ の基底 $1, t, \cdots, t^n$ に関する表現行列 S_a を求め、$S_aS_b = S_{a+b}$ を確かめよ。ここで、a, b はスカラーを表わす。

べき級数と数列の線型代数をもう少し詳しく見ておこう。まず、形式的べき級数の作るベクトル空間 $\mathbb{C}[[t]]$ であるが、級数としての積を次のように定める。

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\Big(\sum_{j+k=l} x_j y_k\Big)t^l.$$

この級数としての積は、交換法則をはじめ、結合法則、分配法則が成り立ち、代数学の用語で言うところの環 (ring) になっている。

問 12.2. 結合法則を確かめよ。

命題 12.3. 形式的べき級数環 $\mathbb{C}[[t]]$ において、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ が逆元をもつための必要十分条件は、$a_0 \neq 0$ である。実際、逆元 $\sum_k x_k t^k$ の係数は、次を $x_0, x_1, x_2, \cdots$ について順に解いていけば定められる。

$$\begin{aligned} a_0x_0 &= 1, \\ a_0x_1 + a_1x_0 &= 0, \\ a_0x_2 + a_1x_1 + a_2x_0 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

例 12.4. 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、形式的べき級数 $1 + \lambda t + \lambda^2t^2 + \cdots$ は、

$$(1-\lambda t)(1 + \lambda t + \lambda^2t^2 + \cdots) = (1 + \lambda t + \lambda^2t^2 + \cdots)(1-\lambda t) = 1$$

をみたす。このことから $1 + \lambda t + \lambda^2t^2 + \cdots = \frac{1}{1-\lambda t}$ という表記が正当化される。

また、$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k$ を形式的べき級数と思うと、$e^{\lambda t}e^{\mu t} = e^{(\lambda+\mu)t}$ すなわち、

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}t^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n$$

であることが二項定理からわかるので、$e^{-\lambda t}$ は $e^{\lambda t}$ の逆元である。

形式的べき級数環 $\mathbb{C}[[t]]$ における**微分** (differential operator) $D:\mathbb{C}[[t]]\to\mathbb{C}[[t]]$ を $D(\sum_{k\geq 0}a_kt^k)=\sum_{k\geq 0}(k+1)a_{k+1}t^k$ で定めると、Leibnitz rule $D(fg)=(Df)g+f(Dg)$ を満たす。

また、複素数列空間 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ の**ずらし** (shift operator) $S:\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ を $(Sa)_k=a_{k+1}$ $(k\geq 0)$ で定める。

例 12.5 ([6, §3.7]). テイラー写像（例 11.14） $T:\mathbb{C}[[t]]\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ は、微分 $D:\mathbb{C}[[t]]\to\mathbb{C}[[t]]$ と ずらし $S:\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ の間を**取り持つ**[*99]: $TD=ST$

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[[t]] & \xrightarrow{T} & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ {\scriptstyle D}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle S} \\ \mathbb{C}[[t]] & \xrightarrow[T]{} & \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\end{array}.$$

そして、c 漸化式の解空間 $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}=\ker(S^n-c_1S^{n-1}-\cdots-c_nI)$ と微分方程式の解空間 $\ker(D^n-c_1D^{n-1}-\cdots-c_nI)$ は、T により互いに移りあう。とくに $\dim\ker(D^n-c_1D^{n-1}-\cdots-c_nI)=n$ である。

また、$S(\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}})\subset\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ であることと初期条件に注意して、S の $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ への制限を基底 $(\delta_0,\cdots,\delta_{n-1})$ に関して表せば、

$$(S\delta_0,\cdots,S\delta_{n-1})=(\delta_0,\cdots,\delta_{n-1})C,\quad C=\begin{pmatrix}0&1&0&&\text{\Large 0}\\0&0&1&\ddots&\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\dots&0&1\\c_n&c_{n-1}&\dots&c_2&c_1\end{pmatrix}$$

となり、$T^{-1}\delta_j\in\ker(D^n-c_1D^{n-1}-\cdots-c_nI)$ のみたすべき初期条件は、$(T^{-1}\delta_j)^{(k)}(0)=\delta_{j,k}$ $(0\leq j,k\leq n-1)$ で与えられる。行列 C を c 漸化式の**連れ行列** (companion matrix) と呼ぶ。

問 12.3. 行列 C の形および $\det(tI_n-C)=t^n-c_1t^{n-1}-\cdots-c_n$ を確かめよ。

次に、$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して、$e^{\lambda t}=\sum_k\frac{\lambda^k}{k!}t^k\in\mathbb{C}_\infty[[t]]$ とおくと、二項定理から $e^{\lambda t}e^{\mu t}=e^{(\lambda+\mu)t}$ がわかる。そこで $\mathbb{C}[[t]]$ における線型作用素 K_λ を $K_\lambda(f(t))=e^{\lambda t}f(t)$ で定めると、$K_\lambda K_\mu=K_{\lambda+\mu}$ が成り立つ。 とくに、$K_\lambda^{-1}=K_{-\lambda}$ である。さらに Leibnitz rule から、$DK_\lambda=K_\lambda D+\lambda K_\lambda$、すなわち $K_\lambda DK_\lambda^{-1}=D-\lambda I$ がわかる。このことと $\ker D^m=\langle 1,t,\cdots,t^{m-1}\rangle$ から、$\ker(D-\lambda I)^m=e^{\lambda t}\langle 1,t,\cdots,t^{m-1}\rangle$ もわかる。$D\ker(D-\lambda I)^m\subset\ker(D-\lambda I)^m$ にも注意。

さらに、$\ker(D-\mu I)\cap\ker D^m=\{0\}$ $(\mu\neq 0)$ を K_λ で移せば、$\ker(D-\mu' I)\cap\ker(D-\lambda I)^m=\{0\}$ $(\lambda\neq\mu')$、すなわち、$D-\mu' I$ $(\lambda\neq\mu')$ の $\ker(D-\lambda I)^m$ への制限は単射的である。

補題 12.6. 互いに異なる複素数の列 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ に対して、部分空間の集まり $e^{\lambda_1 t}\mathbb{C}[t],\cdots,e^{\lambda_r t}\mathbb{C}[t]$ は一次独立である。

Proof. 実際、$e^{\lambda_1 t}p_1(t)+\cdots+e^{\lambda_r t}p_r(t)=0$ ($p_j(t)\in\mathbb{C}[t]$ は m_j 次式) とすると、$D-\lambda_iI$ $(1\leq i\leq r-1)$ が互いに積交換し $(D-\lambda_iI)^{1+m_i}e^{\lambda_i t}p_i(t)=0$ をみたすことから、

$$\begin{aligned}0&=(D-\lambda_1I)^{1+m_1}\cdots(D-\lambda_{r-1})^{1+m_{r-1}}(e^{\lambda_1 t}p_1(t)+\cdots+e^{\lambda_r t}p_r(t))\\&=(D-\lambda_1I)^{1+m_1}\cdots(D-\lambda_{r-1})^{1+m_{r-1}}e^{\lambda_r t}p_r(t).\end{aligned}$$

[*99] T intertwines D and S の訳。T を intertwiner という。取り持ちであるか。動詞に動詞を重ねて動詞を作る、わかるか。

ここで、$D-\lambda_1 I, \cdots, D-\lambda_{r-1}I$ が $\ker(D-\lambda_r I)^{1+m_r} \ni e^{\lambda_r t}p_r(t)$ を不変にし、かつその上で単射的であることから、$e^{\lambda_r t}p_r(t)=0$ がわかる。以下、これをくり返す。 □

系 12.7. $\{e^{\lambda t}t^l; \lambda \in \mathbb{C}, l \geq 0\}$ は $\mathbb{C}[[t]]$ で一次独立。

多項式 $t^n - c_1 t^{n-1} - \cdots - c_{n-1}t - c_n$ を $(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}$ と因数分解すると、

$$\ker(D-\lambda_1 I)^{m_1} + \cdots + \ker(D-\lambda_r I)^{m_r} \subset \ker(D^n - c_1 D^{n-1} - \cdots - c_n I)$$

であるが、両者の次元が一致するので、等しいことがわかる。したがって、$\{e^{\lambda_j t}t^l/l!; 1 \leq j \leq r, 0 \leq l < m_j\}$ を並べたものが $\ker(D^n - c_1 D^{n-1} - \cdots - c_n I)$ の基底となる。特定の j のところを抜き出せば、

$$D(e^{\lambda t}, e^{\lambda t}t, \cdots, e^{\lambda t}t^{m-1}/(m-1)!) = (e^{\lambda t}, e^{\lambda t}t, \cdots, e^{\lambda t}t^{m-1}/(m-1)!)\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

この基底に現れるべき級数 $e^{\lambda t}t^l/l! = \displaystyle\sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^j}{l!j!}t^{j+l}$ を T で移して得られる数列 $e_{\lambda,l}$ は

$$e_{\lambda,l} = \left(\binom{k}{l}\lambda^{k-l}\right)_{k \geq 0}$$

と表わされる。ここで、$0 \leq k \leq l$ については、$\lambda = 0$ の場合も含めて、

$$\binom{k}{l}\lambda^{k-l} = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!}\lambda^{k-l} = \begin{cases} 0 & (0 \leq k < l) \\ 1 & (k = l) \end{cases}$$

と置く。とくに $e_{0,l} = (\overbrace{0,\ldots,0}^{l\text{ 個}}, 1, 0, \ldots)$ である。

したがって、c 漸化式の解空間 $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ の基底として、$e_{\lambda_j,l}$ $(1 \leq j \leq r, 0 \leq l < m_j)$ を得るので、

$$e_j = (e_{\lambda_j,0}, \ldots, e_{\lambda_j,m_j-1}), \quad Se_j = (Se_{\lambda_j,0}, \ldots, Se_{\lambda_j,m_j-1})$$

と置くと、

$$(Se_1, \cdots, Se_r) = (e_1, \cdots, e_r)\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + N_{m_1} & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \lambda_r I_{m_r} + N_{m_r} \end{pmatrix}.$$

ただし、N_m は、つぎのような m 次正方行列を表わす。

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

かくして、連れ行列 C の固有多項式が $t^n - c_1 t^{n-1} - \cdots - c_{n-1}t - c_n$ であることの別証明も得られた。

Remark 13. 定理 F.4 の用語を使えば、固有値ごとに一つのジョルダン・ブロック（より小さい不変部分空間のない形）となっている。

例 12.8. $n=2$ の場合の結果を詳しく書いておこう。$c=(a,b)$ $(b \neq 0)$ とおくと、漸化式、微分方程式はそれぞれ

$$x_{k+2} = ax_{k+1} + bx_k, \quad \frac{d^2}{dt^2}f(t) = a\frac{d}{dt}f(t) + bf(t)$$

のようになる。固有多項式 $x^2 - ax - b$ が重解 (重根) をもつかどうかで分けて扱う。

(i) 重根をもたない場合 $(a^2+4b \neq 0)$ 、その根を $\lambda \neq \mu$ とすれば、一般解は

$$x_k = \alpha\lambda^k + \beta\mu^k, \quad f(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t}.$$

(ii) 重根の場合 $(a^2+4b=0)$ 、$\lambda = a/2$, $m=2$ に注意すれば、$a \neq 0$ のときの一般解が

$$x_k = (\alpha + \beta k)\lambda^k, \quad f(t) = (\alpha + \beta t)e^{\lambda t}.$$

問 12.4. ($\sharp$) これを確かめよ。

「微分方程式と差分方程式、難しきは差分なれど、線型の交わりの深さよ」— Agsaryim Ghuamie

直和と射影分解

直和分解の内容を作用素の言葉で表現してみよう。直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ において、V のベクトル v は、$v = v_1 + \cdots + v_r$ $(v_i \in V_i)$ という表示をもち、しかも表示の仕方はひと通りしかない。このことから、v に対して、その V_i 成分 v_i を取り出す写像 $v \mapsto v_i$ は、V から V_i の上への線型写像を定める。今、各 V_i は V の部分空間であるから、この写像を V から V への作用素 E_i と思うことができる。作用素としての E_i は、$E_i v_i = v_i$ $(v_i \in V_i)$ となるので、$E_i^2 = E_i$ をみたす。一般に、$E^2 = E$ となる線型作用素を**射影**[*100] (projection) とよぶ。上で導入した射影 E_i は、$E_j v_i = 0$ $(j \neq i)$ となることから、代数関係 $E_iE_j = \delta_{i,j}E_i$ をみたす。さらに、$v = E_1v + \cdots + E_rv$ $(v \in V)$ であることから、$E_1 + E_2 + \cdots + E_r = I_V$ もわかる。

逆に、V における射影の集まり $\{E_i\}_{1 \leq i \leq r}$ (ただし $E_j \neq 0$) が $E_iE_j = \delta_{i,j}E_i$ を満たせば、部分空間の集まり $\{V_i = E_iV\}$ は一次独立となり、さらに $E_1 + \cdots + E_r = I_V$ もみたせば、$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ がわかる。このような射影の集まりを I_V の**射影分解** (resolution) と呼ぶことにすれば、V の直和分解と I_V の射影分解が一対一に対応することがわかる。

例 12.9. 2 個の射影による分解を詳しく見ておこう。この場合は、$I_V = E_1 + E_2$, $E_1^2 = E_1$, $E_2^2 = E_2$, $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$ が必要な関係式であるが、このうち、$E_1^2 = E_1$ (あるいは $E_2^2 = E_2$) があれば、$E_2 = I_V - E_1$ と置くことで、残りの関係式がすべて出てくる。この意味で、2 個の場合の分解は、一つの射影を与えることと同等の内容である。

問 12.5. V における射影作用素 E に対して、$(I-E)V = \ker E$ である。

次に、行列の対角化に相当することを作用素 (変換) の言葉で表現してみよう。そのために必要な概念と言葉をさらにいくつか補充する。まずは固有値と固有ベクトル。線型作用素 $\phi : V \to V$ とスカラー λ に対して、ベクトル方程式 $\phi v = \lambda v$ が自明でない解 $0 \neq v \in V$ もつとき、λ を ϕ の**固有値**とよび、そのときの自明でない解 v を**固有ベクトル**という。また、固有値 λ に付随した固有空間を $V_\lambda = \ker(\phi - \lambda I) = \{v \in V; \phi v = \lambda v\}$ で定める。

[*100] ここでは、射影の記号として独語 Einheit に由来する E を使う。行列単位あるいは単位行列の記号と混同しないように注意。

問 12.6. ($\sharp$) $\mathbb{C}[[t]]$ における微分作用素 D は、勝手な複素数 λ を固有値としてもち、その固有空間は $\mathbb{C}e^{\lambda t}$ である。

さらに、部分空間 $W \subset V$ が、ϕ で**不変** (invariant) であるとは、$\phi(W) \subset W$ となることと定める。この場合、ϕ を W に制限したものが W での線型変換 (W から W への線型写像) を引き起こすことに注意。

固有空間 V_λ は不変部分空間であり、異なる固有値に属する固有空間の集まりは一次独立となる。また、行列の場合の対角化可能条件は、V が固有空間の直和に分解されることと言い換えられる。行列と同様、線型変換においても、この条件は多くの場合に成り立つのであるが、そうならない場合でも、不変部分空間への直和分解を考えることは、線型変換を調べる上で重要な手がかりを与えてくれる。不変部分空間という窓を通じて、線型変換全体ではなくそのうちの興味ある部分を取り出してみることが可能、といった仕組みである。

問 12.7. 以上の固有空間に関する主張を行列の場合の証明 (§10) を参考に確かめよ。

命題 12.10. 不変部分空間 W に対して、その基底 $(e_1, \cdots, e_m)$ を含むような V の基底 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ を用意する ($m = \dim W < n = \dim V$) と、不変性 $\phi(W) \subset W$ により、

$$[e]^{-1}\phi[e] = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in M_m(\mathbb{K}),\ B \in M_{n-m}(\mathbb{K}).$$

逆に、行列 $[e]^{-1}\phi[e] \in M_n(\mathbb{K})$ が、上記のような三角型ブロックで表わされるならば、$\{e_1, \cdots, e_m\}$ の一次結合全体 $\langle e_1, \cdots, e_m \rangle$ は不変部分空間となる。

命題 12.11. 部分空間 W の基底 $e' = (e_1, \cdots, e_m)$ を用意すれば、W が ϕ で不変のとき、$\phi e' = e'A$ となる行列 $A \in M_m(\mathbb{K})$ が存在する。逆にこのような行列 A があれば、W は ϕ 不変である。

命題 12.12. 線型変換 $\phi : V \to V$ に対して、不変部分空間による直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ があると、その直和分解に合わせた基底に関して ϕ を行列表示したものは

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$$

のように対角型ブロック行列で与えられる。逆に、このような対角型ブロック表示を与える基底があれば、各ブロックごとの構成要素の一次結合全体 V_i は不変部分空間となり、V は $\{V_i\}$ の直和に分解される。

問 12.8. 以上３つの命題を確かめよ。

最後に、不変部分空間による直和分解を射影の言葉で言い換えておこう。２つの作用素 $\varphi, \psi : V \to V$ が**交換する** (commute) あるいは**可換である** (commutative) であるとは、$\varphi\psi = \psi\varphi$ となること。

命題 12.13. 射影 E に対して、部分空間 EV および $(I - E)V$ が ϕ 不変であるための必要十分条件は、E と ϕ が交換すること。

問 12.9. これを確かめよ。

確率行列

３点間の確率的移動について考える。点１にいたものが、次に点１，２，３に移動する確率を a_1, a_2, a_3 とする。同様に点２、点３からの移動確率をそれぞれ b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 としよう。ある時点で点１，２，３にいる確率を x, y, z とすれば、次の時点での存在確率分布は

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

となる。このような行列 T を**確率行列** (stochastic matrix) と呼ぶ。時間の経過とともに確率分布がどのように変化するかを、行列 T の対角化の観点から調べてみよう。状況設定から、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \iff {}^tT \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、${}^tT$ は 1 を固有値として持つ。したがって、系 10.4 により、1 は T の固有値でもある。以下、簡単のために、$a_1 = b_2 = c_3 = 0$ とし、$a_2 = a$, $b_3 = b$, $c_1 = c$ とおいて、その固有ベクトルを求めると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-b & c \\ a & 0 & 1-c \\ 1-a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix}$$

となり、固有値 1 の固有空間への射影（作用素）で T と可換なものとして

$$E = \frac{1}{ab+bc+ca-a-b-c+3} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

をとることができる。（係数は $E^2 = E$ となるように調整。）

そこで、２次元不変部分空間 $(I_3 - E)\mathbb{R}^3 = \ker E = \{x+y+z=0\}$ の基底として、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとると、

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (1-a-c)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (b+c-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (c-1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、そこでの $[T]$ の表示行列は

$$\begin{pmatrix} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & b+c-1 \\ 1-a-c & c-1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。その固有値の情報は

$$\begin{vmatrix} t+c & 1-b-c \\ a+c-1 & t+1-c \end{vmatrix} = t^2 + t + ab + bc + ca - a - b - c + 1$$

に集約されるので、$\sigma = ab+bc+ca-a-b-c+1$ から読み取れる。ここで、

$$\{ab+bc+ca-a-b-c+1; 0 \le a, b, c \le 1\} = [0, 1]$$

および、最大値 $\sigma=1$ を取る点は、$a=b=c=1$ または $a=b=c=0$ であり、最小値 $\sigma=0$ を取る点は、$\{0,1\}\subset\{a,b,c\}$ である。

最大値に対応する確率行列は巡回置換に対応し、最小値をとるのは互換に相当する。$0<\sigma<1/4$ のときの固有値は実数で、$(-1,-1/2)$ と $(-1/2,0)$ の間に一つずつある。$1/4<\sigma<1$ のときは、互いに共役な絶対値が 1 より小さい複素数が固有値。最後に、固有値 $-1/2$ が重なっている

$$\sigma=\frac{1}{4}\iff(a-1/2)(b-1/2)+(b-1/2)(c-1/2)+(c-1/2)(a-1/2)=0$$

のときは、$(1/2,1/2,1/2)$ を頂点とし $(1,1,1)$ 方向に延びた円錐を表わす[*101]。このうち対角化可能であるのは、

$$\begin{pmatrix}-c & b+c-1\\ 1-a-c & c-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$$

すなわち、頂点のみ。それ以外は、固有値 $-1/2$ の対角化できない 2 次行列であるから、基底を取り替えて、

$$\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$$

という表示を得る。したがって、

$$\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}(-1/2)^n & n(-1/2)^{n-1}\\ 0 & (-1/2)^n\end{pmatrix}\to 0\ (n\to\infty)$$

に注意すれば、$0<\sigma<1$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}0 & 1-b & c\\ a & 0 & 1-c\\ 1-a & b & 0\end{pmatrix}^n=\frac{1}{ab+bc+ca-a-b-c+3}\begin{pmatrix}bc-b+1\\ ac-c+1\\ ab-a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

これは、初期分布 ${}^t(x,y,z)$ のとり方に係わらず、時間が経過すると、確率分布

$$\frac{1}{ab+bc+ca-a-b-c+3}\begin{pmatrix}bc-b+1\\ ac-c+1\\ ab-a+1\end{pmatrix}$$

に急速に近づくことを意味する。

Remark 14. 同様の結果が、正成分をもつ正方行列について広くなりたつ (Perron-Frobenius の定理)。

問 12.10. ($\sharp$) 細部を検証せよ。また、$c=1/2$, $\sigma=2/9$ の場合を詳しく調べよ。

問 12.11. 3 次の確率行列で、すべての固有値が有理数で互いに異なるものを具体的に一つ作れ。

問 12.12. 確率行列 $P=(p_{i,j})$ で、ある行のすべての成分が 0 でないものを考えると、連立一次方程式 $(x_1,\ldots,x_n)P=(x_1,\ldots,x_n)$ の解は $x_1=\cdots=x_n$ に限る。

13 内積空間

ここからは純粋の代数（＝等号の数学）から離れることになるが、現代物理の根幹をなす量子論を定量的に記述する上でも欠かせない内積の数学について、その基礎的な部分を見ていこう。以下、数の範囲としては

[*101] σ を (a,b,c) の関数とみたとき、点 $(1/2,1/2,1/2)$ は $(+,-,-)$ 型の鞍点になっている。例 15.4 参照。

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のいずれかとし、$\mathbb{C}$ における複素共役を $\overline{z}$ のように表わす。$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V における**内積** (inner product) とは、2 つのベクトル $v,w\in V$ に数 $(v|w)\in\mathbb{K}$ を対応させる関数で、以下の条件を満たすものをいう。

(i) $(v|w)$ は w について線型[*102]。
(ii) $(v|w)=\overline{(w|v)}$.
(iii) $(v|v)\geq 0$ であり (正値性)、$(v|v)=0$ となるのは $v=0$ の場合に限る (定値性)。

(i) と (ii) から、内積 $(v|w)$ は v について共役線型[*103](conjugately linear) であることがわかる。

内積が指定されたベクトル空間を**内積空間** (inner product space) と称する。

なお、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のときは、実内積、実内積空間という言い方をする。

問 13.1. 複素ベクトル空間の場合に、内積の性質 (ii), (iii) を、(ii)' $(v|w)$ は v についても線型、(iii)' $(v|v)\geq 0$、で置き換えると、$(v|w)=-(w|v)$ $(v,w\in V)$ がしたがう。

ここで、行列に対する操作で残っていたものを説明しておこう。行列 $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ に対して、その複素共役 (complex conjugate[*104]) $\overline{A}\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ を $\overline{A}=(\overline{a_{j,k}})$ で、**エルミート共役** (Hermitian[*105] conjugate) $A^*\in M_{n,m}(\mathbb{C})$ を $A^*={}^t\overline{A}=\overline{{}^tA}$ で定める。$\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$, $(AB)^*=B^*A^*$ に注意。ついでに、n 次正方行列 $A=(a_{jk})$ の**跡** (trace) が対角成分の和 $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ であったことを思い出しておく。

例 13.1.

(i) 行列空間 $M_{m,n}(\mathbb{K})$ の標準内積を $(A|B)=\mathrm{tr}(A^*B)=\mathrm{tr}(BA^*)=\sum_{j,k}\overline{a_{j,k}}b_{j,k}$ で定める。
(ii) とくに、列ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の標準内積は $(v|w)=v^*w=\sum_j\overline{v_j}w_j$ で与えられる。

例 13.2.

(i) 有界閉区間 $[a,b]$ 上の複素数値連続関数全体のつくるベクトル空間 V において、

$$(f|g)=\int_a^b\overline{f(t)}g(t)\,dt$$

は V における内積を定める。

(ii) 多項式ベクトル空間 $\mathbb{C}[t]$ における内積を

$$(f|g)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}g(t)e^{-t^2/2}\,dt$$

で定めることができる。

定理 13.3 (内積の不等式[*106])**.** 内積に関して、不等式 $|(v|w)|^2\leq(v|v)(w|w)$ が成り立ち、等号は $\{v,w\}$ が

[*102] 数学の専門家による本だと、v について線型であるとするものが多いのであるが、上の方が理にかなっている。
[*103] $(v'+\alpha v|w)=(v'|w)+\overline{\alpha}(v|w)$ が成り立つこと。反線型 (anti-linear) ともいう。
[*104] ラテン語の con (ともに) と jugum（くびき）に由来する。文法用語としては活用の意味もある。くだけて「芋づる式」であるか。
[*105] フランスの数学者 Charles Hermite (1822–1901) が、実数と似た性質を行列に見い出したことにちなむ。英語では、はーみっしゃん、のように発音するのだが、これを嫌う人もいるようで、昔々、物理の先生が量子力学の授業で、ェルミッチャン、ェルミッチャンと連呼していたのが、今に懐かしい。
[*106] 通常、Cauchy-Schwarz の不等式あるいは Schwarz の不等式と呼ばれる。元々は数列あるいは積分についての不等式で、この二人以外にもいろいろな人たちが関係している。ということで、ここでは中立的な名称にしておく。ちなみに、この洒落た証明は Schwarz によるものらしい。

一次従属の場合に限っておこる。

Proof. (Hermann Schwarz, 1888) v, w のいずれかが零ベクトルの時に正しいことは明らかなので、$v \neq 0$, $w \neq 0$ の場合を考える。複素数 λ をパラメータとした等式

$$(\lambda v + w|\lambda v + w) = |\lambda|^2(v|v) + \overline{\lambda}(v|w) + \lambda(w|v) + (w|w)$$

において、$\lambda = -(w|v)/(v|v)$ を代入すると、右辺は $(w|w) - |(v|w)|^2/(v|v)$ となる一方で、左辺は ≥ 0 であることから内積の不等式を得る。さらに内積の不等式で等号が成り立てば、左辺 $= 0$ より、$w = -\lambda v$ となって、$\{v, w\}$ は一次従属。逆に $\{v, w\}$ が一次従属、すなわち $v = \alpha w$ または $w = \beta v$ であれば、$|(v|w)|^2 = (v|v)\,(w|w)$ となることはすぐに分かる。 □

Remark 15. 証明をたどれば分かるように、内積の不等式自体は正値性だけから出る。もう少し詳しく書けば、まず定値性を仮定しない場合を半内積 (semi-inner product) と呼べば、そのときも不等式

$$|\lambda|^2(v|v) + \overline{\lambda}(v|w) + \lambda(w|v) + (w|w) \geq 0$$

が成り立つ。これから、$(v|v) \neq 0$ のときは、上で与えた証明がそのまま使え、半内積の不等式 $|(v|w)|^2 \leq (v|v)(w|w)$ が成り立つ。もし $(v|v) = 0$ であれば、上の不等式から $(v|w) = 0$ でなければならず、このときも半内積の不等式は正しい。

例 13.4. ここでは実内積を考える。

(i) (Cauchy 1821)

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

(ii) (Bunakovsky 1859)

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b x(t)^2\,dt \int_a^b y(t)^2\,dt.$$

内積空間において、ベクトル v の**大きさ**[*107] (magnitude) を $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$ で定めると、$\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$ $(\alpha \in \mathbb{K})$ であり、内積の不等式から**三角不等式** (triangle inequality) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ がしたがう。大きさが 1 のベクトルは**単位ベクトル** (unit vector) と呼ばれ、与えられたベクトル $v \neq 0$ に対して、単位ベクトル $\frac{1}{\|v\|}v$ を v の**規格化** (normalization) という。

問 13.2. 内積の不等式から三角不等式を、三角不等式から内積の不等式を、互いに導け。

実内積空間においては、余弦定理がなりたつように、2 つのベクトルの成す角度 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ を

$$\cos\theta = \frac{(v|w)}{\|v\|\,\|w\|}$$

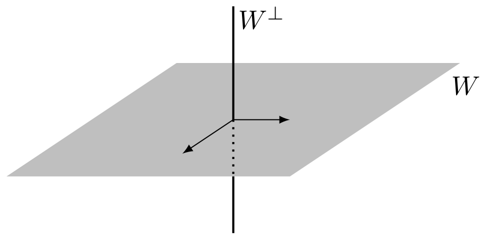
で定義する。この解釈に準じて、複素内積空間においても、$(v|w) = 0$ である 2 つのベクトルは**直交する**という言い方をする。また、上の $\cos\theta$ に相当する複素数は**確率振幅** (probability amplitude) ともいう。

内積空間の部分集合 S に対して、V の部分空間 $S^\perp$ を

$$S^\perp = \{v \in V; (v|w) = 0 \text{ for all } w \in S\}$$

で定める。定義から $S \subset (S^\perp)^\perp$ である。S が部分空間 W であるとき、$W^\perp$ を W の**直交補空間** (orthogonal complement) とよぶ。このとき、内積の正定値性から $W \cap W^\perp = \{0\}$ が成り立つ。

[*107] 大きさの他に、長さ (length)、ノルム (norm) もよく使われる。高校でのように絶対値記号を流用することもあるが、ここでは混乱を避けるためにノルムの記号で表わす。なお、(ユークリッド) 空間のベクトルの大きさは $|v|$ とも書く。



問 13.3. ($\sharp$) $S^{\perp}$ が部分空間であることと $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$ および $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ を確かめよ。

零でないベクトルの集まり $e_1, \cdots, e_m$ は、$(e_j|e_k) = 0$ $(j \neq k)$ であるとき**直交系** (orthogonal system)、より限定的に $(e_j|e_k) = \delta_{j,k}$ であるとき**正規直交系** (orthonormal[*108] system) という。言い換えると、正規直交系とは、互いに直交する単位ベクトルの集まりに他ならない。正規直交系で基底になっているものを**正規直交基底** (orthonormal basis) とよぶ。

直交系 $e_1, \cdots, e_m$ から正規直交系を作るのは簡単で、それぞれのベクトルを $e_1/\|e_1\|, \cdots, e_m/\|e_m\|$ のように規格化すればよい。

例 13.5.

(i) 3次元幾何ベクトル空間において、直交座標系に付随した単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は正規直交基底。

(ii) $\mathbb{K}^n$ において、基本ベクトル $\{\delta_j\}$ は正規直交基底を成す。

(iii) ${}^t\mathbb{C}^n$ において、$f_j = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, e^{2\pi ij/n}, e^{2\pi i2j/n}, \cdots, e^{2\pi i(n-1)j/n})$ $(j = 1, \cdots, n)$ は正規直交基底をなす。

(iv) 閉区間 $[0, 2\pi]$ の上で定義された連続関数の作る内積空間において、三角関数系

$$\{\cos(nx)/\sqrt{\pi}, \sin(nx)/\sqrt{\pi}; n = 1, 2, \dots\}$$

に定数関数 $1/\sqrt{2\pi}$ を付け加えたものは正規直交系を成す。

問 13.4. ($\sharp$) 上の例の (iii), (iv) を確かめよ。

正規直交系 $e_1, \cdots, e_m$ があると、ベクトルを $e_1, \cdots, e_m$ の一次結合で表わす際の係数が簡単に計算できる。実際 $v = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j$ と e_k との内積を計算すれば、

$$(e_k|v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (e_k|e_j) = \lambda_k$$

となるので、$v = \sum_{j=1}^m (e_j|v) e_j$ を得る。とくに $v = 0$ の場合は $\lambda_k = 0$ を意味するので、$e_1, \cdots, e_m$ の一次独立性もわかる。また、この表示から、

$$(w|v) = \sum_{j=1}^m (w|e_j)(e_j|v) \quad \text{および} \quad (v|v) = \sum_{j=1}^m |(e_j|v)|^2$$

もわかる。

次に $e_1, \cdots, e_m$ が部分空間 $W \subset V$ の正規直交基底であったとしよう。ベクトル $v \in V$ に対して、$v_{\perp} = v - \sum_j (e_j|v) e_j$ とおけば、$(e_k|v_{\perp}) = (e_k|v) - \sum_j (e_j|v)(e_k|e_j) = 0$ $(1 \leq k \leq m)$ となることから、

[*108] normal は、様々な場面で「具合がよい」ぐらいの意味合いで使われる響きのよい言葉である一方で、情報に乏しい。その訳語である正規は、それに拍車をかけた権威付けの風合いまである。物理では orthonormal に直交規格化という訳を当てていて、こちらの方がまだしもながら、五十歩百歩といったところ。単位ベクトルに合わせた単位直交系 (orthounital) でよかったものを。

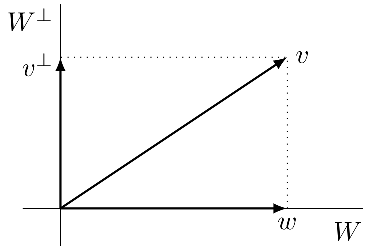


図 1

$v_\perp \in W^\perp$ である。これは、v が W のベクトル $\sum_j (e_j|v)e_j$ と $W^\perp$ のベクトル $v^\perp$ の和で書き表されることを意味するので、$W \cap W^\perp = \{0\}$ に注意すれば、$V = W \oplus W^\perp$ が示された。

このことから、すべての有限次元内積空間 V が正規直交基底をもつことがわかる。実際、基底ではない正規直交系 $e_1, \cdots, e_m$ に対して、$W = \mathbb{K}e_1 + \cdots + \mathbb{K}e_m$ に上の議論を適用すれば、$v \notin W$ であるベクトルに対して、$0 \neq v_\perp = v - \sum (e_j|v)e_j \in W^\perp$ に注意して $e_{m+1} = v_\perp / \|v_\perp\|$ とおくと、$e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}$ は正規直交系となる。以下、これを繰り返すと、V は有限次元であるから、いつかは基底に到達する。この正規直交基底を作るアルゴリズムを **Gram-Schmidt の直交化** (Gram-Schmidt' orthogonalization) という。もう少し限定的に、一次独立なベクトルの列 $v_1, v_2, \cdots$ があるとき、部分空間の増大列

$$\langle v_1 \rangle \subset \langle v_1, v_2 \rangle \subset \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \cdots$$

に上の方法を適用することで、正規直交系 $e_1, e_2, \cdots$ を、$\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = \langle e_1, \cdots, e_k \rangle$ $(k = 1, 2, \cdots)$ かつ e_{k+1} が

$$v_{k+1} - (e_1|v_{k+1})e_1 - \cdots - (e_k|v_{k+1})e_k$$

の規格化に一致するように、順次求めることができる。

Remark 16. 実際の計算では、次のような直交系 $f_1, f_2, \cdots$ をまず求め、しかる後に $e_k = f_k / \|f_k\|$ と置く方が効率的である。むしろ、これをグラム・シュミットの直交化と呼ぶべきか。

$$f_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(f_j|v_{k+1})}{(f_j|f_j)} f_j$$

以上をまとめて、以下の定理と定義を得る[*109]。

定理 13.6. 有限次元内積空間 V においては、与えられた正規直交系にベクトルを何個か追加することで正規直交基底にすることができる。とくに、正規直交基底がつねに存在する。

定義 13.7. 内積空間 V の部分空間を W とする。ベクトル $v \in V$ に対して、$v - w \in W^\perp$ となる $w \in W$ を v の W への**正射影** (orthogonal[*110] projection) とよぶ。正射影は、存在すれば一つしかない。実際、$w' \in W$ をもう一つの正射影とすると、$w - w' = (v - w') - (v - w)$ は $W \cap W^\perp$ に属し、0 となる。

定理 13.8 (射影定理)**.** 内積空間 V の有限次元部分空間 W に対して、$V = W \oplus W^\perp$ のように直交分解される。すなわち、V のすべてのベクトルは W への正射影をもつ。具体的に、$v \in V$ の W への正射影 w は、

[*109] 世間の教科書では、アルゴリズムの部分が必要以上に強調されていて、この大事な点がおろそかになっていることが多い。

[*110] ortho は「直立」を意味する古代ギリシャ語に由来し、垂直な、真っ直ぐな、正しい、を表わす接頭辞。角 (gon) はどこに行った？

W の正規直交基底 $e_1, \cdots, e_m$ を使って、

$$w = \sum_{j=1}^{m} (e_j|v)e_j$$

と表示される (**射影公式**)。正規直交系のありがたさ。

系 13.9. 内積空間の有限次元部分空間 W に対して、$(W^\perp)^\perp = W$ が成り立つ。直交の直交がもとに戻る。

Proof. $v \in (W^\perp)^\perp$ に対して、$0 = (v_\perp|v) = (v_\perp|v_\perp)$ より $v_\perp = 0$、すなわち、$v = \sum_j (e_j|v)e_j \in W$ である。 $\square$

Remark 17. 上で述べた基本定理の証明に必要となる前提結果は基底の存在と次元の確定 (定理 11.4) のみで、したがって、内積空間についての多くは行列代数と独立に展開することができる。射影公式はまた、無限次元にまで拡張できて、とくに三角関数系の場合はフーリエ級数展開というものになる。

例 13.10. $\mathbb{R}^3$ の基底 $v_1 = {}^t(1,1,1), v_2 = {}^t(1,0,0), v_3 = {}^t(1,0,1)$ にグラム・シュミットの直交化を実行してみると、答えは $f_1 = {}^t(1,1,1)$, $f_2 = {}^t(2,-1,1)/3$, $f_3 = {}^t(0,-1,1)/2$ を規格化した $e_1 = {}^t(1,1,1)/\sqrt{3}$, $e_2 = {}^t(2,-1,-2)/\sqrt{6}$, $e_3 = {}^t(0,-1,1)/\sqrt{2}$ である。

例 13.11. $\mathbb{R}^3$ の自明でない部分空間は 1 次元または 2 次元で、それぞれに 2 次元または 1 次元の直交補空間が付随する。したがって、$\mathbb{R}^3$ を 2 つの部分空間に直交分解する方法は、原点を通る直線の数だけある。

問 13.5. ($\sharp$) ベクトル ${}^t(1,-2,2) \in \mathbb{R}^3$ の、部分空間 $W = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$ およびその直交補空間 $W^\perp$ への正射影をそれぞれ求めよ。

例 13.12. 正射影を使って内積の不等式を導くこともできる。$w \neq 0$ に対して、一次元ベクトル空間 $W = \mathbb{K}w$ への $v \in V$ の正射影が $v_W = \frac{(v|w)}{(w|w)}w$ で与えられるので、$v_\perp = v - v_W \in W^\perp$ に注意すれば、

$$(v|v) = (v_W|v_W) + (v_\perp|v_\perp) \geq (v_W|v_W) = \frac{|(v|w)|^2}{(w|w)}.$$

これは不等式の幾何学的証明とでもいうべき自然なものではあるが、残念ながら半内積では使えない。

問 13.6. 内積空間の一般の基底 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ に Gram-Schmidt 直交化を施して得られる正規直交基底を $e = (e_1, \cdots, e_n)$ とすれば、e と f を結ぶ基底取替行列 $e^{-1}f$, $f^{-1}e$ は、上三角行列である。

問 13.7. ($\sharp$) ガウス積分を復習 (予習？) した上で、例 13.2 で与えた多項式内積空間 $\mathbb{C}[t]$ において、$1, t, t^2, \cdots$ に Gram-Schmidt の直交化を適用してみよ。出現する多項式（エルミート多項式という）に規則性を見出せるか。

V のベクトル v から W への正射影を取り出す写像 $P : v \mapsto \sum_j (e_j|v)e_j$ は V における線型作用素になっていて、これも**正射影**あるいは単に**射影** (projection) と呼ばれる。ちなみに、物理では $P = \sum_j |e_j)(e_j|$ のように書き表わす (Dirac の記法)[111]。とくに $W = V$ であれば、P は V の恒等作用素 I に一致し、$I = \sum_j |e_j)(e_j|$ は単位の分解 (resolution of identity) と称される。

[111] 意外にも数学における定まった書き方がない。これは $\sum_j e_j e_j^*$ 以外に書きようはないと思うのだが、皆さん好き勝手してます。

例 13.13. $\mathbb{C}^n$ の正規直交系 $e_1, \cdots, e_m$ に対して、部分空間 $W = \mathbb{C}e_1 + \cdots + \mathbb{C}e_m$ への正射影は、行列 $e_1 e_1^* + \cdots + e_m e_m^*$ によって表される。とくに、$\mathbb{C}^2$ の単位ベクトル ${}^t(e^{i\varphi/2}\cos\theta, e^{-i\varphi/2}\sin\theta)$ の張る部分空間への正射影は、次の行列で表される。**オイラーの公式***112(Euler's formula) $e^{it} = \cos t + i\sin t$ に注意。

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2}\cos\theta \\ e^{-i\varphi/2}\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\theta & e^{i\varphi/2}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & e^{i\varphi}\cos\theta\sin\theta \\ e^{-i\varphi}\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

例 13.14. $\mathbb{R}^3$ から、その部分空間 $W = \langle x - y + 2z = 0 \rangle$ への射影を表わす行列を求める。直交補空間 $W^\perp$ は1次元でベクトル $(1, -1, 2)$ の定数倍であるから、その規格化 $(1, -1, 2)/\sqrt{6}$ を使うと、$W^\perp$ への射影が、行列

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

で表されるので、W への射影を表わす行列は、これを単位行列から引いて、

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

定理 13.15 (変分原理)**.** 内積空間 V において、$v \in V$ の有限次元部分空間 W への正射影 $Pv = \sum (e_j|v)e_j$ は、関数 $W \ni w \mapsto \|v - w\|$ の値を最小にするベクトルとして特徴づけられる。

有限個のパラメータ $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ をもつ関数 $y = f(x) = \sum_j \alpha_j f_j(x)$ を実際の観測値 (x_k, y_k) $(k = 1, \cdots, n)$ に当てはめる際に多用される方法として**最小二乗法** (the method of least squares) がある。これは、

$$\sum_k \left(y_k - \sum_j \alpha_j f_j(x_k) \right)^2$$

が最小となるようにパラメータ α を決めるというもので、ベクトル ${}^t(y_1, \cdots, y_n)$ をデータ空間 ${}^n\mathbb{R}$ の中の部分空間

$$W = \sum_j \mathbb{R} \begin{pmatrix} f_j(x_1) \\ \vdots \\ f_j(x_n) \end{pmatrix}$$

へ（標準内積に関して）正射影したものに一致するように α_j を選ぶという幾何学的意味をもつ。ただし、パラメータの数 l に比べて観測データの数 n は十分大きく、$\dim W = l$ であるものとする。具体的な計算は、Gram-Schmidt の直交化を経由しなくても、パラメータ α_i についての微分を 0 とおいて得られる連立一次方程式

$$\sum_k \left(y_k - \sum_j \alpha_j f_j(x_k) \right) f_i(x_k) = 0 \quad (i = 1, \cdots, l)$$

を α_j について解けばよい。ここでの大事な点は、このようにして求めた α_j が実際に最小値を与えることで、それを射影定理が保証してくれるところにある。

*112 なぜこのように書くかについては色々な説明が可能で、両辺を t で微分した結果を見比べるのが一つの方法。他に、Taylor 展開 $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + \cdots$ で $x = it$ を形式的に代入してみるとか。

問 13.8. $f(x) = \alpha x + \beta$ の場合に、最小二乗法を使って α, β を定めよ。

内積の手法は、不変部分空間の小窓を構成する上でも役に立つ。このことをランク 1 の行列作用素で確かめよう。$C = ab^*$ $(a, b \in \mathbb{C}^n)$ とし、$C \neq 0 \iff a \neq 0, b \neq 0$ を仮定する。$V = \mathbb{C}a + \mathbb{C}b$ は、C で不変であるが、$V^\perp \subset \{b\}^\perp = \ker C$ も C で不変である。

(i) $\dim V = 1$ のときは、C は V への射影のスカラー倍である。

(ii) $\dim V = 2$ のとき、すなわち $\{a, b\}$ が一次独立のときは、b, a に直交化を施して得られる V の正規直交基底を e_2, e_1 とし、それを含む C^n の正規直交基底を取ってきて、$e = (e_1, \ldots, e_n)$ とする。$(e_3, \ldots, e_n)$ が $V^\perp$ の正規直交基底であることに注意。具体的には、$e_2 = \frac{1}{\|b\|}b$ であり、e_1 は

$$a - (e_2|a)e_2 = a - \frac{(b|a)}{(b|b)}b$$

を正規化したものである。その結果、$Ce_1 = 0$, $Ce_2 = \|b\|a$ であり、$(e_2|Ce_2) = (b|a)$ となることから、不変部分空間 V 上で C は、

$$(Ce_1, Ce_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & (b|a) \end{pmatrix}$$

と表わされる。

したがって、$(b|a) \neq 0$ のとき、$(b|a)$ を固有値とする固有ベクトルは、

$$f = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} \alpha \\ (b|a) \end{pmatrix} = \alpha e_1 + (b|a)e_2$$

で与えられ、C は、基底 $(e_1, f, e_3, \ldots, e_n)$ によって対角化される。

$(b|a) = 0$ のときは、C のすべての固有値は 0 で、$e_1 = (1/\|a\|)a$ となることから、$Ce_2 = (\|b\|/\|a\|)e_1$ であり、この場合は、

$$(Ce_1, Ce_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 0 & \|b\|/\|a\| \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、C は対角化できない。

14 エルミート共役

内積空間における線型作用素については、内積に由来するさまざまな数値的情報を利用することで、より強力な取り扱いが可能となる。その内容は、代数というよりは解析的であり、一方で量子論的でもあり、合わせて量子解析的とでもいうべく、いわゆる線型代数の枠に収まりきらないのが何とも悩ましい。世間の教科書も、この内積空間における作用素の扱いが引き気味で、もどかしい限り。量子論の数学的形式を避けての正しい扱いは難しいと思いつつも、まずは無難なところから始めよう。

内積空間の間の線型写像 $\phi : V \to W$ に対して、線型写像 $\varphi : W \to V$ で、$(w|\phi v) = (\varphi w|v)$ $(v \in V, w \in W)$ となるものを、ϕ の**エルミート共役**[*113](hermitian conjugate) とよび、$\varphi = \phi^*$ と表記する。エルミート共役は存在すれば一つしかない。実際、ψ も ϕ のエルミート共役であったとすると、$(\psi w|v) = (w|\phi v) = (\varphi w|v)$ がすべての $v \in V$ で成り立つので、$0 = (\psi w - \varphi w|v)$ で $v = \psi w - \varphi w$ とおけば、$\psi w = \varphi w$ $(w \in W)$。

[*113] ほかに随伴 (adjoint) という数学業界特有のよび方もある。フランス語（もとはラテン語）に由来し、joined to の意味。

例 14.1. 列ベクトル空間における標準的な内積に関して、行列を左から掛けることで得られる線型写像のエルミート共役は、行列のエルミート共役に他ならない。実際、$A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ と $v \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^m$ に対して、

$$(w|Av) = w^*Av = (A^*w)^*v = (A^*w|v).$$

エルミート共役をとる操作は共役線型であり、行列のエルミート共役と共通する代数関係をみたす。たとえば、

$$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*, \quad (\phi^*)^* = \phi$$

であり、ϕ がエルミート共役をもつ同型写像であれば、ϕ^* も同型写像で $(\phi^{-1})^* = (\phi^*)^{-1}$ が成り立つ。

命題 14.2. 有限次元内積空間 V から内積空間 W への線型写像 ϕ はエルミート共役をもつ。

Proof. V の正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ をとってきて、線型作用素 $\varphi : W \to V$ を $\varphi(w) = \sum(\phi(e_k)|w)e_k$ で定めると、

$$(\varphi(w)|v) = \sum(w|\phi(e_k))(e_k|v) = (w|\phi\Big(\sum e_k(e_k|v)\Big)) = (w|\phi(v)).$$

□

例 14.3. $v \in V$ を線型写像 $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda v \in V$ と同一視すれば、そのエルミート共役 $v^* : V \to \mathbb{C}$ は、$v^* : v' \mapsto (v|v') \in \mathbb{C}$ となる。とくに、$v^*w = (v|w)$ であり、$wv^* : V \to V$ は、線型作用素 $V \ni v' \mapsto w(v|v') = (v|v')w \in V$ を表わす。物理ではこれを $|w)(v|$ のように書くのであった[*114]。数学方面では内積の線型性の位置の不整合と相まって、これが何故か未だに普及しない不思議。

また、標準内積空間 $\mathbb{C}^n$ から内積空間 V への線型写像を V^n の元 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ と同一視すれば、a のエルミート共役 $a^* : V \to \mathbb{C}^n$ は、

$$a^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix} : v \mapsto \begin{pmatrix} (a_1|v) \\ \vdots \\ (a_n|v) \end{pmatrix}$$

のように表される。

問 14.1 (*). 内積空間から 1 次元内積空間 $\mathbb{C}$ への線型写像でエルミート共役をもたないものを作れ。

定義 14.4. 内積空間から内積空間への同型写像 $\phi : V \to W$ で、$(\phi(v)|\phi(v')) = (v|v')$ $(v, v' \in V)$ となるものを**ユニタリー写像** (unitary[*115] map) という。ユニタリー写像にかかわる 2 つの内積空間は、内積空間として同じ構造をもつことになり、等距離同型である (isometrically isomorphic) とよばれる。

命題 14.5. 内積空間から内積空間への線型写像 $\phi : V \to W$ がユニタリー写像となるための必要十分条件は、$\phi^* = \phi^{-1}$ であること。

命題 14.6. 有限次元内積空間から内積空間への線型写像 $\phi : V \to W$ について、次は同値。

(i) ϕ はユニタリーである。
(ii) V の正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ で $\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)$ が W の正規直交基底となるものが存在する。
(iii) V の勝手な正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ に対して、$\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)$ が W の正規直交基底となる。

[*114] Dirac notation というのだが、元は Gibbs の dyad であり、さらには Grassmann まで遡ることはあまり知られていない。
[*115] unit からの派生語で、単位ベクトルを単位ベクトルに移すことに由来する。しかし無限次元ではそれだけから同型は出ない。

系 14.7. 2 つの有限次元内積空間が等距離同型であるための必要十分条件は、次元が一致すること。

問 14.2. (♯) 以上の命題と系を示せ。こういうことは言われなくても自分で確かめるもの。

例 14.8. 有限次元内積空間 V の基底 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ が定める同型写像を $[e] : \mathbb{C}^n \to V$ で表わすとき、e が正規直交基底であることと $[e]$ がユニタリー写像であることが同値。このとき、定義 11.16 にしたがい $[e] = e$ と同一視し、例 14.3 で導入した記号を使えば、

$$e^* = \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix} = e^{-1}$$

であり、線型作用素 $\phi : V \to V$ の行列表示 A を

$$e^*\phi e = \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix} (\phi e_1, \dots, \phi e_n) = \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n)A = \begin{pmatrix} e_1^*e_1 & \dots & e_1^*e_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n^*e_1 & \dots & e_n^*e_n \end{pmatrix} A = I_nA = A$$

のように表わすこともできる[*116]。

補題 14.9 (分極等式 polarization identity)**.** 実内積空間においては、等式

$$4(w|v) = (v + w|v + w) - (v - w|v - w)$$

が、複素内積空間においては、等式

$$4(w|v) = \sum_{k=0}^{3} i^k (v + i^k w|v + i^k w)$$

が成り立つ。

Proof. 内積空間における等式 $2(v|w) + 2(w|v) = (v + w|v + w) - (v - w|v - w)$ を使うと、

$$\sum_{k=0}^{3} i^k (v + i^k w|v + i^k w) = 2(v|w) + 2(w|v) + 2i((v|iw) + (iw|v)) = 4(w|v).$$

□

系 14.10. 内積空間 V から内積空間 W への線型写像 ϕ について、すべての $v \in V$ で $\|\phi(v)\| = \|v\|$ ならば、$(\phi(v)|\phi(v')) = (v|v')$ $(v, v' \in V)$ が成り立つ。

Remark 18. 複素ベクトル空間 V の 2 つのベクトル $v, w \in V$ に複素数 $[v, w]$ を対応させる関数で、v について共役線型、w について線型なものを**両線型形式** (sesquilinear form[*117]) という。両線型形式で $\overline{[v, w]} = [w, v]$ となるものを**エルミート形式** (hermitian form) という。分極等式は両線型形式について成り立ち、それを使えば、両線型形式がエルミート形式になる条件を $[v, v] \in \mathbb{R}$ $(v \in V)$ と言い換えることができる。

命題 14.11. 有限次元内積空間 V における線型変換 ϕ について、次は同値。

[*116] 双対空間を導入して、こういった計算を内積抜きで形式的に行うことも可能。付録 J.1 参照。
[*117] sesqui = 1+ 1/2 ということなので勘定が合わぬ。両の字の妥当性は関数解析の注に書いたので、ここでは繰り返さない。

(i) すべての $v \in V$ で $\|\phi(v)\| = \|v\|$.
(ii) すべての $v, w \in V$ で $(\phi(v)|\phi(w)) = (v|w)$.
(iii) $\phi^* = \phi^{-1}$.
(iv) ϕ は正規直交基底を正規直交基底に移す。

Proof. (i) $\iff$ (ii) および (ii) $\Longleftarrow$ (iii) $\iff$ (iv) は既にわかっている。(ii) を仮定すると、ϕ は V の正規直交基底を V の正規直交系に移し、V が有限次元であるから、後者も正規直交基底となって (iv) が従う。 □

上の同値な条件を満たす線型変換を、実内積空間の場合は**直交変換** (orthogonal[*118] transformation)、複素内積空間の場合は**ユニタリー変換** (unitary transformation) と呼ぶ。行列の場合は、直交行列、ユニタリー行列という言い方をする。また、その条件 ${}^tTT = I$, $U^*U = I$ をそれぞれ書いてみると、$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底を並べたものに他ならず、両者は表裏一体の関係にあることがわかる。

命題の内容を行列表示で形式的に書いてみることも可能で、内積空間 V の 2 つの正規直交基底 $e = (e_1, \cdots, e_n)$, $f = (f_1, \cdots, f_n)$ に対して、

$$fe^* = (f_1, \cdots, f_n) \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix} = f_1 e_1^* + \cdots + f_n e_n^*$$

は V のユニタリー変換 ϕ を定め e を f に移す。一方 ϕ の基底 e に関する行列表示は、

$$e^*\phi e = e^* f = \begin{pmatrix} e_1^* f_1 & \dots & e_1^* f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n^* f_1 & \dots & e_n^* f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1|f_1) & \dots & (e_1|f_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n|f_1) & \dots & (e_n|f_n) \end{pmatrix}$$

で与えられる。これがユニタリー行列であることは、$(e^*f)^*(e^*f) = f^*ee^*f = f^*f = I_n$ のように形式的に確かめることもできる。

問 14.3. ユニタリー行列の複素共役および転置は、再びユニタリー行列である。

問 14.4. ユニタリー行列の行列式の絶対値は 1 である。とくに、直交行列の行列式の値は ± 1 である。

問 14.5. 奇数次の直交行列 T は、行列式の値 $\tau = \det(T)$ を固有値にもつ。
ヒント： 等式 ${}^tT(\tau I_n - T) = -\tau\,{}^t(\tau I_n - T)$。

例 14.12.

(i) 実数 $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ に対して、
$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\theta & -e^{-i\gamma}\sin\theta \\ e^{-i\beta}\sin\theta & e^{-i(\alpha+\beta+\gamma)}\cos\theta \end{pmatrix}$$
はユニタリー行列。とくに、$\alpha = \beta = \gamma = 0$ のときは、回転の行列 (§16 参照) である。
(ii) n 次の並べかえ $\sigma = (\sigma(j))_{1 \le j \le n}$ に対して、行列
$$T = (e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = (\delta_{j,\sigma(k)})_{1 \le j,k \le n}$$

[*118] 正しくは orthonormal とよぶべきではあるが、まあいい加減なものである。

は直交行列である。とくに巡換え (cyclic permutation) $\sigma = (2, 3, \ldots, n, 1)$ の場合、

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。これを**巡換え行列** (cyclic matrix*119) と呼び C で表わす。より広く、T の多項式として表わされる行列は**巡回行列** (circulant matrix) と呼ばれる。

問 14.6. 上の例以外に、２次のユニタリー行列はあるか。

問 14.7. 巡り換え行列 T のべき T^k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ を具体的に表示せよ。

$T^* = T$ となる作用素 (行列) を実の場合は**対称作用素／行列** (symmetric operator/matrix)、複素の場合は**エルミート作用素／行列** (hermitian operator/matrix) と称える。また、$T^*T = TT^*$ となるものを**正規作用素／行列** (normal operator/matrix)*120とよぶ。直交行列、ユニタリ一行列、エルミート行列、これらはすべて正規行列の仲間である。

Remark 19.

(i) エルミート行列の和も差もエルミート行列であるが、エルミート行列の積がエルミート行列になるための条件は、積が交換すること。

(ii) ユニタリー行列の積はユニタリー行列となるが、ユニタリー行列の和がユニタリー行列になることは稀である。

問 14.8. ユニタリー行列 U と単位行列 I の和がユニタリー行列であれば、U の固有値は $e^{\pm 2\pi i/3}$ の形である。

例 14.13.

(i) ３次のエルミート行列の形は

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c \\ \overline{b_1} & a_2 & b_2 \\ \overline{c} & \overline{b_2} & a_3 \end{pmatrix}.$$

ここで、a_j は実数、他は複素数を表わす。

(ii) ２次のエルミート行列の作る実ベクトル空間の基底として、Pauli の**スピン行列** (spin matrix)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に単位行列 I_2 を加えたものを取ることができる。スピン行列はユニタリー行列でもある。

問 14.9. ($\sharp$) エルミート行列全体は、実ベクトル空間をなす。その次元を求めよ。

問 14.10. ベクトル $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して、$\sigma \cdot \overrightarrow{a} = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$ とおくと、

$$(\sigma \cdot \overrightarrow{a})(\sigma \cdot \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{a} | \overrightarrow{b}) I_2 + i\sigma \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).$$

*119 巡換え行列を表わす英語はとくにないようであるが。

*120 またもや正規である。良い性質の行列ぐらいの意味であるが、他に呼び方はないものか。

命題 14.14. 内積空間 V の部分空間への正射影 E は、エルミートな射影（すなわち $E^2 = E = E^*$）である。逆に、エルミートな射影 E に対して、E は部分空間 $W = EV$ への正射影である。

Proof. V における射影 E と V の直和分解 $V = EV \oplus (I - E)V$ が対応するので、$E^* = E \iff EV \perp (I - E)V$ がわかればよい。$(Ev|(I - E)w) = (v|(E^* - E^*E)w)$ より、直交性は $E^* = E^*E$ と言い換えられるので、前提 $E^2 = E$ の下、これが $E^* = E$ と同値であることは見易い。 □

例 14.15. 内積空間 $\mathbb{C}^2$ は、量子力学を組み立てる上での基本素材とでも言うべきもので、その部分空間の記述を調べておくことは基本的な意味をもつ。自明でない部分空間は 1 次元であるので、$\mathbb{C}\binom{1}{w} = \mathbb{C}\binom{w^{-1}}{1}$ のように、拡大複素数 $w \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ で識別される。これに応じて、1 次元射影も

$$E = \frac{1}{1 + |w|^2} \begin{pmatrix} 1 & \overline{w} \\ w & |w|^2 \end{pmatrix}$$

のように、$w \in \overline{\mathbb{C}}$ を使って記述される。この対応で、直交補空間をとる操作 $E \mapsto I_2 - E$ は、複素数の反転 $z \mapsto -1/\overline{w}$ に相当することに注意。

一方で、エルミート行列 E の表示を

$$E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z & x - iy \\ x + iy & 1 - z \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

のように変更し、これが正射影を表わすための条件 $E^2 = E$ を書いてみると $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ となるので、$\overline{\mathbb{C}}$ は座標球面と同定されることになる。この意味で、$\overline{\mathbb{C}}$ は複素球面と呼ばれる。球面の極 $(0, 0, \pm 1)$ がそれぞれ $w = 0, \infty$ に対応している。

問 14.11. E とスピン行列の関係を考察せよ。

問 14.12. 直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ が直交分解であるための必要十分条件は、対応するすべての射影 E_i が正射影となることである。

命題 14.16.

(i) エルミート行列 (とくに実対称行列) の固有値は実数。
(ii) ユニタリー行列 (とくに直交行列) の固有値は、絶対値 1 の複素数。

Proof. この証明は簡単で楽しい。$Av = \lambda v$ とすると、$A^* = A$ であれば、$\lambda(v|v) = (v|Av) = (A^*v|v) = (Av|v) = \overline{\lambda}(v|v)$ から、$\lambda = \overline{\lambda}$.

$A^* = A^{-1}$ であれば、$A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$ に注意して、$\overline{\lambda}(v|v) = (Av|v) = (v|A^{-1}v) = \frac{1}{\lambda}(v|v)$ より、$|\lambda| = 1$. □

問 14.13. (♯) 行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ。

補題 14.17 (Schur)**.** 任意の行列は、ユニタリ行列により三角行列[*121] *(triangular matrix)* に相似変形できる。

[*121] ここで扱われるのは上三角行列と呼ばれるもので、対角線よりも下の成分がすべて 0 の行列をいう。

Proof. 行列のサイズ n の大きさに関する帰納法。サイズが $n-1$ の行列に対しては正しいと仮定する。いま、サイズが n の行列 A に対して、A の固有値 α とその固有ベクトル $\overrightarrow{u}$ を1組選び、$\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\|$ を含む正規直交基底 $(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ を用意すると、

$$A(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n) = (\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n) \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

という表示が得られる。ただし B はサイズが $n-1$ の行列である。こうして得られた行列 B に帰納法の仮定を適用すると、サイズが $n-1$ のユニタリー行列 T で、T^*BT が（サイズ $n-1$ の）三角行列となるものが存在する。そこで、サイズが n のユニタリー行列を

$$U = (\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

で定めると、U^*AU は三角行列となってめでたい。 □

定理 14.18 (Schur-Toeplitz)**.** 正規行列はユニタリー行列で対角化できる。逆にそのような行列は正規行列である。

Proof. 逆の方はすぐにわかるので、順の方を示す。まず、正規行列 A とユニタリー行列 U に対して、行列 U^*AU は再び正規行列になることに注意する。

そこで、三角行列 B に対して、

$$BB^* = B^*B \iff B \text{ は対角行列}$$

を示せば証明が完了する。これは左方を具体的に計算してみるとわかる。 □

Remark 20. ここではできるだけ手っ取り早い証明を与えたが、もっと自然な方法は、行列が線型作用素の表示形式であることと、下にある正規行列の固有ベクトルの性質、および直交分解を組み合せたものである。付録 C を参照。

問 14.14. 2つのユニタリー行列 U, V の和 $U+V$ が再びユニタリー行列になる場合について調べよ。

問 14.15. 次の形のブロック行列が正規であれば、$B=0$ である。ただし、A, C は正方行列とする。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

次の固有ベクトルに関する正規行列の性質も重要である。とくに固有ベクトルの直交性は、系 10.12 を強めたものになっている。

命題 14.19. 正規行列 A に対して、

(i) $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ ならば、$A^*\overrightarrow{x} = \overline{\lambda}\overrightarrow{x}$ である。

(ii) $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$, $A\overrightarrow{y} = \mu\overrightarrow{y}$ $(\lambda \neq \mu)$ であるならば、$\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ は直交する。

Proof. (i) は、

$$0 = ((A-\lambda I)\overrightarrow{x}|(A-\lambda I)\overrightarrow{x}) = ((A^*-\overline{\lambda}I)\overrightarrow{x}|(A^*-\overline{\lambda}I)\overrightarrow{x})$$

からわかる。（2つ目の等号で、$AA^* = A^*A$ を使う。）

(ii) は (i) に注意して、

$$\mu(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x}|A\overrightarrow{y}) = (A^*\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = \lambda(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$$

による。 □

問 14.16. 実正規行列 A の固有値 λ の固有ベクトル v に対して、ベクトル空間 $\mathbb{C}v + \mathbb{C}\overline{v}$ は、A 及び A^* で不変であり、したがってその直交補空間も不変であることを示せ。

正規行列の対角化の手順

ステップ１　固有値と固有空間を求める。
ステップ２　各固有空間ごとに正規直交基底を定める。
ステップ３　固有空間ごとの正規直交基底を並べてできるユニタリー行列が正規行列の対角化を実現する。

ステップ１で、固有方程式から固有値を求め、しかる後に固有空間を計算するのは効率が悪いため、直接、固有ベクトル方程式を解くことで、固有値と固有空間を同時に求めるのがよい場合もある。

例 14.20.

(i) 回転の行列 (§ 16 参照) の対角化。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = e^{\mp i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

(ii) 巡換え行列 C の固有値と固有ベクトル。これは直接固有ベクトル方程式を解くのがよい。

$$C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff x_k = \lambda^{-k} x_n \ (1 \leq k \leq n),\ \lambda^n = 1.$$

(iii) A 型グラフの隣接行列の固有値と固有ベクトル。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \iff x_{j-1} + x_{j+1} = \lambda x_j (2 \leq j \leq n-1), x_2 = \lambda x_1, x_{n-1} = \lambda x_n$$

これは、３項間漸化式 $x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k$ $(k \geq 1)$ を初期条件 $x_0 = 0$ の下で解いて、終期条件 $x_{n+1} = 0$ を課せばよい。特性二次方程式 $t^2 - \lambda t + 1 = 0$ の解を $q^{\pm 1}$ とすれば、$\lambda = q + q^{-1}$ であり、$x_k = q^k - q^{-k}$ $(1 \leq k \leq n)$ に終期条件を課すことで、$q^{2n+2} = 1$ となる。これから、$q = \pi i l/(n+1)$ $(1 \leq l \leq n)$ に応じて $\lambda = 2\cos\frac{\pi l}{n+1}$ を固有値とする固有ベクトル $x_k/2i = \sin\frac{\pi k l}{n+1}$ $(1 \leq k \leq n)$ を得る。

例 14.21 (巡回行列式)**.** 多項式 $f(t) = f_0 + f_1 t + \cdots + f_{n-1} t^{n-1}$ に巡り換え行列 C を代入して得られる巡回行列

$$f(C) = f_0 I_n + f_1 C + \cdots + f_{n-1} C^{n-1}$$

の行列式は、$\zeta = e^{2\pi i/n}$ を使って次のように因数分解される。

$$\det f(C) = \prod_{j=1}^{n} f(\zeta^k)$$

というのは、C の固有ベクトル x に対して、$C^k x = \lambda^k x$ であることから、$f(C)x = f(\lambda)x$ となり、x は $f(C)$ の固有ベクトルでもあり、その固有値は $f(\lambda)$ で与えられる。一方、C の固有値は 1 の n 乗根として、$\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n = 1$ の形であるから、$f(C)$ の固有値全体は $\{f(\zeta), f(\zeta^2), \dots, f(\zeta^n)\}$ となる。巡回行列 $f(C)$ は対角化可能であるから、その行列式の値は、すべての固有値の積で与えられるのが理由。

とくに、$f(t) = a + bt + ct^2$ $(n = 3)$ のときは、

$$f(C) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

であり、

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \det f(C) = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+\omega), \quad \omega = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

というよく知られた等式になる。

問 14.17. ($\sharp$) スピン行列をユニタリー行列で対角化せよ。

問 14.18. $\zeta = e^{2\pi i/n}$ とおけば、1 の n 乗根は、$\{1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}\}$ であることに注意し、巡り換え行列 C を対角化するユニタリー行列を $\zeta = e^{2\pi i/n}$ を用いて表わせ。

次の命題は、今までに用意した定理・方法を組み合せることで、困難なく示される。

命題 14.22. 実対称行列は直交行列によって対角化される。

問 14.19. 何をどう組み合せるとよいのか考えて、証明にまとめる。

問 14.20. 実対称行列

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

を対角化する直交行列を求めよ。

内積空間 V における正規作用素 A の互いに異なる固有値を $\{\alpha_j\}$ とし、固有空間 V_{α_j} への正射影を E_j とすると、$I_V = \sum_j E_j$ は直交分解を与え、$A = \sum_j \alpha_j E_j$ となる。この表示を A の**スペクトル分解**[*122](spectral decomposition) と称する。これは、固有ベクトルの選び方の任意性を排除した表示であり、無限次元内積空間に移行しやすい形になっている。

最後に、次の二次形式とも関係してくるエルミート行列の正値性について触れておこう。エルミート性の特徴づけは、分極等式のところでも注意した。他の性質は、エルミート行列の固有値が実数であることと、ユニタリー行列による対角化を使えば、難なくわかる。もはや練習問題に過ぎない。

命題 14.23. 内積空間 V における線型作用素 H がエルミートでるための必要十分条件は、すべての $v \in V$ に対して $(v|Hv)$ が実数であること。そしてこのとき、H の最大固有値・最小固有値はそれぞれ、

$$\max\{(v|Hv); v \in V, |v| = 1\}, \quad \min\{(v|Hv); v \in V, |v| = 1\}$$

に一致する。

[*122] ラテン語の spectrum に由来。狭義には分光学における周波数成分を意味するが、背景にある何かから見える形で現れ出たもの全般をさす。量子論の発展に伴い周波数成分の情報がエルミート作用素の固有値と認識され、それが数学用語として転用される。

定理 14.24. 有限次元内積空間 V における作用素 H について、(i)–(iii) は同値。さらに、(iv)–(vi) も同値。

(i) すべての $v \in V$ に対して $(v|Hv) \geq 0$ である。
(ii) $H = A^*A$ となるような V における線型作用素 A が存在する。
(iii) H はエルミートで、そのすべての固有値は正または零。
(iv) すべての $0 \neq v \in V$ に対して $(v|Hv) > 0$ である。
(v) $H = A^*A$ となるような V における線型作用素 A で逆をもつものが存在する。
(vi) H はエルミートで、そのすべての固有値は正。

前半の同値な条件を満たすエルミート作用素を**正値**[*123](positive semidefinite) あるいは簡単に**正**である (positive) という。後半のより強い条件を満たすエルミート作用素を**正定値** (positive definite) という。

系 14.25. 列ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 上の内積と n 次正定値行列は一対一に対応する。また、列ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 上の内積と n 次正定値実行列も一対一に対応する。

問 14.21. 上の命題・定理・系に証明をつけよ。

問 14.22. 内積空間のベクトル $v_1, \dots, v_l$ について $\det((v_j|v_k)) \geq 0$ であり、$v_1, \dots, v_l$ が一次独立であることと $\det((v_j|v_k)) > 0$ は同値。さらに、実内積空間においては、$v_1, \dots, v_l$ を辺とする平行体 (parallelotope) の l 次元体積が $\sqrt{\det((v_j|v_k))}$ で与えられる。

15 対称行列と二次形式

変数 $x_1, \dots, x_n$ の純二次式

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_j x_j$$

を $x = (x_1, \dots, x_n)$ の**二次形式** (quadratic form) という。二次形式の係数行列 $A = (a_{ij})$ は、対称性 $a_{ij} = a_{ji}$ を要求すれば一意的に決まり、

$$Q(x) = {}^t x A x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表示される。係数がすべて実数の二次形式を実二次形式 (real quadratic form) という。

例 15.1.

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

問 15.1. 二次形式

$$Q(x, y, z) = 2\sqrt{3}xy - 2yz + 3z^2$$

の係数行列を求めよ。

[*123] 半正定値とも呼ばれる。この正負にかかわる用語は、洋の東西問わず、どうにも不自由である。非負 (non-negative) のような言い方は見苦しいだけでなく、論理的にも問題がある。いっそのこと、零も含めて正とよび、零を含めない正は別の言い方、例えば真正とか、にした方が幸せかも知れない。実際、作用素解析方面では、そのような言葉づかいを用いる。

行列代数の起源は連立一次方程式であるが、もう一つの出処として、この実二次形式の扱いが挙げられよう。最も素朴な解析方法はここでも変数変換によるもので、

$$x = Ty \iff y = T^{-1}x$$

という新たな変数を使って書き直すと、

$$Q(x) = {}^t y {}^t TATy$$

のように、係数行列が A から ${}^tTAT$ に変化する。ここで、A が対称行列のとき、${}^tTAT$ も対称行列であることに注意する。ということで、${}^tTAT$ ができるだけ簡単な行列になるように行列 T を選べるかが問題となる。

命題 15.2. 与えられた実二次形式 $Q(x)$ に対して、直交行列 T を適切に選んで変数変換 $x = Ty$ を施して、

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^2$$

とできる。ここで、$\{\alpha_j\}$ は係数行列の固有値を表わす。

Proof. 直交行列については ${}^tT = T^{-1}$ であるから、命題 14.22 が適用できて、主張がなりたつ。 □

系 15.3. 実二次形式 $Q(x)$ の係数行列 A が 0 を固有値としない (すなわち逆行列をもつ) とき、

(i) A の全ての固有値が正ならば、二次形式は**正定値** (positive definite) と呼ばれ、$Q(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として、不等式

$$Q(x) \geq \alpha |x|^2$$

を満たす。ここで、α は最小の固有値。

(ii) A の全ての固有値が負ならば、二次形式は**負定値** (negative definite) と呼ばれ、$Q(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として、不等式

$$Q(x) \leq \beta |x|^2$$

を満たす。ここで、β は最大の固有値。

(iii) それ以外の場合、$Q(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として、原点を**鞍点**[*124] (saddle point) にもつ。

例 15.4. $Q(x,y,z) = a(x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx)$ の場合を調べる。こういう対称性がある場合は、行列式を計算するよりも直接固有ベクトル方程式を解いてしまった方が簡単。

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (\lambda - a)x = y + z \\ (\lambda - a)y = z + x \\ (\lambda - a)z = x + y \end{cases} \Longrightarrow (\lambda - a + 1)x = (\lambda - a + 1)y = (\lambda - a + 1)z$$

から $\lambda = a - 1$ は固有値で、その固有空間 V_{a-1} は $x + y + z = 0$ で定められる 2 次元部分空間である。$\lambda \neq a - 1$ となる固有値に属する固有ベクトルは、$x = y = z$ を満たすので、$\lambda = a + 2$ となり、$V_{a+2} = \mathbb{R}{}^t(1,1,1)$ である。したがって、$(1,1,1)$ 方向の座標 Z とそれに直交する座標 X, Y を使えば、

$$a(x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx) = (a-1)(X^2+Y^2) + (a+2)Z^2$$

という標準形を得る。この形から、問題の二次形式 Q は、$a = 1$ または $a = -2$ のとき退化しており、Q の様子は、正定値 $(a > 1)$、負定値 $(a < -2)$、鞍点 $(-2 < a < 1)$ のように完全にわかる。

[*124] 鞍点の意味については微積分の教科書を見よ。なお、この説明の出来不出来で、その本の価値が測れるとしたものである。

ちなみに、対角化のための直交行列を具体的に求めたかったら、例えば ${}^t(1,-1,0) \in V_{a-1}$ と直交する ${}^t(x,y,z) \in V_{a-1}$ が ${}^t(1,1,-2)$ に比例することに注意して、それぞれの固有ベクトルを規格化して並べることで得られる直交行列

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

を用意して、

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

とでもすればよい。

問 15.2. 上の問で与えた二次形式に変数変換を施し、その標準形を求めよ。

二次形式の標準形の応用例として、次の積分公式を挙げておく。

命題 15.5 (Gaussian Integral)**.** 実二次形式 $Q(x)$ が正定値であるとき、

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

問 15.3. 3重積分

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-z^2+xy+yz} dxdydz$$

の値を求めよ。

16 平面と空間の一次式変換

直交座標系とは、原点 o と変位ベクトル空間の正規直交基底を指定することに他ならない。その場合の座標は位置ベクトルの成分と同定される。2次あるいは3次の実正方行列は、位置ベクトルへの作用を通じて、平面あるいは空間の一次変換を引き起こす。これは、座標原点を動かさないため特殊なものではあるが、これと平行移動を組み合わせることで、一般的な**一次式変換**（**アフィン変換**[*125]ともいう）が記述される。簡単のために平面の場合を考えて、移動前と移動後の点の座標を (x,y), (x',y') とすれば、一般的な一次式変換は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

のようになる。x', y' が x, y の一次式で書けていることから、直線を直線（あるいは一点）に写すことは明らかである。また、これが全単射であるための必要十分条件は、行列部分が逆をもつこと、すなわち $ad-bc \neq 0$ ということ。このような変換は平行四辺形を平行四辺形に写し、その面積の比が $|ad-bc|$ であることは行列式のところで見たとおり。

問 16.1. 平面の一次式変換で $C = \{{}^t(x,y); |x| \leq y\}$ を C に移すものをすべて求めよ。

[*125] 英語の affine は姻戚関係者の意味であるが、ラテン語の affinis (ad+finis) に由来する言葉。affinis の意味は、「(土地の) 終わりへ＝周辺の」。今の場合、何の周辺かというと、linear の周辺らしい。苦し紛れの用語というべきか。式の上からは、linear = 純一次式、affine = 一般の一次式、であるから、「一次」という用語を affine の訳語に当てて良かったような。

問 16.2. $\mathbb{Z}^2 = \{{}^t(x,y); x, y$ は整数 $\}$ とおくとき、平面の一次式変換による $\mathbb{Z}^2$ の像が $\mathbb{Z}^2$ と一致するための必要十分条件を求めよ。

問 16.3. 平面の一次変換で、文字を斜体に写すものを求めよ。ヒント：x 軸上の点を動かさない一次変換の中から探す。

さて、2 点間の距離を保つ一次式変換[*126]（=**ユークリッド変換**）について調べよう。平行移動の部分はこの性質をもつので、行列部分を考えると、ベクトルの大きさを保つ線型変換となり、命題 14.11 から、直交変換である。そこで、2 次と 3 次の直交行列についてまず調べよう。

直交変換

2 次の直交行列 T は、$\mathbb{R}^2$ の正規直交基底 e, f を使って、$T = (e, f)$ と表わされる。e は単位ベクトルであるから、

$$e = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

と書ける。単位ベクトル f は、これに直交するので、

$$\pm \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。まず、

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

であるが、これは原点のまわりの角度 θ の回転を表わす。実際、角度 θ だけ回転させる変換 R を考えると、R は平行四辺形を平行四辺形に移すので、加法的であり、さらに、正数 $r > 0$ に対して rv を $rR(v)$ に移すので線型であることがわかる。また、基本ベクトルの移動先を考えると、

$$R : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

となって、T と R は一致する。

問 16.4. この回転の行列表示から、三角関数の加法定理を導け[*127]。

次に、

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

であるが、これは、例 12.2 で見たように、直線 $y = x\tan(\theta/2)$ に関する折り返しを表わす。実際、この対称かつ直交行列の固有値は ± 1 であり、それぞれの固有ベクトルが

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

である。

[*126] 実は、二点間の距離を保つ変換は一次式変換であることが、分極等式を使えばわかる。各自試みよ。

[*127] その是非は別にして、一次変換世代における加法定理の典型的な証明方法であった。

あるいは、次のように座標幾何的に処理してもよい。(x, y) をこの直線に関して折り返したあとの点の座標を (x', y') で表せば、この２つの点の中点が直線上にあり、また、点の移動に伴うベクトル $(x'-x, y'-y)$ が、直線と直交することから、

$$\frac{y+y'}{2} = \frac{x+x'}{2}\tan(\theta/2), \quad (x-x')\cos(\theta/2) + (y-y')\sin(\theta/2) = 0.$$

これを x', y' について解けば、

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = x\sin\theta - y\cos\theta$$

となるので、T に一致する。

問 16.5. 直線 $y = x\tan(\theta/2)$ に関する折り返しの行列を T_θ と書くとき、２つの折り返しの合成 $T_\varphi T_\psi$ がどのような変換を表わすか。

２次がわかったので、３次の直交行列 T について調べよう。T の固有多項式 $f(t) = \det(tI - T)$ は t の最高次の係数が 1 の３次関数であるので、$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \pm\infty$ である。したがって、中間値の定理により、$f(t) = 0$ となる実数が存在し、固有方程式の自明でない解を $v \in \mathbb{R}^3$ とすれば $Tv = tv$ である。一方、T は、ベクトルの大きさを変えないので、$|t| = 1$ でなければならない。そこで、$\boldsymbol{k} = v/|v|$ を含む正規直交基底 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をとってきて、それに関する T の行列表示を改めて T とおけば、

$$T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

であることがわかる。ここで、T が直交行列であることから、２次の正方行列 S も直交行列である。そこで４つの場合に分ける。

(i) $t = 1$, S が回転の行列。この場合の T は、座標軸 $\boldsymbol{k}$ の周りの回転を表わす。
(ii) $t = 1$, S が折り返し変換の場合。折り返し直線の方向を $\boldsymbol{j}$ に一致させると、T は、ベクトル $\boldsymbol{i}$ に垂直な平面に関する折り返しを表わす。
(iii) $t = -1$, S が回転の場合。座表軸 $\boldsymbol{k}$ のまわりに回転を施した後に、$\boldsymbol{k}$ に垂直な平面に関する折り返しを続けて行う変換（映転）。
(iv) $t = -1$, S が折り返しの場合。折り返しの直線のまわりの角度 π の回転を表わす。

まとめると、３次の直交行列は、$\det(T) = \pm 1$ に応じて、ある直線のまわりの回転か映転を表わす。

問 16.6. 問 14.5 から $T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \det(T) \end{pmatrix}$ という表示を導くことで、場合分けなしで結論を導け。

ユークリッド変換

次に、これらと平行移動を組み合わせた一般のユークリッド変換について調べよう。そのためには、デカルト表示よりも位置ベクトル表示がわかりやすい。直交変換 T とベクトル $\boldsymbol{t}$ による平行移動を組み合わせた、ユークリッド変換

$$\Phi : o + \boldsymbol{r} \mapsto o + T\boldsymbol{r} + \boldsymbol{t}$$

において、基準点を o から o' に変更してみよう。$o + \boldsymbol{r} = o' + \boldsymbol{r}'$

$$o' + \boldsymbol{r}' \mapsto o + T\boldsymbol{r} + \boldsymbol{t} = o' + T\boldsymbol{r}' + (T - I)(o' - o) + \boldsymbol{t}$$

であるから、直交変換部分は変わらず、平行移動部分が $\boldsymbol{t}$ から

$$\boldsymbol{t'} = (T - I)(o' - o) + \boldsymbol{t}$$

に変化する。

(i) T が 2 次元回転の場合：$\det(R - I) = (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta > 0$ であるから、o' を $\boldsymbol{t'} = 0$ であるように選ぶことができる。すなわち、Φ は、ある点のまわりの回転を表わす。

(ii) T が 2 次元折り返しの場合：$(I - T)/2$ は、折り返し軸に垂直な方向への射影を表わすので、その成分のみ $\boldsymbol{t}$ から取り除くことができる一方で、折り返し軸方向の成分は不変である。ということで、ある直線に関する折り返しとその直線方向の平行移動の合成となる。これを映進 (glide reflection) という。

(iii) T が 3 次元回転の場合： $T - I$ の像は、回転軸と直交するベクトル全体となるので、平行移動部分が回転軸方向になるように o' を選ぶことができる (Chasles[*128] の定理)。このような変換を回進 (screw displacement[*129]) とよぶ。

(iv) T が映転の場合： $-\Phi$ が回進となるので、Φ は、回進と回進軸に垂直な平面に関する折り返しを組み合わせたもの (反回進) となる。

問 16.7. ユークリッド変換のうち、恒等変換を連続的に変化させることで実現できるのは $\det T = 1$ の場合である。

Remark 21. 映転を表わす際に使う回転と折り返しの操作は交換可能である一方で、反回進を組み合わせる際の回進 (R, t) と折り返し S は、$(R, t)S = S(R, -t)$ となって、交換しない。

Remark 22. 映転とか回進とかの用語は、ここで適当にこしらえたものなので、人前で使わないのが無難。映転の代わりに転進でもよかったのであるが、戦中の軍隊用語（転進、その心は退却）とかぶるのでやめにした。

そもそも、3 次元ユークリッド変換の分類自体が、その簡明さにもかかわらず世間の教科書から漏れているようで、不思議なことである。察するに、一次変換はやっても一次式変換に触れることは稀で、ましてやアフィン座標変換やそれに連なるユークリッド変換は、ということなのだろう。ユークリッド空間は数を並べたものだと思っている輩が多すぎるような。

[*128] Michel Chasles (1793–1880) はフランスの数学者。Chasles は shall のように発音する。s は無音。
[*129] screw drive と呼んであげたいような。

付録A　集合と写像

集合の考えは高校でも学ぶのだが、それと切り離せない関係にある写像の概念が抜け落ちていることもあり、不十分なものとなっている。この集合と写像は、数学のみならず、様々な関係を記述理解する上でとても重宝する、大学教育の中の柱の一つに据えてしかるべきものではあるが、現状、数学科の学生でもない限り組織的に学ぶようにはなっていない。国際化とか global とかいう前に、こういった universal とでも呼ぶべき部分の整備が何よりも大切の米百俵かな。具体的な内容は昔の講義ノート「集合入門」[*130]を見てもらうことにして、ここでは、用語にまつわるちょっとしたお遊びで息抜きを[*131]。

数学に限らないが、日本での専門用語が難しすぎる。一番の原因は、漢字の組み合わせによる新語を乱造したところにあって、ここでのお遊びのルールは、集合と写像に関する用語を可能な限り和語に置き換えて、その感触を楽しむというものである。

まずは集合である。これは、Menge (ドイツ語、量、かさ、群れ)、ensemble (フランス語、一緒に)、set (英語、ひとまとまり) のどれかからの翻訳であろう。あるいは、離合集散という漢語との関連も考えられるか。さて、これを何と言い換えるか。ここは素直に、「あつまり」としておく。そして、写像。こちらは map (英語), application (フランス語), Abbildung (ドイツ語) からの意味を混ぜあわせたような造語であるか。これは写しとか移しの漢字を当て分けせずに「うつし」でよかろう。以下、常用語との対応表を掲げておく。

集合	set	あつまり	写像	map	うつし
要素・元	element	つぶ	恒等写像	identity map	ままうつし
部分集合	subset	したあつまり	合成	composition	かさね
?	supset	うえあつまり	像	image	うつしさき
空集合	empty set	からあつまり	逆像	inverse image	うつしもと
全体集合	universal set	おおあつまり	逆写像	inverse map	さかうつし
補集合	complement	のこり	単射	injection	もどりうつし
差集合	difference set	のぞき	全射	surjection	おほひうつし
合併集合	union	あわせ	全単射	bijection	もどりおほひ
共通部分	intersection	むすび	定義域	domain	おこり
積集合	product set	くみあつまり	値域	range	おわり

さあ、始めよう。集まりとは、ここでは数学的に区別がつくものの集まりをいう。一つの集まり A に対して、そのなかに含まれるものを A の粒とよぶ。

二つの集まり A, B で A の粒がすべて B の粒であるとき、A を B の下集まり、B を A の上集まりと呼んで、$A \subset B$ あるいは $B \supset A$ のように表わす。また、

$$A \cup B = \{c; c \in A \text{ または } c \in B\}, \quad A \cap B = \{c; c \in A \text{ かつ } c \in B\},$$

をそれぞれ、A と B の合わせ、結びとよぶ。さらに、A から B を除いた集まりを

$$A \setminus B = \{a \in A; a \notin B\}$$

[*130] https://researchmap.jp/read0168181/-Cheap-Learning/

[*131] 世の中には本当に冗談の通じない人がいるもので、願わくは、そういう方々とは関り合いにならずに死にたいもの。

とかいて、A の B 除きと称える。

二つの集まり A, B に対して、A の粒 a と B の粒 b の組を (a,b) と書いて、このような組すべての集まりを組集まりとよび、$A \times B$ という記号で表わす。組は二つに限らず何個でも考えられて、例えば三個の集まり A,B,C の組集まりを $A \times B \times C$ のように書く。とくに、組をとる集まりがすべて A の場合は、$A \times \cdots \times A = A^n$ とも書く。

二つの集まり A, B を考える。A の粒 a に B の粒 b を対応させる規則があるとき、その規則のことを A から B への「うつし」と言って、$f : A \to B$, $a \mapsto b = f(a)$ のように書く。また、A を「うつし f の起こり」、B を「うつし f の終わり」という言い方もする。集まり A から集まり B へのうつし全体がまた集まりとなる。これを B^A という記号で表わす。

A から A へのうつしで、$f(a) = a$ であるものを「ままうつし」といい、I_A という記号で表わす。また、$f : A \to B$, $g : B \to C$ という二つのうつしに対して、$a \mapsto g(f(a))$ で定められる A から C へのうつしを f と g の重ねと呼び、$g \circ f$ という記号で表わす。重ねを表わす $\circ$ はしばしば省略され、gf のようにも書かれる。重ねうつしについては 二つ重ねの則（のり）が成り立つ。

異なる粒を異なる粒にうつすようなうつしを「戻りうつし」という。うつし先の粒をもとの粒に戻すことができることにちなむ。終わりに含まれるすべての粒がうつし先として表れるようなうつしを「覆ひうつし」と呼ぶ。戻りうつしで覆ひうつしでもあるものを「戻り覆ひ」とよぶ。もどり覆ひ $f : A \to B$ があれば、B の粒 b に A の粒 a を $b = f(a)$ となるように対応させることができるので、B から A へのうつしが定まる。これを「逆うつし」といい、f^{-1} という印（しるし）で表わす。逆うつしと元のうつしを重ねたものは、ままうつしとなる。

うつし $f : A \to B$ と下集まり $A' \subset A$, $B' \subset B$ に対して、

$$f[A'] = \{f(a'); a' \in A'\}, \quad f^{-1}[B'] = \{a \in A; f(a) \in B'\}$$

をそれぞれ、A' のうつし先、B' のうつし元という。

そろそろあきれ顔が見えるようで、これくらいにしておこう。まあ、遊びは遊びとしても、漢字由来の言葉はできれば控えたいもの。これは、決して国粋のためなんかではなく、散々に傷ついた日本語への罪滅ぼしの気持ちから[*132]。

付録B　補間多項式

ここでは Vandermonde 行列式との関連で、補間多項式についての代数的初歩を紹介する。異なる n 個の数 $a_1, \ldots, a_n$ と同じものが繰り返されてもよい n 個の数 $b_1, \ldots, b_n$ に対して、$n-1$ 次以下の多項式 $P(x)$ で $P(a_i) = b_i$ $(1 \leq i \leq n)$ となるもの（補間多項式という）が丁度一つ存在する。

これは、$P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$ とするとき、条件 $(P(a_i) = b_i)_{1 \leq i \leq n}$ が

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

[*132] 詳しくは、高島 俊男「漢字と日本人」(文春新書) を見よ。実にこれは目からウロコの快著なり。

と表わされるので、

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i) \neq 0$$

より、連立一次方程式の解として $(c_i)_{0\leq i\leq n-1}$ が丁度一つ存在することによる。

その具体的な形は、方程式

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ b_1 & 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

によって特徴づけられる。実際、１行についての展開式から、$P(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式であり、

$$0 = \begin{vmatrix} P(a_i) & 1 & a_i & \dots & a_i^{n-1} \\ b_1 & 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(a_i)-b_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Delta(a)(P(a_i)-b_i)$$

より $P(a_i) = b_i$ となるからである。さらに、$(b_j) = (\delta_{i,j})$ に対する $P(x)$ を $P_i(x)$ と書けば、１列についての展開式から

$$0 = \begin{vmatrix} P_i(x) & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ b_1 & 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = P_i(x)\Delta(a) - \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

となるので、

$$P_i(x) = \frac{\Delta(a_1,\dots,x,\dots,a_n)}{\Delta(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)} = \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}.$$

この形から、$P_i(x)$ が $n-1$ 次の多項式であり、$P_i(a_j) = \delta_{i,j}$ を満たすことが読み取れる。$(P_i)_{1\leq i\leq n}$ は多項式空間の中で一次独立であり、Waring-Lagrange 基底と呼ばれる。一般の補間多項式は、この基底を用いて

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i P_i(x)$$

と表わされる。

また、n 次多項式 $D(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)$ とその微分 $D'(x)$ を使うと、Waring-Lagrange 基底は

$$P_i(x) = \frac{D(x)}{D'(a_i)(x-a_i)}$$

と表わされる。

さて、x の多項式 $f(x)$ に対して $b_i = f(a_i)$ に対する補間多項式を $P_f(x)$ と書けば、対応 $f \mapsto P_f(x)$ は線型であり、$P_f(x)$ は $f(x)$ を $D(x)$ で割った余りに一致する。余りのところを言い換えると、$f(x) - P_f(x)$ は $D(x)$ で割り切れる。

特に、$f(x)$ が $n-1$ 次以下であれば、$P_f(x) = f(x)$ であり、$f(x) = x^n$ については、$P_f(x) = x^n - D(x)$ となる。

付録C　交代行列式

行列式には、特殊な形であるがゆえに役に立つものが様々知られているが、交代行列にまつわるものについて、紹介しよう。まず用語であるが、正方行列 A で ${}^tA=-A$ となるものを**交代行列**[*133](alternating matrix) と呼ぶ。その成分は $a_{j,i}=-a_{i,j}$ をみたすことから、対角成分 $a_{i,i}$ は 0 になり[*134]、対角成分の右上と左下は、対角線に関して折り返すことで、符号が反対になる。ということで、勝手に選べる成分の数は、行列のサイズが m であるとき、$1+2+\cdots+(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}$ だけある。

その行列式＝交代行列式であるが、$\det(A)=\det({}^tA)=\det(-A)=(-1)^m\det(A)$ をみたすことから、m が奇数であれば、スカラーが $1+1\neq 0$ をみたす限り[*135] $\det(A)=0$ となる。ということで、交代行列式はサイズが偶数 $m=2n$ の場合が問題である。

例 C.1. $n=2$ のときは、$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}=a^2$ であり、恒等的に消えることはない。$n=2$ のときは、$a\neq 0$ という状況の下、１・２行を強引に掃き出せば、

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ -b & -d & 0 & \frac{af-be+cd}{a} \\ -c & -e & -\frac{af-be+cd}{a} & \frac{c(f-e)}{a} \end{vmatrix} = (af-be+cd)^2$$

であるが、全体が a,b,c,d,e,f の多項式であるから、$a=0$ の場合も含めて結論部分は正しい。

この手順を帰納的に用いれば、交代行列式が n 次同次式の 2 乗で表わされることがわかる。この交代行列式の平方根とでもよぶべき多項式が、Pfaff と Jacobi を経由して Cayley により明らかにされたパフィアンの正体である。

以下、Cayley に沿う形でパフィアンを記述してみよう。まずは添え字記法の導入から。以下で考える添字は $\{1,2,\ldots,2n\}$ であるとし、その全部または一部を偶数個抜き出したもの[*136]$i_1,i_2,\ldots,i_{2l}$ と $1,2,\ldots,2l$ の並べかえ σ に対して、

$$\mathrm{sgn}(\sigma)a_{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)}}\cdots a_{i_{\sigma(2l-1)},i_{\sigma(2l)}}$$

という組合せを考えると、$\{i_1,\ldots,i_{2l}\}$ における対合せ (pairing) $\{\{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)}\},\ldots,\{i_{\sigma(2l-1)},i_{\sigma(2l)}\}\}$ が同じであれば、同一の式を与える。

実際、$i_{\sigma(1)}$ と $i_{\sigma(2)}$ の入れかえで、$(\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(2l))$ は $(\sigma(2),\sigma(1),\ldots,\sigma(2l))$ に変化し、$a_{i,j}$ の積は 因子 $a_{i_{\sigma(2)},i_{\sigma(1)}}=-a_{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)}}$ の変化に伴いマイナスがつく一方、それは入れかえに伴う $\mathrm{sgn}(\sigma)$ の変化と打ち消し合い、全体として変化しない。このような対内の入れかえに伴う並べかえは 2^l だけある。

また、対単位での並べかえでも 積の符号変化は並べかえの符号変化と連動し、全体としては同一の式のままである。こちらの並べかえは $l!$ だけある。まとめると、同一の対合せを与える σ は同じ式を与え、その総数は $2^l l!$ である。

[*133] ほかに 歪対称 (skew-symmetric) とか 反対称 (anti-symmetric) ともいう。
[*134] $1+1=0$ のときは、$a_{i,i}=0$ も仮定しておく。
[*135] 実は $1+1=0$ であっても正しいことは、サイズの帰納法でわかる。なお、偶数と奇数の二元からなるスカラーはこれをみたす。
[*136] ふつう順列とよばれるものであるが、順番に並べるとは限らない。言うとしたら抜き出しであるか。

かくして、対合せの総数は $\frac{(2l)!}{2^l l!} = (2l-1)!!$ だけあり、各対合せを実現する並べかえの代表を選び出した集まりを R とすると、

$$\sum_{\sigma\in R} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_{\sigma(2l-1)},i_{\sigma(2l)}}$$

は代表団 R の取り方によらず $a_{i,j}$ $(1 \leq i < j \leq 2n)$ の l 次多項式を定める。Cayley にならって これを $[i_1, \dots, i_{2l}]$ で表わすと、

$$\sum_{\sigma\in S_{2l}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_{\sigma(2l-1)},i_{\sigma(2l)}} = 2^l l! [i_1, i_2, \dots, i_{2l}]$$

となる。ここで、S_{2l} は $\{1, 2, \dots, 2l\}$ のすべての並べかえを表わす。

定め方から、$[i, j] = a_{i,j}$ であり、$(1, 2, \dots, 2l)$ の並べかえ τ に対して、$\tau R = \{\tau\sigma; \sigma \in R\}$ も代表団になる[*137]ことから、

$$[i_{\tau(1)}, i_{\tau(2)}, \dots, i_{\tau(2l)}] = \mathrm{sgn}(\tau)[i_1, i_2, \dots, i_{2l}]$$

がわかる。

定義 C.2. 偶数サイズ $2n$ の交代行列 A に対して、$[1, 2, \dots, 2n]$ を A のパフィアン (pfaffian) とよび、$\mathrm{Pf}(A)$ と書く[*138]。上で述べた結果の一部として、

$$2^n n!\,\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1),\sigma(2n)}$$

であることに注意。

問 C.1. A の対角小行列 A' で偶数サイズのものに対しては、A' の添字を小さい順に $i_1 < i_2 < \cdots < i_{2l}$ と並べるとき、$[i_1, i_2, \dots, i_{2l}] = \mathrm{Pf}(A')$ である。

対合せを代表する並べかえ σ であるが、対の中の数字を $\sigma(1) < \sigma(2), \dots, \sigma(2l-1), \sigma(2l)$ のように小大の順に取ると、あとは対をどう並べるかで決まり、よく使われるのは左寄せ $\sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2l-1)$ と右寄せ $\sigma(2) < \sigma(4) < \cdots < \sigma(2l)$ である。この二つの代表団を L、R と書く。$\sigma(1), \dots, \sigma(2l)$ の中で一番小さい（大きい）のは何かと考えると、$\sigma(1) = 1$ $(\sigma \in L)$ と $\sigma(2l) = 2l$ $(\sigma \in R)$ がわかる。

つぎに、A から $2n$ 行と $2n$ 列を除いた小交代行列を A' とし、$1 \leq j < 2n$ に対して、A' からさらに j 行と j 列を除いて得られる小交代行列を $A'_{[j]}$ で表わす[*139]。また $l = n$ に対する右寄せ代表団を R に属する並べかえ σ を $j = \sigma(2n-1) \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ の値で場合分けすると、σ は $\{1, \dots, [j], \dots, 2n-1\}$ の並べかえ σ' を使って、$\sigma = (\sigma', j, 2n\}$ と表わされる。ここで、σ と σ' の符号の違いは、$\mathrm{sgn}(\sigma')$ を σ' の逆並べかえにより読み替えることで、$(1, \dots, [j], \dots, j, 2n)$ の符号だけの違いであるあることがわかる。すなわち、

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(1, \dots, [j], \dots, j, 2n)\,\mathrm{sgn}(\sigma') = (-1)^{2n-j-1}\mathrm{sgn}(\sigma') = (-1)^{j-1}\mathrm{sgn}(\sigma').$$

一方、$(i_1, \dots, i_{2n-2}) = (1, \dots, [j], \dots, 2n-1)$ という抜き出し $(l = n-1)$ を使うと、σ' と $\{1, \dots, 2n-2\}$ の右寄せ並べかえ σ'' とは、$(\sigma'(1), \dots, [\sigma'(j)], \dots, \sigma'(2n-1)) = (i_{\sigma''(1)}, \dots, i_{\sigma''(2n-2)})$ という関係で一対

[*137] 対合せ $\{\{1, 2\}, \dots, \{2l-1, 2l\}\}$ を与える並べかえ全体 G は $\mathbb{Z}_2^l \rtimes S_l$ と同型な S_{2l} の部分群であり、代表団の性質 $S_{2l} = \sqcup_{\sigma\in R}\sigma G$ から $S_{2l} = \sqcup_{\sigma\in R}\tau\sigma G$ が導かれるからである。この辺のことは、群論の基本事項である群作用と部分群と等質空間の関係を使うとわかりやすい。

[*138] 行列の区切り記号に角括弧 [ ] を使わない流儀であれば、行列式の縦棒との類似で $\mathrm{Pf}(A) = [A]$ と書くことができるのだが。

[*139] Cayley のブラケット記号と紛らわしいのであるが、$[j]$ は j を除くという意味で使う。

一に対応し 符号も一致する（これは、$(\sigma'(1),\ldots,[\sigma'(j)],\ldots,\sigma'(2n-1))$ に現れる数字で j より大きいものを 1 だけ減じたもので置き換えると σ'' になるという単純な仕組みによる)。

したがって、j ごとに

$$\sum_{\sigma'}\mathrm{sgn}(\sigma')a_{\sigma(1),\sigma(2)}\ldots a_{\sigma(2n-3),\sigma(2n-2)}=[i_1,\ldots,i_{2n-2}]=\mathrm{Pf}(A'_{[j]})$$

であり、

$$\mathrm{Pf}(A)=\sum_{j=1}^{2n-1}(-1)^{j-1}a_{i,2n}\mathrm{Pf}(A'_{[j]})$$

あるいは

$$[1,2,\ldots,2n]=\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i-1}[i,2n]\,[1,\ldots,[i],\ldots,2n-1]$$

というパフィアンの展開式を得る。

問 C.2. 左寄せの代表団を使い、$[1,2,\ldots,2n]=\displaystyle\sum_{i=2}^{2n}(-1)^i[1,i]\,[2,\ldots,[i],\ldots,2n]$ を導け。

Remark 23. この展開式をくり返せば、右寄せあるいは左寄せの代表団による積和の定義に戻る。なお、端でない行または列についての展開式も可能であるが、そのときは「とび」の効果を補正する符号のずらしが必要になる。

さて、

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{2n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1,2n}\\ \vdots\\ a_{2n-1,2n}\end{pmatrix}$$

と置いて、上の展開式を

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}A' & x\\ -{}^tx & 0\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i-1}x_i\mathrm{Pf}(A'_{[i]})$$

のように書き改めると x の一次式を得る。以下これを $\theta_{A'}(x)$ とも書く。

さらに、$2n-1$ 次列ベクトル x, y とスカラー a に対して

$$\langle x,y\rangle_{A'}=\begin{vmatrix}A' & x\\ -{}^ty & a\end{vmatrix}$$

と置くと、$\det(A')=0$ であるから $2n$ 列についての展開式から、右辺は a によらないことがわかる。そこで、$a=0$ と置くと、$\langle x,y\rangle_{A'}$ は、x, y それぞれについて線型（双線型という）であり、A' も交代行列であることから、

$$\langle y,x\rangle_{A'}=\begin{vmatrix}A' & y\\ -{}^tx & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}{}^tA' & -x\\ {}^ty & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-A' & -x\\ {}^ty & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A' & x\\ -{}^ty & 0\end{vmatrix}=\langle x,y\rangle_{A'}$$

となる。このようなものを対称形式 (symmetric form) という。

定理 C.3 (Cayley 1849)**.**

$$\langle x,y\rangle_{A'}=\theta_{A'}(x)\theta_{A'}(y)$$

が成り立つ。とくに $x=y=\begin{pmatrix}a_{1,2n}\\ \vdots\\ a_{2n-1,2n}\end{pmatrix}$ と取れば、交代行列 A に対して、$\det A=\mathrm{Pf}(A)^2$ である。

Proof. $n \geq 1$ についての帰納法で確かめる。$n=1$ のときは、$\det\begin{pmatrix} 0 & x \\ -y & 0 \end{pmatrix} = xy$ および $\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} = x$ であるから成り立つ。そこで $n-1$ で成り立つとして、n でも成り立つことを示そう。

行列式 $\begin{vmatrix} A' & x \\ -{}^t y & 0 \end{vmatrix}$ を $2n$ 列で展開し、展開に現れる小行列式を $2n-1$ 行でさらに展開すれば、

$$\langle x, y\rangle_{A'} = \sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^i x_i \begin{vmatrix} A'_{[i]} \\ \\ -{}^t y \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i x_i \sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^j y_j |A'_{i,j}|.$$

ここで、$A'_{i,j}$ は A' から i 行 j 列を除いたサイズ $2n-2$ の小行列を表わす。

帰納法の仮定より $A'_{i,i}| = |A'_{[i]}| = \mathrm{Pf}(A'_{[i]})^2$ である。対角でない $A'_{i,j}$ は、j 行と i 列を底と右端に移して、帰納法が使える形にする。$i<j$ であれば、

$$|A'_{i,j}| = (-1)^{i+j+1} \begin{vmatrix} & & & & & & & a_{1,i} \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & [a_{i,i}] \\ & & & A'_{[i,j]} & & & & \vdots \\ & & & & & & & [a_{j,i}] \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & a_{2n-1,i} \\ a_{j,1} & \ldots & [a_{j,i}] & \ldots & [a_{j,j}] & \ldots & a_{j,2n-1} & a_{j,i} \end{vmatrix}.$$

ここで、$A'_{[i,j]}$ は、A' から i, j 行と i, j 列を除いた小交代行列を表わす。この最後の行列式は $\langle x', y'\rangle_{A'_{[i,j]}}$ の形であることから、帰納法の仮定により小パフィアン 2 つの積 $\theta_{A'_{[i,j]}}(x')\theta_{A'_{[i,j]}}(y')$ に分解される。この小パフィアンであるが、Cayley の記号を使えば、

$$\begin{aligned} \theta_{A'_{[i,j]}}(x') &= [1, \ldots, [i], \ldots, [j], \ldots, 2n-1, i] = (-1)^i [1, \ldots, [j], \ldots, 2n-1] = (-1)^i \mathrm{Pf}(A'_{[j]}) \\ \theta_{A'_{[i,j]}}(y') &= [1, \ldots, [i], \ldots, [j], \ldots, 2n-1, j] = (-1)^i [1, \ldots, [j], \ldots, 2n-1] = (-1)^{j+1} \mathrm{Pf}(A'_{[j]}) \end{aligned}$$

となるので、結局 $|A'_{i,j}| = \mathrm{Pf}(A'_{[i]})\mathrm{Pf}(A'_{[j]})$ となり、これは $i>j$ でも同様に成り立つ。

あとは これを使い、

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_{A'} &= \sum_{1\leq i,j\leq 2n-1} (-1)^{i+j} x_i y_j \mathrm{Pf}(A'_{[i]})\mathrm{Pf}(A'_{[j]}) \\ &= \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i-1} x_i \mathrm{Pf}(A'_{[i]}) \sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} y_j \mathrm{Pf}(A'_{[j]}) = \theta_{A'}(x)\theta_{A'}(y) \end{aligned}$$

と計算することで、帰納法が完了する。 □

パフィアンについては 行列式と同様 様々な等式が知られているのであるが、ケイリーの基本等式からすぐに分かることを最後に導いておこう。

命題 C.4. 偶数次交代行列 A と同じサイズの正方行列 B に対して、$\mathrm{Pf}({}^t BAB) = \det(B)\mathrm{Pf}(A)$ である。

Proof. 左辺を F 右辺を G とおくと、どちらも A, B の多項式として $F^2 = G^2$ を満たすので、$F=G$ または $F=-G$ が多項式として成り立つ（多項式の次数を考えると、$F-G\neq 0$ と $F+G\neq 0$ から

$(F-G)(F+g) \neq 0$ が従う)。一方、$B = I_{2n}$ と $A = (J, \dots, J)$ を代入すれば、$F = 1$, $G = 1$ となるので、$F = -G$ ではない。よって $F = G$ である。 □

問 C.3. n 次正方行列 C に対して、

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & C \\ -{}^tC & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}\det(C).$$

付録D　固有値の存在

複素数のことを少し復習しておこう。複素数 $z = x + iy$ に極座標表示 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を代入した $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を z の極形式 (polar form) というのであった。複素数をその絶対値 $r = |z|$ と単位ベクトルに相当する偏角部分 $\cos\theta + i\sin\theta$ の積に分解した形になっている。この偏角部分をオイラーに従って $e^{i\theta}$ と表記すると、三角関数の加法公式が指数法則 $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ に集約されるなど都合がよい。指数法則を一般の複素数にまで広げて、$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$ と定める。

次は「代数学の基本定理」と呼ばれることが多いが、固有値の存在定理でもある。

定理 D.1. 複素係数の多項式 $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ は、複素数 $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ を使って $f(z) = (z-\zeta_1)\cdots(z-\zeta_n)$ と因数分解される。

Proof. (i) 定数ではない多項式 $f(z)$ に対して、$f(\zeta) = 0$ となる複素数 ζ の存在を示す。$|f(z)|$ が z の連続関数であり $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ となることから、$|f(z)|$ の最小値を与える ζ が存在する。$f(z)$ を $z - \zeta$ のべきを使って、

$$f(z) = f_0 + f_l(z-\zeta)^l + f_{l+1}(z-\zeta)^{l+1} + \cdots + f_n(z-\zeta)^n, \quad f_l \neq 0$$

と表わす。もし $f_0 \neq 0$ であれば、$|z-\zeta|$ を小さく取り、$z - \zeta$ の偏角を調整することで、$|f(z)| < |f_0|$ とできて、$|f_0| = |f(\zeta)|$ が最小値であることに逆らうので、$f(\zeta) = 0$ である。

(i) より $f(z)$ は $z - \zeta$ で割り切れるので、その商に (i) を適用して、という操作をくり返す。 □

付録E　行列の多項式

文字[*140] x の複素数を係数とする多項式全体を $\mathbb{C}[x]$ という記号で表わすと、$\mathbb{C}[x]$ は和と積で閉じた $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である。当然のことではあるが、x の多項式の積は交換法則を満たす。一方 n というサイズを指定した複素正方行列全体 $M_{n,n}(\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ と略記すれば、$M_n(\mathbb{C})$ は、行列の和と積で閉じた $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で、積については交換法則は成り立たないものの結合法則を満たす。これを $\mathbb{C}$ 上の行列代数 (matrix algebra) という。

さて、n 次複素正方行列 A を用意する。x の多項式 $f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_k x^k$ に対して、n 次正方行列

$$f_0 I_n + f_1 A + \cdots + f_k A^k$$

を $f(A)$ と書くことにすれば、対応 $\mathbb{C}[x] \ni f \mapsto f(A) \in M_n(\mathbb{C})$ が和と積を保つ。これは A のべきについて指数法則が成り立つことからわかる。

[*140] もったいをつけて、不定元 (indeterminate) ともいう。

行列代数 $M_n(\mathbb{C})$ は n^2 次元であるから、$I_n, A, A^2, \ldots$ は一次独立にはなり得ず、したがって、$f(A) = 0$ となる $0 \neq f(x) \in \mathbb{C}[x]$ が存在する。そのような多項式の中で最低の次数 $m \geq 1$ をもつ多項式を $g(x)$ とし、$f(x) \in \mathbb{C}[x]$ を $g(x)$ で割って得られる等式 $f(x) = q(x)g(x) + p(x)$ $(\deg p < m)$ に A を代入すると、$f(A) = p(A)$ となるので、$f(A) = 0$ ならば $p(A) = 0$ がわかる。したがって、$p(x) \neq 0$ であれば、m が最低次数であることに反するので、$p(x) = 0$ でなければならない。すなわち、$f(A) = 0$ となる多項式 $f(x)$ はすべて $g(x)$ で割り切れる。とくに $g(x)$ の選び方は定数倍の違いしかなく、x^m の係数が 1 であるものを A の最小多項式 (minimal polynomial) という。

定理 E.1 (Hamilton-Cayley-Frobenius[*141])**.** 正方行列 A の固有多項式 $p(x) = |xI_n - A|$ に対して $p(A) = 0$ が $M_n(\mathbb{C})$ における行列等式として成り立つ。

Proof. 行列 $xI_n - {}^tA$ から i 行と j 列を除いた行列を B_{ij} を使って、x の多項式を $C_{ij}(x) = (-1)^{i+j}|B_{ij}|$ で定めると、行列 $C = (C_{ij}(x))$ が $xI_n - {}^tA$ の adjugate matrix であることから、問 8.3 により

$$C(xI_n - {}^tA) = |xI_n - {}^tA|I_n = |xI_n - A|I_n = p(x)I_n$$

が成り立ち、これから $\mathbb{C}[x]$ における等式

$$\sum_j C_{ij}(x)(x\delta_{jk} - a_{kj}) = p(x)\delta_{ik} \quad (1 \leq i, k \leq n)$$

が得られる。ここで、x に A を代入すると、$M_n(\mathbb{C})$ における等式

$$\sum_j C_{ij}(A)(\delta_{jk}A - a_{kj}I_n) = p(A)\delta_{ik}$$

となり、

$$p(A)\overrightarrow{e_i} = \sum_k p(A)\delta_{i,k}\overrightarrow{e_k} = \sum_j C_{ij}(A)\left(A\overrightarrow{e_j} - \sum_k a_{kj}\overrightarrow{e_k}\right)$$

が成り立つので $A\overrightarrow{e_j} = \sum_k a_{kj}\overrightarrow{e_k}$ に注意すれば、$p(A)\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$ $(1 \leq i \leq n)$ すなわち $p(A) = 0$（右辺は零行列）が示された。 □

Remark 24. かつて一次変換が高校で教えられていた時代に、入試問題として 2 次正方行列の場合がさかんに出題され、それに慣れ親しんだ世代が今も必要以上に重んじているように思われる。手っ取り早く出題したほうもほうならば、それを嬉々として解いたほうもほうであるか。他山の石とすべく。

付録F　不変部分空間と直和分解

対角化可能でない一次変換ないしは正方行列においても使える、対角化に準ずる表示方法を説明しよう。その際に基本となるのが不変部分空間による直和分解 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ である。

直和分解に合わせた基底に関して A を行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$$

[*141] Hamilton (1853) が四元数の枠で $n = 2$ 相当に言及し、Cayley (1858) が $n = 3$ の場合を示した。その後 1878 に至り、一般の場合が Frobenius により示された。

のように対角型分割表示が得られ、A の情報がブロックごとの情報 A_i に還元させせられるのがみそである。

そこで、行列 A の対角化がかなわぬまでも、各ブロック成分 A_i ができるだけ単純なものになるような直和分解を試みよう。A の固有値 λ に対して、**拡大固有空間** (generalized eigenspace) V^λ を、

$$V^\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n; \exists m \geq 1, (\lambda I_n - A)^m v = 0\}$$

で定める。V^λ は、通常の固有空間 V_λ を含む部分空間であり、A と $(\lambda I_n - A)^m$ の積が交換可能であることから、不変部分空間となっている。

定義の中の $(\lambda I_n - A)^m v = 0$ となる $m \geq 1$ は、v ごとに違っていても良いのであるが、

$$\ker(\lambda - A) \subset \ker(\lambda - A)^2 \subset \cdots \subset \ker(\lambda - A)^m \subset \cdots$$

という部分空間の増大列を考えると、これら部分空間の次元が n 以下であることから、$\ker(\lambda - A)^m = \ker(\lambda - A)^{m+1}$ となる最初の $m \geq 1$ が存在する。そして、これ以降は、

$$(\lambda - A)^{m+2} v = 0 \implies (\lambda - A)v \in \ker(\lambda - A)^{m+1} = \ker(\lambda - A)^m \implies (\lambda - A)^{m+1} v = 0$$

となるので、すべて一致する。とくに、$V^\lambda = \ker(\lambda - A)^m$ である。この m を V^λ の長さとよぶ。

補題 F.1.

$$\mathbb{C}^n = \ker(\lambda - A)^m \oplus (\lambda - A)^m \mathbb{C}^n.$$

Proof. まず $\ker(\lambda - A)^m \cap (\lambda - A)^m \mathbb{C}^n = \{0\}$ である。実際 $v \in \ker(\lambda - A)^m \cap (\lambda - A)^m \mathbb{C}^n$ を $v = (\lambda - A)^m w$ と表せば、$0 = (\lambda - A)^{2m} w$ より、$w \in \ker(\lambda - A)^{2m} = \ker(\lambda - A)^m$ となるので、$v = (\lambda - A)^m w = 0$ が従う。あとは、次元の関係式 $\dim \ker T + \dim T\mathbb{C}^n = n$ に注意すればよい。 □

さて、この直和分解による A のブロック表示成分をそれぞれ、A_λ, B_λ としよう。このとき、λ は B_λ の固有値ではない。というのは、もし、λ が B_λ の固有値であれば、$0 \neq w \in (\lambda - A)^m \mathbb{C}^n$ で、$Aw = \lambda w$ となるものが存在し、$w \in \ker(\lambda - A) \cap (\lambda - A)^m \mathbb{C}^n$ となってしまう。

そこで、A を B_λ で置換えたものに今の議論を適用すると、固有値ごとに拡大固有空間を分離することができて、次の前半部分を得る。後半部分は、A を V^{λ_i} に制限したものの固有値は λ_i のみであること、制限したものの表現行列が上三角行列 A_i になるように基底をとってきて、$(\lambda_i - A_i)^{n_i} = 0$ に注意すればわかる。

定理 F.2. A の固有値を $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq r}$ とすれば、

$$\mathbb{C}^n = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_r}.$$

さらに、A の固有多項式を $\det(tI_n - A) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r}$ のように因数分解すれば、$n_i = \dim V^{\lambda_i}$ $(i = 1, \cdots, r)$ であり、$V^{\lambda_i} = \ker(\lambda_i - A)^{m_i}$, $m_i \leq n_i$ が成り立つ。ここで、m_i は V^{λ_i} の長さである。

系 F.3. A の最小多項式は $(t - \lambda_1)^{m_1} \ldots (t - \lambda_r)^{m_r}$ で与えられる。このことからも *Hamilton-Cayley-Frobenius* がわかる。

各対角型ブロックを改めて A と書けば、A はただ一つの固有値 λ をもち、$N = \lambda - A$ は、$N^m = 0$ をみたす。このような変換／行列を**べき零** (nilpotent) と呼ぶ。したがって、この場合の A は、固有値の情報の他は、べき零行列 N の様子が問題となる。これについては、次の Camille Jordan の結果がある。

次の形の $m \times m$ 行列を長さ m のジョルダンべき零行列と呼ぼう。$N(m)^{m-1} \neq 0$, $N(m)^m = 0$ に注意。

$$N(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \huge{0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \huge{0} & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 F.4 (Jordan form)**.** すべてのべき零変換 N は、ジョルダンべき零行列による対角型ブロック表示をもつ。また、ブロック表示に現れる長さ m のジョルダンべき零行列の個数は N だけで決まる。

証明の最大のヒントは、このような表示が可能であるということ。べき零変換 N に付随した階層構造

$$\ker N \subset \ker N^2 \subset \cdots \subset \ker N^{m-1} \subset \ker N^m = V$$

で、N は各階層を一つ下の階層に移すことに注意する。

補題 F.5. ベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ と行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が、ある $r \geq 1$ に対して、$T^r v = 0$, $T^{r-1} v \neq 0$ をみたすとする。このとき、$\{v, Tv, \cdots, T^{r-1}v\}$ は一次独立である。

Proof.

$$\lambda_0 v + \lambda_1 Tv + \cdots + \lambda_{r-1} T^{r-1} v = 0$$

に、$T^{r-1}, T^{r-2}, \cdots, T$ を順次作用させると、$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \cdots, \lambda_{r-2} = 0$ が次々得られ、最後に $\lambda_{r-1} T^{r-1} v = 0$ から、$\lambda_{r-1} = 0$ もわかる。 □

言葉を用意しておこう。ベクトル空間 V の部分空間 W に対して、V のベクトルの集まり $\{v_1, \cdots, v_l\}$ が W と独立であるとは、

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l \in W \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$$

となること。いいかえると、$\mathbb{C}v_1 + \cdots + \mathbb{C}v_l + W$ が直和となること。このとき、$\{v_1, \cdots, v_l\}$ は通常の意味で独立であることに注意。さらに、$V = \mathbb{C}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_l \oplus W$ であるとき、(v_i) を V/W 基底と呼ぶことにする。ここで、V/W 基底 $v_1, \cdots, v_l$ に W の基底を併せたものが V の基底であることに注意。

ベクトル $\{v_1, \cdots, v_l\}$ が $\ker N^k$ と独立であれば、$\{Nv_1, \cdots, Nv_l\}$ は $\ker N^{k-1}$ と独立である。実際、$\sum_i \lambda_i N v_i \in \ker N^{k-1}$ とすると、$N^k(\sum_i \lambda_i v_i) = 0$ である。

次は何度か出てきた論法のくり返しでわかる。

補題 F.6. W と独立なベクトルの集まり $v_1, \cdots, v_k$ にベクトルを補って V/W 基底にすることができる。

さて、定理の証明のためには、一次独立なベクトルの集まり $\{v_1, \cdots, v_r\}$ で、

$$N^k v_i, k \geq 0, 1 \leq i \leq r$$

から零ベクトルを除いたものが基底となるものの存在を示せばよい。

階層の上の方から帰納的に $\{v_1, \cdots, v_r\}$ を選んでいこう。まず、$V/\ker N^{m-1}$ 基底 $v_1, \cdots, v_i$ を用意する。次に、$\{Nv_1, \cdots, Nv_i\} \subset \ker N^{m-1}$ が $\ker N^{m-2}$ と独立であることに注意して、これにベクトル $\{v_{i+1}, \cdots, v_j\} \subset \ker N^{m-1}$ を追加して、$Nv_1, \cdots, Nv_i, v_{i+1}, \cdots, v_j$ が $\ker N^{m-1}/\ker N^{m-2}$ 基底であるよ

うにする。次に、$\{N^2v_1, \cdots, N^2v_i, Nv_{i+1}, \cdots, Nv_j\} \subset \ker N^{m-2}$ が $\ker N^{m-3}$ と独立であることに注意して、これにベクトル $\{v_{j+1}, \cdots, v_k\} \subset \ker N^{m-2}$ を追加して、$N^2v_1, \cdots, N^2v_i, Nv_{i+1}, \cdots, Nv_j, v_{j+1}, \cdots, v_k$ が $\ker N^{m-2}/\ker N^{m-3}$ 独立であるようにする。以下、これをくり返すことで、求める $\{v_1, \cdots, v_r\}$ が得られる。

不変部分空間による直和分解は、対角化可能な場合を調べる上でも役に立つ。そのような実例として並べかえ (permutation) のサイクル分解 (cycle decomposition) を取り上げよう。

ここでは 数字 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の並べかえを操作と思って、$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ を $\{1, 2, \ldots, n\}$ から $\{1, 2, \ldots, n\}$ への写像と同一視する。そうすると、σ の逆写像 σ^{-1} は、並べかえを元に戻す操作として、再び並べかえを表わす。

例 F.7. 巡換え $\sigma = (2, 3, \ldots, n, 1)$ の逆並べかえは $\sigma^{-1} = (n, 1, 2, \ldots, n-1)$ となる。

並べ換え σ, τ を写像と思うと、その合成 $\sigma\tau$ も並べ換えで、その逆は $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$ をみたす。また、並べ換え σ を k 回繰り返した並べ換えを σ^k で表わせば、指数法則 $\sigma^k\sigma^l = \sigma^{k+l}$, $(\sigma^k)^l = \sigma^{kl}$ が成り立つ。これは 並べかえを何回繰り返したかの回数を比べているだけなので、自然数の積和の意味を言い換えているに過ぎない。

こうして定めた並べかえの積は、写像の合成であることから 交換法則をみたさないことに注意。以上の並べかえの演算規則を抽象化したものは**群** (group) と呼ばれ、対称性の数学的記述において威力を発揮する。

例 14.12 (ii) でも触れたように 並べかえ σ の直交行列表示を

$$T_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \iff T_\sigma e_i = e_{\sigma(i)} \ (1 \leq i \leq n)$$

で定める。すなわち、数字 $1, 2, \ldots, n$ の並べかえを 基底の並べかえに読み替え、それを線型に広げた一次変換を与える行列が T_σ に他ならない。この意味から、

$$T_\sigma T_\tau e_i = T_\sigma e_{\tau(i)} = e_{\sigma(\tau(i))} = e_{(\sigma\tau)(i)} = T_{\sigma\tau} e_i$$

となるので、$T_\sigma T_\tau = T_{\sigma\tau}$ がわかる。すなわち、並べかえの積と表示行列の積が相和すようになっている。

さて、一つの並べ換えをくり返すと、数字の集まり $\{1, 2, \ldots, n\}$ は 巡回する部分に分割される。これは例を見るとわかりやすい。

例 F.8. $1, 2, \ldots, 9$ の並べかえ $\sigma = (5, 1, 8, 9, 2, 4, 6, 3, 7)$ について、$\sigma^k(1)$ を $k = 1, 2, \ldots$ について調べると、$1, 5, 2, 1, 5, 2, \ldots$ のように $1, 5, 2$ を巡回していることがわかる。この部分を抜き出した $1, 2, 5$ の巡換え（$1, 2, 5$ 以外は変えない）を $[1, 5, 2]$ と書くことにする[*142]。次にこれ以外の数字に目を向けると $\sigma^k(3)$ と $\sigma^k(4)$ は 巡換え $[3, 8]$、$[4, 9, 7, 6]$ をそれぞれ与え、それで σ の並べかえは尽くされる。このことを、

$$(5, 1, 8, 9, 2, 4, 6, 3, 7) = [1, 5, 2][3, 8][4, 9, 7, 6]$$

のように書いて、並べかえのサイクル分解と呼ぶ。

一般に、巡換え部分 $C = [i_1, i_2, \ldots, i_r]$ $(r \geq 1)$ に対して、$[C] = \{i_1, \ldots, i_r\}$ と書く。ここでは、$r = 1$ の場合も特定の数字を指定した巡り換えとみなす。並べかえ σ のサイクル分解 $\sigma = C_1 \ldots C_l$ について $\{1, \ldots, n\} = [C_1] \sqcup \cdots \sqcup [C_l]$ となっていることから、$C_1, \ldots, C_l$ は並べかえとして互いに積交換する。それ

[*142] 巡り換え $[1, 5, 2]$ を $(1, 5, 2)$ と書く習慣があるので、要注意

それの巡換え C_i について、$\mathbb{C}^n$ の部分空間 W_i を

$$W_i = \sum_{j\in[C_i]} \mathbb{C}e_j$$

で定めると、$\mathbb{C}^n$ は W_i に直和分解される。作り方から W_i は T_σ の不変部分空間となり、T_σ を W_i に制限した一次変換の直和に T_σ が分解される。

かくして、T_σ を調べることは σ が 1 個の巡換えである

$$\sigma = [1, \sigma(1), \dots, \sigma^{n-1}(1)] = [\sigma(1), \sigma^2(2), \dots, \sigma^n(1) = 1]$$

の場合に帰着する。このとき、一次変換 T_σ の基底 $e_{\sigma(1)}, e_{\sigma^2(1)}, \dots, e_{\sigma^n(1)}$ についての表示行列は、

$$T_\sigma(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma^n(1)}) = (e_{\sigma^2(1)}, \dots, e_{\sigma^n(1)}, e_{\sigma(1)}) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma^n(1)}) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

より、巡換え行列 C となるので、T_σ の固有値は、C の固有値として、1 の n 乗根全体で、固有値 λ の固有ベクトルは、C の固有ベクトルである ${}^t(\lambda^n, \lambda^{n-1}, \dots, \lambda)$ を用いて、

$$(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma^2(1)}, \dots, e_{\sigma^n(1)}) \begin{pmatrix} \lambda^n \\ \lambda^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \sum_{i+j=n+1} \lambda^j e_{\sigma^i(1)} = \sum_i \lambda^{n+1-i} e_{\sigma^i(1)}$$

と表わされる。ここで、和は周期にわたって取ればよい。

付録G　長さからの内積

ベクトルに対する長さの情報だけから角度の性質を使わずに内積を引き出すことができる (Jordan-von Neumann の定理[*143])。ここで必要な長さの性質は次の通り。

(i) (正値性) $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$.
(ii) (三角不等式) $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$.
(iii) (中線定理[*144]) $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 + \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 = 2\|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\boldsymbol{w}\|^2$.

この状況の下で、$2(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = \|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{w}\|^2$ とおけば、$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})$ がいわゆる内積の性質をみたすことが以下のようにしてわかる。

まず、中線定理で $v = w = 0$ とおけば、$\|\boldsymbol{0}\| = 0$ が分かる。次に $v = 0$ とおけば $\|-w\| = \|w\|$ が、$v = w$ とおけば $\|2v\| = 2\|v\|$ が従う。まとめると $\|\pm 2v\| = 2\|v\|$ (倍率等式) が成り立つ。一方、$\|-v\| = \|v\|$ と (i), (ii) より、$\big|\|\boldsymbol{v}\| - \|\boldsymbol{w}\|\big| \leq \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$ が出るので、とくに $\big|\|s\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| - \|t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|\big| \leq |s-t|\,\|\boldsymbol{v}\|$ がわかり、$\|t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|$ は t の連続関数である。内積の性質を導く上で必要なのは、この連続性と (i) と (iii) である。

[*143] Pascual Jordan and John von Neumann, On inner products in linear, metric spaces, Ann. Math., 36(1935), 719–723.
[*144] 日本ではこうよばれるが、英語では parallelogram law (平行四辺形則) である。

さて、内積の性質のうち、$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}) \geq 0$ は倍率等式と (i) からわかり、$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v})$ は今の定義から明らかなので、分配法則の性質を次に確かめる。これは、倍率等式と中線定理を二度使って得られる等式

$$\begin{aligned}
2(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{w}/2) + 2(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}/2) &= \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}/2\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{w}/2\|^2 + \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}/2\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{w}/2\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 \\
&= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})
\end{aligned}$$

で、$\boldsymbol{u} = 0$ とすれば分かる $2(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}/2) = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})$ を上の等式に戻すことで得られる。

最後に $(t\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = t(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})$ を示す。これは、両辺が t について連続であることから、t が有理数の場合に帰着させられる。一般に、有理数 t の上で値 $f(t)$ が定義された関数 f が加法性 $f(s+t) = f(s) + f(t)$ を満たせば、$f(t) = tf(1)$ が成り立つ。実際、この等式を満たす有理数全体を Q とおけば、自然数 $n \geq 1$ に対して、$f(n) = f(1+\cdots+1) = f(1)+\cdots+f(1) = nf(1)$ より $n \in Q$ である。さらに、$f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ から、$0 \in Q$. $t \in Q$ ならば、$0 = f(0) = f(t) + f(-t)$ より $-t \in Q$. $t \in Q$ で n を自然数とすれば、$f(t) = f(t/n + \cdots + t/n) = f(t/n) + \cdots + f(t/n) = nf(t/n)$ より、$t/n \in Q$. 以上のことから Q は有理数全体であることがわかる。

Remark 25. 条件 (i), (iii) だけでは連続性が成り立たない。実際、$\mathbb{Q}$ 上の基底 (Hamel basis) $\{e_i\}_{i \in I}$ をとってきて、

$$\|v\|^2 = \sum_{i \in I} |v_i|^2, \quad v = \sum_{i \in I} v_i e_i$$

とおけば、正値性および中線定理はなりたつものの、$\|v\|^2 \in \mathbb{Q}$ であることから t^2 が無理数のとき、$\|tv\| = |t|\,\|v\|$ とならない。

付録H　エルミート行列の対角化

本文では、エルミート行列のユニタリー行列による対角化を正規行列の場合に一般化して述べた。これは、ユニタリー行列の対角化も同時に示すことができるため、多くの教科書で取り上げられる方法ではあるが、最も使用頻度の高いエルミート行列／実対称行列に限定するとやや遠回りでもある。ここでは、内積の不等式を使った直接的な方法について説明しよう。

内積空間の節のあとに続けて読めるように、復習を少々。まず、内積の性質のうち、$(v|v) \Longrightarrow v = 0$ 以外を満たすものを**半内積** (semi-inner product) と呼ぶことにすれば、Remark 15 でも注意したように、内積の不等式は半内積に対して成り立つ。つぎに、複素数を成分とする正方行列 $A = (a_{jk})$ で $\overline{a_{jk}} = a_{kj}$ なるものをエルミート行列というのであった。エルミート行列はまた標準内積を使って、$(v|Aw) = (Av|w)$ $(v, w \in \mathbb{C}^n)$ という性質で特徴づけられる。このことから、エルミート行列 A に対しては、$(v|Av)$ は実数であることもわかる。

以下では、内積空間 $\mathbb{C}^n$ の部分空間 W に対して、その単位ベクトル全体を W_1 と書くことにする。とくに $(\mathbb{C}^n)_1$ は、$\mathbb{C}^n$ における単位ベクトル全体を表わす。

示すべきは、$n \times n$ エルミート行列 A に対して、実数列 $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq n}$ と $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ で、$Ae_j = \alpha_j e_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ となるものが存在すること。

Proof. $(\mathbb{C}^n)_1$ の上で定義された実数値関数 $(\mathbb{C}^n)_1 \ni v \mapsto (v|Av)$ の最小値[*145]を α_1 とし、単位ベクトル e_1 を $\alpha_1 = (e_1|Ae_1)$ であるように選んでおく。このとき、$\langle v|v'\rangle = (v|Av') - \alpha_1(v|v')$ とおけば、$\langle\ |\ \rangle$ は半内積となり、不等式 $|\langle v|v'\rangle|^2 \leq \langle v|v\rangle \langle v'|v'\rangle$ が成り立つ。そこで、$\langle e_1|e_1\rangle = 0$ に注意すれば、

$$\langle v|e_1\rangle = 0\ \forall v \in \mathbb{C}^n \iff (v|Ae_1) = \alpha_1(v|e_1)\ \forall v \in \mathbb{C}^n \iff Ae_1 = \alpha_1 e_1.$$

すなわち、e_1 は固有値 α_1 の固有ベクトルである。

これを出発点に、A の固有ベクトル e_j からなる正規直交系 $e_1, \cdots, e_r$ で、e_j の固有値を α_j とするとき、

$$\alpha_j = \min\bigl\{(v|Av); v \in \{e_1, \cdots, e_{j-1}\}^\perp, (v|v) = 1\bigr\} \quad \text{for } j = 2, \cdots, r$$

が成り立つものを r について帰納的に構成していこう。$1 \leq r < n$ まで構成できたと仮定する。部分空間 $W = \{e_1, \cdots, e_r\}^\perp$ に対して、W_1 上の実数値関数 $W_1 \ni w \mapsto (w|Aw)$ の最小値を α_{r+1} とし、その値を実現する単位ベクトル $e_{r+1} \in W$ をひとつ取ってくる。(射影定理 13.7 により、$\dim W = n - r \geq 1$ である。)

このとき、$\langle w|w'\rangle = (w|Aw') - \alpha_{r+1}(w|w')$ は W の上の半内積となるので、内積の不等式から $(w|(Ae_{r+1} - \alpha_{r+1}e_{r+1})) = 0$ $(w \in W = \{e_1, \cdots, e_r\}^\perp)$ が成り立つ。これと

$$(e_j|(Ae_{r+1} - \alpha_{r+1}e_{r+1})) = (Ae_j|e_{r+1}) - \alpha_{r+1}(e_j|e_{r+1}) = (\alpha_j - \alpha_{r+1})(e_j|e_{r+1}) = 0 \quad (1 \leq j \leq r)$$

をあわせ、再び射影定理を使うと $Ae_{r+1} = \alpha_{r+1}e_{r+1}$ がわかり、帰納的構成が前に進む。 □

A が実対称行列の場合には、以上の議論をすべて実数の範囲で行うことができる。すなわち、A の固有ベクトルから成る $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底が存在する。

Remark 26. 証明を振り返って見ればわかるように、掃き出し法や行列式といった行列代数の道具は一切必要ない。エルミート行列ないし実対称行列に限定すれば、もっとも短手順でユニタリー行列あるいは直交行列による対角化を与えるものとなっている。

集合 X の上で定義された実数値関数 $f(x)$ に対して、その最大値が存在する時、最大値の値を

$$\max\{f(x); x \in X\} = \max_{x \in X} f(x)$$

のように書く。同様に、最小値が存在するとき、その最小値を min という記号で表わす。

定理 H.1 (mini-max principle)**.** エルミート行列 A の固有値を小さい順に $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$ と並べておく。このとき、

$$\alpha_k = \min_{\dim W = k} \max\{(w|Aw); w \in W, (w|w) = 1\}.$$

Proof. 正規直交基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ を $Ae_j = \alpha_j e_j$ であるように取っておく。$W \cap \langle e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n\rangle = \{0\}$ であれば、$\dim(W + \langle e_k, \cdots, e_n\rangle) = k + (n - k + 1) = n + 1$ となって、$\dim \mathbb{C}^n = n$ に反するので、$W \cap \langle e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n\rangle \neq \{0\}$. そこで、単位ベクトル $u = \lambda_k e_k + \cdots + \lambda_n e_n \in W$ が存在し、

$$\max\{(w|Aw); w \in W, (w|w) = 1\} \geq (u|Au) = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j |\lambda_j|^2 \geq \alpha_k \sum |\lambda_j|^2 = \alpha_k$$

がわかる。

一方、$W = \langle e_1, \cdots, e_k\rangle$ とすれば、単位ベクトル $e_k \in W$ において、$(e_k|Ae_k) = \alpha_k$ が実現されるので、逆向きの不等式も成り立つ。 □

[*145] 最小値が存在することは、Bolzano の絞り出し論法による。

付録I　二次形式の符号

実変数 $x_1, \dots, x_n$ の二次同次式

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

を $x_1, \dots, x_n$ の**実二次形式** (real quadratic form) というのであった。二次形式 $Q(x)$ は、対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を使って、

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表示されるので、これを $Q_A(x)$ と書くことにする。逆をもつ行列 $T = (t_{ij})$ を使って、変数 $x_1, \dots, x_n$ に

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

という変数変換を施せば、$Q_A(x) = Q_B(y)$, $B = {}^tTAT$ となる。

定理 I.1 (Lagrange-Sylvester)**.** 任意の実対称行列 A に対して、逆をもつ行列 T で、${}^tTAT$ が対角行列になるものが存在する。

また、このようにして得られた対角行列の対角成分に現れる、正数の個数、負数の個数、零の個数は、それぞれ、A の正固有値の個数、負固有値の個数、零固有値の個数に一致する。但し、固有値の個数は重複度も込めて数える。

Proof. 行列 A のサイズに関する帰納法による。対称行列 A の対角成分に零でないものが現れる、例えば、$a_{11} \neq 0$、とすると、

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{11}x_1^2 + 2x_1(b_2x_2 + \dots + b_nx_n) + R(x_2, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n)^2 + R(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2x_2 + \dots + b_nx_n)^2 \end{aligned}$$

となって、変数変換

$$y_1 = a_{11}x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n, \quad y_j = x_j \ (2 \le j \le n)$$

を施せば、

$$Q(x) = \frac{y_1^2}{a_{11}} + R(y_2, \dots, y_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2y_2 + \dots + b_ny_n)^2$$

となって、帰納法が機能する。

全ての対角成分が消えていてなおかつ $A \neq 0$ であるときには、$a_{ij} \neq 0$ となる $i \neq j$ が存在する、例えば $a_{12} \neq 0$ とすると、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なる変数変換を施すことにより

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となるので、対角成分に零でないものが含まれる場合に帰着する。

次に、「符号数」が変化しないことを見るために、逆をもつ行列 T, T' に対して、

$${}^tTDT = A = {}^tT'D'T', \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, D' = \begin{pmatrix} d'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d'_n \end{pmatrix},$$

$d_1 > 0, \dots, d_l > 0$, $d_{l+1} < 0, \dots, d_{l+m} < 0$, $d_{l+m+1} = \dots = d_n = 0$ などであったとする。ここで、$l < l'$ と仮定して矛盾を導こう。連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ & \vdots & \\ t_{l1} & \dots & t_{ln} \\ t'_{l'+1,1} & \dots & t'_{l'+1,n} \\ & \vdots & \\ t'_{n1} & \dots & t'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

を考える。$l + (n - l') < n$ であるから、自明でない解 x が存在する。$y = Tx$, $y' = T'x$ とおく。

一方、作り方から $Q(x) = {}^t yDy \leq 0$ かつ $Q(x) = {}^t y'D'y' \geq 0$ で、

$$y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_{l'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$Q(x) = d'_1(y'_1)^2 + \dots + d'_{l'}(y'_{l'})^2 = 0$$

となって、$y'_1 = \dots = y'_{l'} = 0$ となる。すなわち、$T'x = y' = 0$ となって、これは $x \neq 0$ に反する。

以上により $l = l'$ であることがわかる。同様にして $m = m'$ も導かれる。 □

付録J　双対と商とテンソルと[146]

J.1　商空間と双対空間

商空間と双対空間を扱っている本は多くない。詳しく書かれている順に例を挙げると、斎藤毅、池田岳、高橋礼司といったところか。もっとも、この段階で詳しく述べたとて限界もあるので、基本のみを簡潔に記し、実際の運用はそれぞれの方面の書にまかすのがよかろう。商空間は 線型写像の準同型定理とからめて説明するのが数学者好みのようで、それが双対空間にも反映するとするのが現代数学的でもある。

ここでは、少しだけ幾何よりの視点を紹介しよう。それは「直線と平面の幾何学」でもふれた変位ベクトルの考えでもある。そのときは 2 次元・3 次元の範囲での説明という体裁ではあったが、実は何次元でも使える仕組みではある。そのことを再掲すると、ベクトル空間 V の元を変位ベクトルとしてもつ集合 S とは、点 $p \in S$ をベクトル $\overrightarrow{v} \in V$ で移動した点 $p + \overrightarrow{v} \in S$ が定まり、次の規則を満たすときをいうのであった。このような S を V に基づく**アフィン空間** (affine space) とよぶ。

(i) 移動の平行四辺形則：$(p + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = p + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ $(p \in S,\ \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V)$.

(ii) 2 点 $p, q \in S$ に対して、$q = p + \overrightarrow{v}$ となる $\overrightarrow{v} \in V$ が丁度一つある。これを $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{pq}$ のように書く。

このとき、$q + \overrightarrow{0} = p + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0}) = p + \overrightarrow{v} = q$ となるので、あらゆる点 $q \in S$ について $\overrightarrow{qq} = \overrightarrow{0}$ である。また、$q + (-\overrightarrow{v}) = p + (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}) = p + \overrightarrow{0} = p$ であるから、$\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{pq}$ でもある。

以上の規則そのものには、ベクトルの和と差（それと零ベクトル）だけが関与し、スカラー倍の存在は表面に現れない[147]ことに注意。

例 J.1. ベクトル空間 V の部分空間 W と $v \in V$ に対して、$S = \{v + w; w \in W\}$ ($v + W$ と書く) は、V における和の操作に関して、W に基づくアフィン空間である。これは v を含み（通り）W に平行な平らな図形という意味合いになっている。

問 J.1. $v + W = v' + W \iff v - v' \in W$ である。

この部分空間 W に基づくアフィン空間の集団 $v + W$ $(v \in V)$ には 和とスカラー倍の操作を定めることができる。これは、$u{+}W$ と $v{+}W$ の和を $u{+}v{+}W$ により、$v{+}W$ の λ 倍を $\lambda v{+}W$ により定めるというもので、この定義がうまくいっていることは、$u + W = u' + W \iff u - u' \in W$, $v + W = v' + W \iff v - v' \in W$ のとき、$(u + v) + W = (u' + v') + W \iff (u + v) - (u' + v') = (u - u') + (v - v') \in W$ および $\lambda v + W = \lambda v' + W \iff \lambda v - \lambda v' = \lambda(v - v') \in W$ が成り立つことによる。

こうして得られたベクトル空間を V の W による**商ベクトル空間** (quotient vector space)（略して商空間）といい、V/W と書く。これに関連して、ベクトル $v \in V$ に $v + W \in V/W$ を対応させることで線型写像 $q : V \to V/W$ を得る。これを**商写像** (quotient map) という。商空間 V/W における零ベクトルは $0 + W = W$ 自身であり、$W = \ker q$ となることに注意。

補題 J.2. W の基底 $f_1, \ldots, f_l$ に V のベクトル $e_1, \ldots, e_k$ を補い、V の基底 $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$ を作るとき（補題 付録 *9.3*、定理 付録 *11.4*）、$e_1 + W, \ldots, e_k + W$ は V/W の基底である。

[146] 最後の「と」はタイポではない。
[147] 内分点・外分点の記述には必要。

Proof. ベクトル $v \in V$ を、$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k + \mu_1 f_1 + \ldots \mu_l f_l$ と表わすと、

$$v + W = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + W = \lambda_1(e_1 + W) + \cdots + (\lambda_k(e_k + W)$$

であるから、$v + W$ は $e_1 + W, \ldots, e_k + W$ の一次結合で表される。

一方 $e_1 + W, \ldots, e_k + W$ の一次結合である $\lambda_1(e_1 + W) + \cdots + \lambda_k(e_k + W) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + W$ が零ベクトル W に一致すれば、$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k \in W$ となるので、

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k = \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_l f_l$$

と表される。$e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$ は V の基底であるから、これから $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \mu_1 = \cdots = \mu_l = 0$ が従う。とくに、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ で、これは $e_1 + W, \ldots, e_k + W$ が一次独立であることを意味する。 □

系 J.3. 有限次元ベクトル空間 V の商ベクトル空間 V/W の次元は $\dim V - \dim W$ である。

例 J.4. 開区間 (a, b) の上で定義された関数 $f(x)$ の原始関数とは、$F'(t) = f(t)$ $(a < t < b)$ となる関数のことであった、このような関数全体は、定数関数を加える操作で、アフィン空間を形成する。そこで、(a, b) で微分可能な関数全体を V とし、その中の定数関数の作る部分空間を W とするとき、商ベクトル $F + W$ を表わすものとして、不定積分の記号

$$\int f(t)\, dt = F(t) + C$$

が使われるのであるが、ここに現れるいわゆる積分定数 C は、F を含む商ベクトルを象徴的に表わすためのもので、書くとしたら、$F(t) + \mathbb{R}$（実数値関数）か $F(t) + \mathbb{C}$（複素数値関数） とすべきものではある。

例 J.5. ベクトル空間 V に半内積 $(v|v')$ が与えられていれば、$W = \{v \in V; (v|v) = 0\}$ は内積の不等式により、V の部分空間となる。そうすると、商ベクトル空間 V/W の上には、内積が $(u + W|v + W) = (u|v)$ で味よく定められる。

次に双対空間であるが、ベクトル空間 V からスカラーへの線型写像を V 上の**線型汎関数** (linear functional) あるいは**線型形式** (linear form) と呼び、V 上の線型汎関数全体を V^* と書いて、V の**双対空間**[*148] (dual space) という。双対空間は、関数としての和と定数倍でベクトル空間になる。

集合 S 上の関数の作るベクトル空間が V であれば、$a \in S$ に対して、関数 $f \in V$ に a での値 $f(a)$ を対応させる V 上の関数は線型であることから、V の線型汎関数を定める。これを δ_a という記号で表わし、a での値汎関数 (evaluation functional) とよぶ。とくに、S がユークリッド空間の開集合 U で、V が U 上の無限回微分可能関数全体 $C^\infty(U)$ のとき、δ_a は**デルタ関数**[*149] (delta function) と呼ばれる。

さらに、$C^\infty(U)$ 上の線型汎関数 ξ で、$\xi(fg) = (\xi f)\delta_a(g) + \delta_a(f)\xi(g)$ $(f, g \in C^\infty(U))$ となるものを $x \in U$ における**微分汎関数** (differential functional) とよぶ。a における方向微分がこの性質をみたし、実際、a における微分汎関数は、方向微分に限られるので、接ベクトルの定義に用いられる。

関数空間を広げて、U のコンパクト部分集合で支えられた連続関数全体を $C_c(U)$ で表わすとき、$C_c(U)$ 上の線型汎関数 $I(f)$ $(f \in C_c(U))$ で、$I(f) \geq 0$ $(f \geq 0)$ という意味で正であるものは **積分汎関数** (integral functional) とよばれ、ラドン測度の記述に役立つ。

[*148] 双対の読み方であるが、相対（そうたい）と区別できるように「そうつい」というのがよいだろう。
[*149] 関数というよりは密度というべきであるが。

一般に、有限次元ベクトル空間 V の基底 $(e_1,\dots,e_n)$ を一つ用意すれば、V は線型写像

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

により（数を並べた）縦ベクトル空間と同一視され、一方 V 上の線型汎関数 ξ は、

$$\xi \mapsto (\xi(e_1),\dots,\xi(e_n))$$

なる対応で（数を並べた）横ベクトル $(\xi(e_1),\dots,\xi(e_n))$ と同一視することにより、多重ベクトル記号の下、

$$\xi(x_1e_1+\cdots+x_ne_n) = \xi(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\xi(e_1),\dots,\xi(e_n))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

のように、線型汎関数として値を取り出す操作が横ベクトルと縦ベクトルの積に還元される。

ということで、$(\xi(e_1),\dots,\xi(e_n))$ は線型汎関数 ξ の成分表示というべきものになっている。このことは数の縦横表記を使わずに見ることも可能で、$e_j^\vee$ という線型汎関数を V の基底 $(e_1,\dots,e_n)$ に依存する形で、$e_j^\vee(e_i)=\delta_{i,j}$ により定めると、$e_j^\vee \in V^*$ は一次独立である。また

$$\sum_{j=1}^n e_j e_j^\vee(e_i) = e_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

であることから、$e_j : \mathbb{K} \to V$ と思うことで $\sum_j e_j e_j^\vee$ は V の恒等変換 1_V を与え[*150]、$\xi \in V^*$ が

$$\xi = \xi\sum_{j=1}^n e_j e_j^\vee = \sum_{j=1}^n \xi(e_j)e_j^\vee$$

のように $e_j^\vee$ の一次結合で書かれるので、$(e_j^\vee)_{1\leq j\leq n}$ は V^* の基底であることがわかる。これを $(e_1,\dots,e_n)$ の**双対基底**[*151](dual basis) という。

以前述べたベクトル空間 V の多重化 V^n は、V のベクトルを横に n 個並べたもので、それは線型写像 $\mathbb{K}^n \to V$ とみなされるのであった。双対空間 V^* の多重化についても、同じく線型汎関数を横に並べた $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ を線型写像 $\mathbb{K}^n \to V^*$ と見たものと転置写像 ${}^t\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ との合成を ξ^t で表わす。そうして

$$\xi^t : (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mapsto (\xi_1,\dots,\xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n$$

の結果を

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

[*150] 内積空間における正射影のディラック表記と似ていることに注意。
[*151] 双対基底を表わす記号としては e_j^* がよく使われるのだが、これはエルミート共役の記号と重なるので避けるのが無難。

のように表示し、右に現れる $\xi_1, \ldots, \xi_n \in V^*$ の縦並べを ${}^t\xi$ と書けば、ξ^t の効果は 行ベクトルと ${}^t\xi$ との積で表わされる。すなわち、

$$\xi^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \xi \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t\xi.$$

さらに、${}^t\xi$ と多重ベクトル $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ との積を

$${}^t\xi v = (\xi_i(v_j))_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{K}), \quad v\,{}^t\xi = \sum_{i=1}^n v_i \xi_i \in L(V)$$

で定める。そうすると、$n = \dim V$ のとき、基底 $e = (e_1, \ldots, e_n) \in V^n$ と双対基底 $e^\vee = (e_1^\vee, \ldots, e_n^\vee)$ の関係が $e\,({}^te^\vee) = 1_V \iff ({}^te^\vee)\,e = I_n$ と表されることになる。

有限次元ベクトル空間では、V と V^* とはこのように近しいのであるが、無限次元では様相が一変する。その無限次元でも、内積空間については、V と V^* の近しさがヒルベルト空間の自己双対性という形で回復する（リースの定理)。

例 J.6. 縦ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の標準基底 $e_1, \ldots, e_n$ の双対基底を 横ベクトル空間の標準基底である ${}^te_1, \ldots, {}^te_n$ と同一視することで、$\mathbb{C}^n$ の双対空間は、横ベクトル空間と同一視される。縦横の区別は V と V^* の違いであった。

例 J.7. 有限数列に 0 を補うことで無限数列の一部とみる。V を有限数列全体のベクトル空間とすると、標準基底の無限列 $e_1, e_2, \ldots$ が V の基底とよぶべきものになっていて、その上の線型汎関数 ξ と無限数列 $(\xi(e_1), \xi(e_2), \ldots)$ が対応する。すなわち、双対空間 V^* は無限数列の作るベクトル空間と同一視される。ちなみに、V も V^* も実数の濃度であるが、V は可算基底であるのに対して、V^* の基底は連続濃度をもつ[*152]。

さて、数ベクトルをその一部として含む行列空間で、転置の転置は元に戻るのであった。これの意味するところを双対空間で考えるに、もとのベクトルは 双対空間の上の線型汎関数として解釈できることに思い至る。

すなわち、$v \in V$ に対して、V^* 上の線型汎関数 δ_v を $\delta_v(\xi) = \xi(v)$ で定めると、対応 $v \mapsto \delta_v$ は、V から $(V^*)^* = V^{**}$ への線型写像になっている。V が有限次元であれば、この対応により、$\delta_{e_1}, \ldots, \delta_{e_n}$ はちょうど $e_1^\vee, \ldots, e_n^\vee$ の双対基底に一致するので、対応は V から V^{**} への同型写像であり、通常、この対応により V と V^{**} を同一視する。すなわち、双対の双対はもとに戻る。これを有限次元ベクトル空間の**双対性** (duality) という。無限次元空間でも、選択公理を使うと V^* が十分たくさんあることがわかり、$V \ni v \mapsto \delta_v \in V^{**}$ は単射になるので、この場合も V とその行き先を同一視して、$V \subset V^{**}$ とみなすのだが、V^{**} は V に比べてはるかに大きい。

次に、有限次元ベクトル空間の間の線型写像 $\phi : V \to W$ に対して、その**転置**[*153](transposed map) ${}^t\phi : W^* \to V^*$ を

$${}^t\phi(\eta) = \eta \circ \phi \quad (\eta \in W^*)$$

で定めると、これは W^* から V^* への線型写像である。有限次元であれば双対性により、${}^{tt}\phi : V^{**} \to W^{**}$ はもとの ϕ と同一視される。これが、行列において転置の転置がもとに戻ることの意味である。また、

[*152] 三角多項式全体を V と思うと、連続周期関数の作る空間の双対が 一次独立なディラック測度を連続濃度だけ含むことからわかる。

[*153] 転置写像 ${}^t\phi$ のことを双対とよび ϕ^* と書く人も多いのだが、エルミート共役と紛らわしいので、ここでは使わない。あとの説明にあるように、転置の流用は そこまで紛らわしくはない。ちなみに、transpose の訳は「ひっくり返し」がよいような。

$\psi: U \to V$ という線型写像との合成である $\phi \circ \psi: U \to W$ の転置は ${}^t(\phi \circ \psi) = {}^t\psi \circ {}^t\phi$ に一致し、行列の転置において積の順番がひっくり返る理由でもある。

ただ こうした理解のためには いくつか注意すべき点もあり、行列に対する転置が線型写像に対するそれの特殊な場合であると単純には言い難いこと。具体的には、数ベクトルに対する転置の操作は、縦ベクトルと横ベクトルの間の双対（９節参照）与えていることからもわかるように、ベクトルと双対との対応関係を記述するもので、線型写像の転置においては、そういう自己双対的内容は含まれない。縦横の転置は写像そのものではなく、基底と双対基底を指定した上での行列表示に関するものであると認識すべきである。

その点を明確にするため、一時的に、線型写像の転置を ${}^t\phi$ ではなく ${}^\tau\phi$ と書こう。そうすると、${}^\tau v: V^* \to \mathbb{K}$ $(v \in V)$ は $\lambda \mapsto \lambda v$ の転置写像として、自然な埋め込み $V \subset V^{**}$ を与えることになる。($V = \mathbb{K}^n$ のときは、${}^t v \in {}^t\mathbb{K}^n = V^*$ であり、${}^\tau v$ とは別のものであることに注意。)

このとき、V の基底 $e = (e_1, \dots, e_n)$ とその双対基底 $e^\vee$ について、${}^\tau e: V^* \to {}^t\mathbb{K}^n$ と $(e^\vee)^t: {}^t\mathbb{K}^n \to V^*$ は 互いの逆写像になっている。すなわち、${}^\tau e$ に数ベクトルの転置を重ねた合成は $(e^\vee)^{-1}$ に等しい。

行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ の定める線型写像を $[A]: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ で表わせば、${}^\tau[A]$ と $[{}^tA]$ とは次の図式で結び付けられる。

$$
\begin{tikzcd}
{}^t\mathbb{K}^m \arrow[r, "{}^\tau[A]"] \arrow[d, "t"'] & {}^t\mathbb{K}^n \arrow[d, "t"] \\
\mathbb{K}^m \arrow[r, "{[{}^tA]}"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
$$

一般の線型写像 $\phi: V \to W$ については、V の基底 $e = (e_1, \dots, e_n)$ と W の基底 $f = (f_1, \dots, f_m)$ に関する表示行列を A とするとき、

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] & W \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "e"] \arrow[r, "{[A]}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

の転置を取り、基底基底と転置写像の関係を使うと、

$$
\begin{tikzcd}
W^* \arrow[r, "{}^\tau\phi"] \arrow[d, "{}^\tau e"'] & V^* \arrow[d, "{}^\tau f"] \\
{}^t\mathbb{K}^m \arrow[r, "{}^\tau[A]"'] \arrow[d, "t"'] & {}^t\mathbb{K}^n \arrow[d, "t"] \\
\mathbb{K}^m \arrow[r, "{[{}^tA]}"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
W^* \arrow[r, "{}^\tau\phi"] & V^* \\
\mathbb{K}^m \arrow[u, "f^\vee"] \arrow[r, "{[{}^tA]}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[u, "e^\vee"']
\end{tikzcd}
$$

がわかる。すなわち、${}^\tau\phi$ の双対基底に関する表示行列は A の転置行列である。

以上のことを踏まえて、以下では ${}^\tau\phi = {}^t\phi$ という表記を用いる。もし扱っている対象の縦横が合わないと思われるときは、数ベクトルの自己双対性である転置を適宜補って調整すれば（上の図式で言えば、下の四角形に現れる ^{t} の部分）正しい関係が得られることになる。

こういったことは、きわめて形式的な内容で、くどく説明すべきでもないし、しつこくこだわるべきものでもない。あっさり淡々と済ませるのがよい。なお、形式的だからといって馬鹿にはできず、むしろ形式的であるがゆえ役にも立つ。簡単なことを徹底的にすることの威力にも通ずることではある。

Remark 27. ベクトルもまた線型写像であるが、双対を知った今や、ベクトル $v \in V$ を線型写像と思う方法には、$\lambda \mapsto \lambda v$ の他に、$\xi \mapsto \xi(v)$ というのもあり、この二つは写像の転置で互いに移り合う。

ふたたび双対性の話に戻ると、$\xi(v)$ は $v(\xi)$ と書いてもよいということなので、これを対等な形に、$\langle v, \xi \rangle$ あるいは $\langle \xi, v \rangle$ と書き、**対形式** (pairing form) と呼ぶ。V の部分空間 W に対して、その**消し去り**[*154] (annihilator) W° を

$$W^\circ = \{\xi \in V^*; \langle w, \xi \rangle = 0 \ (w \in W)\}$$

で定める。同様に V^* の部分空間 F に対して、その消し去りを

$$F^\circ = \{v \in V; \langle v, \xi \rangle \ (\xi \in F)\}$$

で定める。

命題 J.8. 部分空間の消し去りは、部分空間の含む含まれるをひっくり返し、消し去りを二度くり返すと元に戻る。その結果、消し去りにより、V の部分空間と V^* の部分空間が対応し合う。

また、部分空間 $W \subset V$ による商空間 V/W 上の線型汎関数と商写像 $V \to V/W$ との合成により、商空間の双対 $(V/W)^*$ は V^* に埋め込まれ、その像は 消し去り W° に一致する。

内積空間における双対性への注意。内積 $(v|w)$ が指定された内積空間の場合、ベクトル $v \in V$ に対して V 上の線型汎関数 v^* を $v^*(w) = (v|w)$ $(w \in V)$ で定めると、対応 $V \ni v \mapsto v^* \in V^*$ が得られ、有限次元の場合これが全単射になる。実内積空間の場合は、これが線型同型になるので、これにより V を V^* とみなすことがでる。これを自己双対性という。一方、複素内積空間の場合は、対応が共役線型であるため、そのままでは同一視できない。この場合は、V^* が V の複素共役空間 $\overline{V}$ と同一視できると思うべきで、共役双対性と呼ぶ。縦横の双対性のときは、$v^* = {}^t\overline{v}$ は転置と複素共役を合わせたものになっていて、実ベクトルに限るとそれが転置と一致する、というのが自己双対性の実情ということになる。

J.2 テンソル積

ここでのテンソル (tensor) には特別の意味は最早なく、単にベクトル（空間）としての積のことである。ベクトルにベクトルかけて新たにベクトルを作るという意味では、グラスマンの考えたことの自然な延長であるか。

双線型写像 $V \times W \to U$ と universality による特徴づけ。与えられたベクトル空間 V, W に対して、あるベクトル空間 $V \otimes W$ と双線型写像 $V \times W \ni (v, w) \mapsto v \otimes w \in V \otimes W$ があり、他の双線型写像 $\phi : V \times W \to U$ に対して、線型写像 $[\phi] : V \otimes W \to U$ で、$[\phi](v \otimes w) = \phi(v, w)$ となるものがちょうど一つ存在するとき（これを一般性[*155]という）、ここで、$\phi : V \times W \to U$ が**双線型** (bilinear) であるとは、v, w それぞれについて線型である（分配法則がなりたつ）ことをいう。ついでながら、複数のベクトル空間の組集合 $V_1 \times \cdots \times V_l$ から U への写像 $\phi(v_1, \ldots, v_l)$ $(v_i \in V_i)$ が各 v_i について線型であるとき、ϕ は**多重線型** (multilinear) と呼ばれる。この意味で双線型とは二重線型の意味であった。

ベクトル空間 $V \otimes W$ と双線型写像 $(v, w) \mapsto v \otimes w \in V \otimes W$ の組を V と W の**テンソル積** (tensor product) という。テンソル積は、あれば以下に述べる意味で一つしかない。

[*154] ここでは、0 を連想する 極集合 (polar set) の記号を流用したが、直交補空間の記号を流用して $W^\perp$ と書くことも多い。
[*155] universality の訳としては普遍性が一般的であるが、不変性との紛れを避け、実体も表わすということで。

まず、$U = V \otimes W$ と $\phi(v,w) = v \otimes w$ に対する一般性より、$V \otimes W$ の一次変換 T で $T(v \otimes w) = v \otimes w$ となるものは、$V \otimes W$ の恒等変換に限ることに注意する。

さて、別のテンソル積を $v \odot w \in V \odot W$ とする。これを ϕ と思うと、$[\phi] : V \otimes W \to V \odot W$ である。一方、$V \otimes W$ と $V \odot W$ の役割を入れ替えると $\dot{\phi} : V \odot W \to V \otimes W$ で、$\dot{\phi}(v \odot w) = v \otimes w$ $(v \in V,\, w \in W)$ となるものがある。そうすると、$\dot{\phi}[\phi](v \otimes w) = v \otimes w$ および $[\phi]\dot{\phi}(v \odot w) = v \odot w$ が成り立ち、上で注意したように、これは $\dot{\phi}[\phi]$, $[\phi]\dot{\phi}$ ともに恒等写像であることを意味するので、$[\phi]$ と $\dot{\phi}$ は同型写像で、互いの逆になっている。以上が、一つしかない、ということの意味である。

次にテンソル積の存在を示す。そのために、V の基底 $(e_i)_{i \in I}$ と W の基底 $(f_j)_{j \in J}$ を用意し、積集合 $I \times J = \{(i,j); i \in I, j \in J\}$ の上で定義された関数で支えが有限集合であるもの全体を $V \otimes W$ とし、$\epsilon_{i,j} \in V \otimes W$ を

$$\epsilon_{i,j}(i',j') = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$$

で定めると、$(\epsilon_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ は $V \otimes W$ の基底になっている。さらに、双線型写像 $(v,w) \mapsto v \otimes w \in T$ を

$$v \otimes w = \sum_{i,j} v_i w_j \epsilon_{i,j}, \quad \text{ただし } v = \sum_i v_i e_i, w = \sum_j w_j f_j,$$

で定める。$e_i \otimes f_j = \epsilon_{i,j}$ に注意。

さて、与えられた双線型写像 $\phi : V \times W \to U$ に対して、線型写像 $[\phi] : V \otimes W \to U$ を $[\phi](\epsilon_{i,j}) = \phi(e_i, f_j)$ で定めると、これは $[\phi](v \otimes w) = \phi(v,w)$ $(v \in V,\, w \in W)$ を満たし、$(\epsilon_{i,j})$ が $V \otimes W$ の基底であることから、このような $[\phi]$ は ϕ で決まり、一つしかない。すなわち、一般性をみたす。

以上で、テンソル積の存在が示されたわけであるが、これと唯一性から次がわかる。

命題 J.9. V の基底 $(e_i)_{i \in I}$ と W の基底 $(f_j)_{j \in J}$ に対して、$(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ は $V \otimes W$ の基底である。とくに、$V \otimes W$ の元は、単純テンソル積 $v \otimes w$ *(*$v \in V,\, w \in W$*)* の一次結合で表される。

問 J.2. 有限集合で支えられた集合 X 上の関数全体の作るベクトル空間 V において、各 $a \in X$ について $\epsilon_a \in V$ を $\epsilon_a(x) = \delta_{a,x}$ $(x \in X)$ で定めると、$(\epsilon_a)_{a \in X}$ は V の基底である。

同様の考えは、3 個以上のテンソル積でも有効で、ベクトル空間 $V_1, \dots, V_l$ の多重テンソル積 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_l$ の存在と唯一性が示され、結合法則 $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ が自然な同型*156の意味で成り立つ。

テンソル積にはまた、自然な同型 $V \otimes W \cong W \otimes V$ も存在するのであるが、これを同一視することは普通しない。これはベクトル空間にさらに追加の構造を付与するとき、結合法則は成り立っても交換法則が成り立たない状況が出てくるからで、具体的には量子群の表現でそのようなことがおこる。もちろん、変な構造を入れて結合法則すら成り立たないものを考えることも可能であるが、テンソル積の結合の順番を一々指定することになり、そこまで必要になることは稀である。いずれにせよ、テンソル積の結合法則は奥が深い。

テンソル積を使うと、ベクトル空間の間の様々な同型が見えてくるようになる。これも基本的に形式的なことなので、役に立ちそうな場合をいくつか挙げると、

命題 J.10. 以下、双対空間が現れるところでは、それが有限次元であることを仮定する。

(i) $L(V_1 \times \cdots \times V_l, W) \cong L(V_1 \otimes \cdots \otimes V_l, W) \cong W \otimes V_1^* \otimes \cdots \otimes V_l^*$ である。とくに、$L(V,W) \cong W \otimes V^* \cong V^* \otimes W$ であり $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_l)^* \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_l^* \cong V_l^* \otimes \cdots \otimes V_1^*$ となる。

*156 あまり知られていないが、テンソル積の結合法則は それなりに玄妙で coherence theorem なる事実に基づくものである。

(ii) $L(V_1 \otimes \cdots \otimes V_l, W_1 \otimes \cdots \otimes W_l) \cong L(V_1, W_1) \otimes \cdots \otimes L(V_l, W_l)$ であり、右辺の単純テンソル積 $\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_l \in L(V_1, W_1) \otimes \cdots \otimes L(V_l, W_l)$ に対応する左辺の線型写像は

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_l \ni v_1 \otimes \cdots \otimes v_l \mapsto \phi_1(v_1) \otimes \cdots \otimes \phi_l(v_l) \in W_1 \otimes \cdots \otimes W_l$$

で与えられる。

ということで、線型写像空間 $L(V, W)$ はテンソル積 $W \otimes V^*$ でもあり[*157]、テンソル積 $V \otimes W$ もまた線型写像空間 $L(V, W^*)$ である。

例 J.11. V が集合 X 上の関数の作るベクトル空間、W が集合 Y 上の関数の作るベクトル空間とする。また、積集合 $X \times Y$ 上の関数全体を U とし、双線型写像 $\phi : V \times W \to U$ を $(\phi(v, w))(x, y) = v(x)w(y)$ $((x, y) \in X \times Y)$ で定め、$[\phi] : V \otimes W \to U$ を伴う線型写像とする。このとき、$[\phi]$ は、$V \otimes W$ から $[\phi](V \otimes W)$ への同型写像を与える。

まず、$e_1, \ldots, e_m$ を V の一次独立な関数、$f_1, \ldots, f_n$ を W の一次独立な関数とすると、$\phi(e_i, f_j)$ は、$X \times Y$ 上の関数として一次独立である。

というのは、$\sum_{i,j} \lambda_i \phi(e_i, f_j)(x, y) = 0$ $((x, y) \in X \times Y)$ とすると、各 $x \in X$ について、$\lambda_j = \lambda_i e_i(x)$ とすると、$\sum_j \lambda_j f_j = 0$ が Y 上の関数として成り立つので、一次独立性の仮定から、すべての j について、$0 = \lambda_j = \sum_i \lambda_{i,j} e_i(x)$ であり、これが勝手な $x \in X$ で成り立つので、X 上の関数として $\sum_i \lambda_{i,j} e_i = 0$ である。再び一次独立性の仮定から $\lambda_{i,j} = 0$ がすべての i と j で成り立つことが示された。

あとは、$V \otimes W$ を構成したときのように、双線型写像 $V \times W \ni (v, w) \mapsto \phi(v, w) \in [\phi](V \otimes W)$ の一般性がわかるので、テンソル積の唯一性により、$V \otimes W$ と $[\phi](V \otimes W)$ が自然に同型であることがわかる。

この事実に基づき、関数空間のテンソル積は、積集合 $X \times Y$ 上の関数空間と同一視され、$\phi(v, w) = v \otimes w$ のように書き表わす習慣がある。

最も利用度の高い有限次元の場合のテンソル積については 双対性と多重線型汎関数を利用して 明示的に導入することもできる。これは、スカラーの集まりを $\mathbb{K}$ で表わすとき、自然な同型 $L(V_1^* \times \cdots \times V_l^*, \mathbb{K}) \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_l$ を利用するというもので、双対空間上の多重線型関数の作る空間 $L(V_1^* \times \cdots \times V_l^*, \mathbb{K})$ を行き先とする $V_1 \times \cdots \times V_l$ 上の多重線型写像 ϕ を

$$\phi(v_1, \ldots, v_l) : V_1^* \times \cdots \times V_l^* \ni (f_1, \ldots, f_l) \mapsto f_1(v_1) \cdots f_l(v_l) \in \mathbb{K}$$

で定めると、これが一般性を示し、したがって、$L(V_1^* \times \cdots \times V_l^*, \mathbb{K})$ という形で $V_1 \otimes \cdots \otimes V_l$ が実現されることになる。

これの利点はテンソル積の構成を決め打ちできるところにあるが、双対の双対が元に戻ることを多重線型の形で認識するのは普通の人には幻惑的ともいえる作業にはなるだろうか。こういったことを難なく理解する人もいるので趣味的との非難はあたらないかも知れないが、曲芸的方法ではある。

問 J.3. 上で与えた多重線型写像 $\phi : V_1 \times \cdots \times V_l \to L(V_1^* \times \cdots \times V_l^*, \mathbb{K})$ が一般性を持つことを確かめよ。

例 J.12. $V \times V^*$ の $V \otimes V^* \cong L(V)$ における像 $\{v \otimes w^*; v \in V, w^* \in V^*\}$ は、ランク 1 作用素として特徴づけられるので、$V \otimes V^*$ の中のほんの一部である。

[*157] 内積の両線型性でも触れたように、写像を左に置くのであれば、$V^* \otimes W$ ではなく、$W \otimes V^*$ が適切である。わかるかな。

付録K　グラスマン代数

一般的なベクトル空間を認識し、その上に内積と外積代数（グラスマン代数）の構造を導入したのは Grassmann である。ここでは、テンソル積の導入のときのように、一般性と基底を使った存在保証により外積代数を導入してみよう。なお、構成的な作り方とグラスマンが考えたであろうことについては、あとで少し触れることにする

ベクトル空間 V の m 重積 $V^m = V\times\cdots\times V$ の上で定義されベクトル空間 U のベクトルを値にとる多重線型写像 $\phi(v_1,\dots,v_m)\in U$ が**交代的** (alternating) であるとは、$v_1,\dots,v_m$ の 2 つを入れ替えた値がもとの値のマイナスであることと定める。すなわち、m 次の並替え $\sigma=(\sigma(i))_{1\leq i\leq m}$ に対して、次が成り立つ。

$$\phi(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(m)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\phi(v_1,\dots,v_m).$$

なお、スカラーが $1+1=0$ をみたすときは、これに加えて $v_1,\dots,v_m$ の中に同じベクトルが 2 ヶ所以上現れるならば $\phi(v_1,\dots,v_m)=0$ となることも要求する。

以下、交代的な多重線型写像を交代線型写像のように略して言うことにする。

問 K.1. 上で追加した条件から、並べかえについての交代性が導かれ、逆に $1+1\neq 0$ であれば、並べかえの交代性から追加条件が導かれる。

多重線型写像についての一般性からは 多重テンソル積 $V\otimes\cdots\otimes V$ が導かれるのであった。これと同様のことを交代線型写像に対して考える。すなわち、あるベクトル空間 $\wedge^m V$ と交代線型写像 $V^m\ni(v_1,\dots,v_m)\mapsto[v_1,\dots,v_m]\in\wedge^m V$ の組が m 次交代テンソル空間[*158]を与えるとは、交代線型写像 $\phi: V^m\to U$ に対して、$\phi(v_1,\dots,v_m)=\widetilde{\phi}([v_1,\dots,v_m])$ となる線型写像 $\widetilde{\phi}:\wedge^m V\to U$ がちょうど一つ存在すること。このような $[v_1,\dots,v_m]$ が同型を除いて一つしかないことは、テンソル積における一般性と同じ論法でわかる。

その存在についても、テンソル積の場合と似た方法で確かめることができる。簡単のために V は有限次元とし、V の基底 $(e_1,\dots,e_n)$ を一つ用意する。そうすると、多重線型性により、ϕ は

$$\phi(e_{i_1},\dots,e_{i_m})\in U$$

の取り方だけあるので、さらに交代性を要求すると、$i_1,\dots,i_m$ の中に同じ添字があれば、$\phi(e_{i_1},\dots,e_{i_m})=0$ であり、$i_1,\dots,i_m$ が $1,\dots,n$ から m 個選び出し小さい順に並べた $\alpha=(\alpha(1)<\cdots<\alpha(m))$ の並べかえ $\alpha\tau=(\alpha\tau(1),\dots,\alpha\tau(m))$ (τ は $1,\dots,m$ の並べかえ) であれば、

$$\phi(e_{\alpha\tau(1)},\dots,e_{\alpha\tau(m)}) = \mathrm{sgn}(\tau)\phi(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(m)})$$

をみたす。したがって、交代的なものは $\phi(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(m)})$ の取り方だけある。

そこで、そのような α 全体を $S(n,m)$ で表わし[*159]、$\alpha\in S(n,m)$ をレベルにもつ基底 e_α で張られたベクトル空間[*160]を $\wedge^m V$ とし、V^m から $\wedge^m V$ への多重線型写像を

$$[e_{i_1},\dots,e_{i_m}] = \begin{cases}\mathrm{sgn}(\tau)e_\alpha & ((i_1,\dots,i_m)=\alpha\tau)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

[*158] 多重テンソル積との関係で言えば、$V\otimes\cdots\otimes V$ の交代部分空間として実現するのが正統な方法ではあるが、ここでは敢えてそれを避け、交代テンソルの言葉のみを借用する。

[*159] S は subsequence のつもり。

[*160] $S(n,m)$ 上の自由ベクトル空間という。

で定めると、これは交代的である。$[e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(m)}]=e_\alpha$ に注意。

さらに、e_α が $\wedge^m V$ の基底であることから、$\widetilde{\phi}(e_\alpha)=\phi(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(m)})$ となる線型写像 $\widetilde{\phi}:\wedge^m V\to U$ がちょうど一つあることもわかるので。$[v_1,\dots,v_m]\in\wedge^m V$ は、一般性をみたし、その存在が確かめられた。

以上の作り方から $\dim\wedge^m V=\binom{n}{m}$ であり、とくに $\wedge^n V$ は 1 次元である。これに合わせる形で、スカラー全体の 1 次元空間を $\wedge^0 V$ とも書く。

つぎに、$\wedge^k V$ と $\wedge^l V$ の間の積であるが、積の記号[*161]として $\wedge$ を使い、それぞれの基底 (e_α), (e_β) の積の行き先を

$$e_\alpha\wedge e_\beta=\begin{cases}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \alpha+\beta\end{pmatrix}e_{\alpha+\beta} & (\alpha\cap\beta=\emptyset)\\ 0 & (\alpha\cap\beta\neq\emptyset)\end{cases}$$

で定める。ここで $\alpha+\beta$ は (α,β) を小さい順に並べ替えたものを表わし、$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \alpha+\beta\end{pmatrix}$ は、(α,β) を $\alpha+\beta$ に並べ替える際の符号を表わす。$e_\alpha\wedge e_\beta\in\wedge^{k+l}V$ に注意。

こうして定めた積が結合法則を満たすことは、

$$(e_\alpha\wedge e_\beta)\wedge e_\gamma=e_\alpha\wedge(e_\beta\wedge e_\gamma)$$

からわかる。実際、α,β,γ の間に重なりがあるときは、両辺ともに 0 であり、相互に重なりがないときは、$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ が、(α,β,γ) を小さい順に並べ替えた $\alpha+\beta+\gamma$ に一致し、左辺に現れる符号は、並べ替えの合成

$$(\alpha,\beta,\gamma)\to(\alpha+\beta,\gamma)\to(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+\beta+\gamma$$

の符号であり、右辺の符号は、並べ替えの合成

$$(\alpha,\beta,\gamma)\to(\alpha,\beta+\gamma)\to\alpha+(\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$$

の符号であることから、どちらも並べかえ $(\alpha,\beta,\gamma)\to\alpha+\beta+\gamma$ の符号に一致するからである。

まとめると、次数の定まった交代テンソル空間の直和

$$\wedge V=\wedge^0 V\oplus\wedge^1 V\oplus\cdots\oplus\wedge^n V$$

には 外積 (exterior product or wedge product) という名前の結合的な積 $\wedge$ が定められ、外積の伴ったベクトル空間 $\wedge V$ を V の作り出す**外積代数** (exterior algebra) とよぶ。外積代数は、たくさん掛けると零になるという意味で、べき零代数の典型的な例になっている。

一般に、ベクトル空間における積が和とスカラー倍に関して分配法則が成り立つように定められていて 積の結合法則が成り立つとき、そのような積の伴った空間を**代数**[*162](algebra) とよぶ。

補題 K.1.

(i) $v\in V$ 自身の外積は $v\wedge v=0$ をみたし、したがって $v\wedge w=-w\wedge v$ $(v,w\in V)$ が成り立つ。

(ii) V のベクトル列 $v_1,\dots,v_m$ に対して、$v_1\wedge\cdots\wedge v_m=[v_1,\dots,v_m]$ が成り立つ。

[*161] $\wedge$ は wedge (くさび) を表わし、V をひっくり返したものではない。

[*162] 代数はもっと広い意味の言葉で、それを特殊な対象を表わすために使うというのは隠語ではよくあることだが、もとの英語がそうなのでいたしかたない。ちなみに、和と積のみの場合は環 (ring) とよばれ、環を代数の意味で使うこともある。例：作用素環。

Proof. (i) これは、外積の定義により、$e_i \wedge e_i = 0$ であり、$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ $(i \neq j)$ となるからである。

(ii) (i) から

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m} = [e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}]$$

がわかる。というのは、$i_1, \ldots, i_m$ に中に同じ添字があれば、$0 = 0$ の形で成り立つ。そうでなければ、$(i_1, \ldots, i_m)$ は $\alpha = (\alpha(1) < \cdots < \alpha(m))$ の並べかえであり、(i) で確かめた交代性と外積の定義からすぐわかる $e_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha(m)} = e_\alpha$ とを合わせると、

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m} = \mathrm{sgn}(\tau) e_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha(m)} = \mathrm{sgn}(\tau)[e_{\alpha(1)}, \ldots, e_{\alpha(m)}] = [e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}]$$

のように正しい。そこで多重線型性を使って等式の延長を行えば、もとめる関係式が得られる。 □

系 K.2.

(i) V のベクトルの列 $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}$ に対して、

$$[v_1, \ldots, v_k] \wedge [v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}] = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_{k+l} = [v_1, \ldots, v_{k+l}].$$

(ii) 交代テンソル $\xi \in \wedge^k V$, $\eta \in \wedge^l V$ は、符号付き交換関係 $\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi$ を満たす。

外積代数は次のような一般性をもっている。これにより、外積は特定の作り方によらないものであることがわかる。

定理 K.3. 外積代数 $\wedge V$ の本体部分 $\wedge' V = \bigoplus_{m=1}^n \wedge^m V$ は、代数 A と線型写像 $\phi : V \to A$ で $\phi(v)^2 = 0$ $(v \in V)$ となるものに関して、一般性をもつ。すなわち、そのような ϕ に対して、積を積に移す[163]線型写像 $\widetilde{\phi} : \wedge' V \to A$ で ϕ を拡張するものがちょうど一つ存在する。

Proof. $\phi(v)^2 = 0$ から、多重線型写像 $V^m \ni (v_1, \ldots, v_m) \mapsto \phi(v_1) \ldots \phi(v_m) \in A$ は交代的であり、 $\wedge^m V$ の一般性により、線型写像 $\phi_m : \wedge^m V \to A$ で $\phi_m(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) = \phi(v_1) \ldots \phi(v_m)$ となるものが m ごとにちょうど一つ存在し、

$$\phi_k(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \phi_l(v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_{k+l}) = \phi(v_1) \ldots \phi(v_{k+l}) = \phi_{k+l}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_{k+l})$$

をみたす。すなわち、$\bigoplus_{m=1}^n \phi_m$ は $\bigoplus_{m=1}^n \wedge^m V$ の上で積を保つ線型写像であり、そのようなものは これしかない。 □

系 K.4. 外積代数を作る操作は、線型写像について**連動的**[164] *(functorial)* である。すなわち、線型写像 $T : V \to W$ があれば、それは外積代数の間の準同型写像 $\wedge T : \wedge V \to \wedge W$ に単位元を保つ形で拡張され、ベクトル空間の恒等写像を外積代数の恒等写像線型写像に移し、$S : U \to V$ との合成については $\wedge(TS) = (\wedge T)(\wedge S)$ をみたす。

例 K.5. 線型作用素 $T : V \to V$ の外積拡張 $\wedge T$ は、$\wedge^n V$ $(n = \dim V)$ において、

$$(\wedge T)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = Tv_1 \wedge \cdots \wedge Tv_n = \det(T) v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$$

---

[163] 式で書けば $\widetilde{\phi}(\xi \wedge \eta) = \widetilde{\phi}(\xi)\widetilde{\phi}(\eta)$ $(\xi, \eta \in \wedge' V)$ ということ。そのような写像を準同型写像 (homomorphism) という。

[164] functorial の意訳のつもり。定まった訳がないこともあり。

をみたす。これは、基底ベクトル $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ について成り立つ等式

$$Te_1\wedge\cdots\wedge Te_n = (\sum_i t_{i,1}e_i)\wedge\cdots\wedge(\sum_i t_{i,n}e_i) = \sum_\tau t_{\tau(1),1}\ldots t_{\tau(n),n}\mathrm{sgn}(\tau)e_1\wedge\cdots\wedge e_n = \det(T)e_1\wedge\cdots\wedge e_n$$

と、$\wedge^n V$ が 1 次元であることからかわる。

このことと外積拡張が連動的であることから、行列式の性質 $\det(TS)=\det(T)\det(S)$ がきわめて形式的に導かれる。

例 K.6. V におけるベクトルの偶数列 $(v_1,\ldots,v_{2m})$ とサイズ $2m$ の交代行列 A に対して、2 次交代テンソルを

$$A[v] = \sum_{1\leq i,j\leq 2m} a_{i,j}v_i\wedge v_j \in \wedge^2 V$$

で定めると、多重線型性により

$$A[v]\wedge\cdots\wedge A[v] = \sum a_{i_1,j_1}\ldots a_{i_n,j_n}v_{i_1}\wedge v_{j_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_n}\wedge v_{j_n}$$

と表わされる。この右辺の項のうち、$(i_1,j_1,\ldots,i_n,j_n)$ が $(1,2,\ldots,2m-1,2m)$ の並べかえでないものは、外積の交代性により 0 となるので、

$$\begin{aligned} A[v]\wedge\cdots\wedge A[v] &= \sum_{\sigma\in S_{2m}} a_{\sigma(1),\sigma(2)}\ldots a_{\sigma(2m-1),\sigma(2m)}v_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge v_{\sigma(2m)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_{2m}} a_{\sigma(1),\sigma(2)}\ldots a_{\sigma(2m-1),\sigma(2m)}\mathrm{sgn}(\sigma)v_1\wedge\cdots\wedge v_{2m}. \end{aligned}$$

この最後の和は、定義 C.2 の注意から、$2^m m!\,\mathrm{Pf}(A)v_1\wedge\cdots\wedge v_{2m}$ に一致する。かくして、

$$A[v]\wedge\cdots\wedge A[v] = 2^m m!\,\mathrm{Pf}(A)v_1\wedge\cdots\wedge v_{2m}$$

が示された。

とくに、V の基底 $e_1,\ldots,e_{2m}$ と $2m$ 次の正方行列 B について、$v_i=\sum_k b_{i,k}e_k$ と取ると、

$$A[v] = \sum a_{i,j}b_{i,k}b_{j,l}e_k\wedge e_l = ({}^tBAB)[e]$$

であることから、

$$2^m m!\,\mathrm{Pf}({}^tBAB)e_1\wedge\cdots\wedge e_{2m} = A[v]\wedge\cdots\wedge A[v] = 2^m m!\,\mathrm{Pf}(A)v_1\wedge\cdots\wedge v_{2m} = 2^m m!\,\mathrm{Pf}(A)\det(B)e_1\wedge\cdots\wedge e_{2m}$$

の最初と最後を比較して、

$$\mathrm{Pf}({}^tBAB) = \mathrm{Pf}(A)\det(B)$$

が、これもきわめて形式的に得られた。

単体ベクトルと釣り合いの等式

ここで $\wedge^m V$ が幾何学的対象たり得ることの例証を与えておこう。線積分の定義を見ればわかるように、これはベクトル的な差し引きを許容するものになっていて、寄り道をしてもそれが小さい範囲にとどまれば、全体の線積分の値への寄与は小さい。ベクトル的な和の規則が使われているためである。これと同じ意味合いの和の規則 (balance identity) が $\wedge^m V$ においても成り立つことを確かめよう。

幾何学を強調して、V が変位ベクトルとして働く空間（**アフィン空間**という）を考えよう。それは、§2 で見たように、アフィン空間の点 P が $v \in V$ で移動した結果の点を Q とすると、$Q = P + v$ あるいは、$v = Q - P$ という計算規則が成り立つものをいう。アフィン空間の点 $P_0, P_1, \ldots, P_m$ を端点とする凸図形を

$$\langle P_0, P_1, \ldots, P_m \rangle = \{t_0 P_0 + t_1 P_1 + \cdots + t_m P_m; t_0 + t_1 + \cdots + t_m = 1, t_0 \geq 0, \ldots, t_m \geq 0\}$$

で表わす。これが m 次元的広がりをもつことと、ベクトルの列 $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_m - P_0$ が一次独立であることは同値。以下このような場合を専ら考えることにして、これと点の順序を指定したものを点列 $P_0, \ldots, P_m$ の定める m **単体** (m-simplex) とよぶ。m が明らかなときは略して単体ともいう。単体は点列できまるので、単体を表わす記号として点列のそれを流用する。したがって、点列を並べかえたものも単体であるが、もとの単体とは とりあえず区別しておく。

単体 $\langle P_0, P_1, \ldots, P_m \rangle$ に対して**単体ベクトル** (simplicial vector) を

$$[P_0, P_1, \ldots, P_m] = \frac{1}{m!}(P_1 - P_0) \wedge \ldots (P_m - P_0) \in \wedge^m V$$

で定める。$m!$ で割るのは、単体の大きさが $P_1 - P_0, \ldots, P_m - P_0$ の張る平行体の $1/m!$ の大きさだから。

補題 K.7. 単体 $P_0, P_1, \ldots, P_m$ と $0, 1, \ldots, m$ の並べかえ σ に対して、

$$[P_{\sigma(0)}, \ldots, P_{\sigma(m)}] = sgn(\sigma)[P_0, \ldots, P_m].$$

Proof. 一般の並べかえが $1, 2, \ldots, m$ の並べかえと入れかえ $0 \leftrightarrow 1$ から生成され、前者については、等式が明らかに成り立ち、入れかえについては、$v_j = P_j - P_0$ とすると、

$$m![P_1, P_0, P_2, \ldots, P_m] = -v_1 \wedge (v_2 - v_1) \wedge \cdots \wedge (v_m - v_1) = -v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m = -m![P_0, P_1, \ldots, P_m]$$

となり、こちらも等式が成り立つ。したがって、符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ が並べかえのくり返しについて掛け算的であること注意すれば、一般の並べかえについても補題の主張が成り立つ。 □

この事実を踏まえ、正の並べかえについては単体を同一視し、負の並べかえと元の単体にマイナス符号をつけたものとを同一視する。すなわち、単体 $\langle P_0, \ldots, P_m \rangle$ と単体ベクトル $[P_0, \ldots, P_m]$ とを同一視する。そうしておいて、m 単体 $\langle P_0, P_1, \ldots, P_m \rangle$ の**境界** (boundary) $\partial\langle P_0, \ldots, P_m \rangle$ とは $(m-1)$ 単体の形式和

$$\partial\langle P_0, P_1, \ldots, P_m \rangle = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \langle P_0, \ldots, \widehat{P_j}, \ldots, P_m \rangle$$

であると定める。

命題 K.8 (つり合い等式)**.** m 単体 $\langle P_0, P_1, \ldots, P_m \rangle$ *(*$m \geq 2$*)* の境界単体の単体ベクトルをすべて加えたものは 0 である：

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j [P_0, \ldots, \widehat{P_j}, \ldots, P_m] = 0.$$

Proof. $v_j = P_j - P_0$ と置くと

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^j [P_0, \ldots, \widehat{P_j}, \ldots, P_m] = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_m$$

であり

$$\begin{aligned}[P_1,\dots,P_m] &= (v_2-v_1)\wedge(v_3-v_2)\wedge\cdots\wedge(v_m-v_1)\\ &= v_2\wedge v_3\wedge\cdots\wedge v_m - v_1\wedge v_3\wedge\cdots\wedge v_m - v_2\wedge v_1\wedge v_4\wedge\cdots\wedge v_m\\ &\qquad -\cdots- v_2\wedge v_3\wedge\cdots\wedge v_{m-1}\wedge v_1\\ &= v_2\wedge v_3\wedge\cdots\wedge v_m - v_1\wedge v_3\wedge\cdots\wedge v_m + v_1\wedge v_2\wedge v_4\wedge\cdots\wedge v_m\\ &\qquad +\cdots+(-1)^{m-1}v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_{m-1}\end{aligned}$$

となるので、合わせて 0 がわかる。 □

例 K.9. $m=2$ のときは、

$$[P_1,P_2]-[P_0,P_2]+[P_0,P_1]=(P_2-P_1)-(P_2-P_0)+(P_1-P_0)=0$$

のように三角形の辺ベクトルの一周和が 0 という形になっている。

$m=3$ のときは、

$$[P_1,P_2,P_3]+[P_0,P_3,P_2]+[P_0,P_1,P_3]+[P_0,P_2,P_1]=0$$

で、左辺に現れる三角形の向きを右ねじで表示すると、2 単体ベクトルはすべて 3 単体 $\langle P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$ の外を向いていることがわかる。

Remark 28. 静水圧平衡 (hydrostatic equillibrium) で重力が無視できる場合を考えると、水中の物体の表面にかかる静水圧を表面全体にわたって積分したものが 0 になる。これは単位法線ベクトルを物体の表面にわたって面積分すると 0 になるという幾何学的言い換えが可能で、上のつり合い等式は、それを高次元の単体の表面和に拡張したものになっている。

先に予告した通り、双対空間 V^* に対する外積代数を特定の基底に依存しない形で構成しよう。まずは用語の補充から。

交代的かつ多重線型な関数を V 上の**交代形式** (alternating form) とよび、とくに変数の数が m であることを強調して m **形式**[*165] (m-form) という。1 形式は 線型汎関数＝線型形式に他ならず、**一次形式** ともいう。m 形式全体は 多重積 V^m 上の関数としての和とスカラー倍でベクトル空間となる。$m=1$ のときは、線型形式の作るベクトル空間で、V の双対空間 V^* に他ならない。

例 K.10. n 次列ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を V とし、列 $1,2,\dots,n$ から m 個取り出した部分列を $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ とするとき、$v=(v_1,\dots,v_m)\in V^m$ を並べた $n\times m$ 行列から、α に含まれる行を抜き出した m 次正方行列の行列式（小行列式 (minor determinant) という）$\Delta_\alpha(v_1,\dots,v_m)$ は V 上の m 形式である。

とくに $m=n$ であるとき、行列式 $\det(v_1,\dots,v_n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の n 形式である。

さて、m 形式の作るベクトル空間 A^mV^* が交代テンソル空間の性質をもつことを見よう。m 個の一次形式 $\theta_1,\dots,\theta_m\in V^*$ に対して、V 上の m 形式 $A(\theta_1,\dots,\theta_m)$ を行列式により

$$A(\theta_1,\dots,\theta_m)(v_1,\dots,v_m)=\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\theta_1(v_{\sigma(1)})\dots\theta_m(v_{\sigma(m)})=\begin{vmatrix}\theta_1(v_1)&\dots&\theta_1(v_m)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \theta_m(v_1)&\dots&\theta_m(v_m)\end{vmatrix}$$

で定める。これが m 形式であることは行列式の性質に他ならなず、さらに $\theta_1,\dots,\theta_m\in V^*$ についても交代線型である。

[*165] これは m 次形式と紛らわしいのだが、概ね m 形式＝交代 m 次形式である。

そこであとは、これが一般性をもつことを確かめればよい。そのために V の基底 $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ とその双対基底 $(e_i^\vee)_{1\leq i\leq n}$ を用意する。交代テンソルの最初の作り方でも見たように m 形式は $(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(m)})$ $(\alpha\in S(n,m))$ における値できまることから $\dim A^mV^* \leq \binom{n}{m}$ であり、これに

$$A(e_{\alpha(1)}^\vee,\dots,e_{\alpha(m)}^\vee)(e_{\beta(1)},\dots,e_{\beta(m)}) = \delta_{\alpha,\beta} \quad (\alpha,\beta\in S(n,m))$$

を合わせると、$(A(e_{\alpha(1)}^\vee,\dots,e_{\alpha(m)}^\vee))_{\alpha\in S(n,m)}$ は A^mV^* の基底であるとわかる。

以上の注意の下、交代線型写像 $\phi\colon V^*\times\cdots\times V^*\to U$ に対して、線型写像 $\widetilde{\phi}\colon A^mV^*\to U$ を

$$\widetilde{\phi}(A(e_{\alpha(1)}^\vee,\dots,e_{\alpha(m)}^\vee)) = \phi(e_{\alpha(1)}^\vee,\dots,e_{\alpha(m)}^\vee)$$

で定めるとき、この両辺の交代性を使って、並べかえた場合と同じ添字が出てきて 0 となる場合を補うことで

$$\widetilde{\phi}(A(e_{i_1}^\vee,\dots e_{i_m}^\vee)) = \phi(e_{i_1}^\vee,\dots e_{i_m}^\vee) \quad (i_1,\dots,i_m\in\{1,\dots,n\})$$

が成り立つので、多重線型性により $\widetilde{\phi}(A(\theta_1,\dots,\theta_m)) = \phi(\theta_1,\dots,\theta_m)$ $(\theta_1,\dots,\theta_m\in V^*)$ がわかる。

逆にこのような線型写像 $\widetilde{\phi}$ は、上の計算を逆に辿ることで、最初に与えたものに限る。かくして、$A\colon V^*\times\cdots\times V^*\to A^mV^*$ が、交代線型写像についての一般性をもつことが示された。

とくに、A^mV^* と $\wedge^mV^*$ とは、対応 $A(\theta_,\dots,\theta_m)\leftrightarrow[\theta_1,\dots,\theta_m]$ が成り立つ形の同型となるので、系 K.2 のいいかえとして、$\bigoplus A^mV^*$ 上の積としての外積は

$$A(\theta_1,\dots,\theta_k)\wedge A(\theta_{k+1},\dots,\theta_{k+l}) = A(\theta_1,\dots,\theta_{k+l})$$

で与えられ、したがって $A(\theta_1,\dots,\theta_m) = \theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_m$ と書けることがわかる。

以下、この同型により A^mV^* と $\wedge^mV^*$ を同一視する。

補題 K.11. $m=k+l$ とわけるとき、

$$\begin{aligned} &k!l!\,A(\theta_1,\dots,\theta_m)(v_1,\dots,v_m) \\ &\qquad = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\,A(\theta_1,\dots,\theta_k)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\,A(\theta_{k+1},\dots,\theta_m)(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(m)})\end{aligned}$$

Proof. $1,\dots,k$ と $k+1,\dots,k+l=m$ の並換えをそれぞれ σ', σ'' とし、合わせた $1,\dots,m$ の並換えを $\sigma'\times\sigma''$ で表わす。この記号を使えば、右辺は

$$\sum_{\sigma',\sigma''}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma(\sigma'\times\sigma''))\,\theta_1(v_{\sigma\sigma'(1)})\cdots\theta_k(v_{\sigma\sigma'(k)})\,\theta_{k+1}(v_{\sigma\sigma''(k+1)})\cdots\theta_m(v_{\sigma\sigma''(m)})$$

と表わされ、各 σ', σ'' を指定するごとに、$\tau=\sigma(\sigma'\times\sigma'')$ は σ とともに、$1,\dots,m$ の並換え全体を動くので、上の和は

$$\sum_{\sigma',\sigma''}\sum_\tau \operatorname{sgn}(\tau)\,\theta_1(v_{\tau(1)})\cdots\theta_k(v_{\tau(k)})\,\theta_{k+1}(v_{\tau(k+1)})\cdots\theta_m(v_{\tau(m)}) = k!l!\,A(\theta_1,\dots,\theta_m)(v_1,\dots,v_m)$$

に一致する。 □

系 K.12. V 上の k 形式 φ と l 形式 ψ の**外積** *(exterior product, wedge product)* $\varphi\wedge\psi\in\wedge^{k+l}V^*$ は

$$(\varphi\wedge\psi)(v_1,\dots,v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\,\psi(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$$

で与えられる。

問 K.2. 0 を含まないスカラー列 $(w(n))_{n\geq 1}$ に対して、$\varphi \wedge' \psi = \frac{w(k+l)}{w(k)w(l)}\varphi \wedge \psi$ と置いたものも外積と同じ性質を満たす。これは、外積構造をベクトル空間の同型 $\wedge^m V^* \ni \omega \mapsto w(m)\omega \wedge^m V^*$ で移しただけなので、驚くようなことではないが、異なる外積の定義が起こる原因ともなる。

以上、双対空間 V^* のグラスマン拡大 $\wedge V^*$ の基底によらない構成方法を述べてきたのであるが、双対埋め込み $V \subset V^{**}$ を使えば、V のグラスマン拡大を $\wedge V^*$ の一部として実現することで、同じく基底によらない構成を得ることができる。

改めてその基本事項をまとめると、ベクトル空間 V から作られた外積代数は、以下の性質で特徴づけられるものであった。

(i) $\wedge V$ は単位元と V の元から生成される。
(ii) $v \wedge v = 0$ $(v \in V)$ が成り立つ。
(iii) m 重外積 $V \wedge \cdots \wedge V$ を $\wedge^m V$ で表わし、単位元のスカラー倍全体を $\wedge^0 V$ で表せば、$\wedge V = \bigoplus \wedge^m V$ である。
(iv) V の一次独立なベクトルの集まり $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ に対して、$1, 2, \ldots, n$ の部分列 $\alpha = (\alpha(1), \ldots, \alpha(m))$ から $e_\alpha \in \wedge^m V$ を
$$e_\alpha = e_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha(m)}$$
で定めるとき、(e_α) は一次独立である。
(v) 線型写像 $T : V \to W$ は、単位元を保つ形で外積代数の準同型 $\wedge T : \wedge V \to \wedge W$ に拡張され、それは線型写像の合成について $\wedge(TS) = (\wedge T)(\wedge S)$ が成り立つという意味で連動的である。

グラスマンは、このようなものがあるという強い信念の下、外積代数の構造を調べ それを応用する研究に着手したのであった。産業革命がヨーロッパの周辺にまで広がった時期、日本では江戸時代末期のころ。生まれた年は リンカーン、ダーウィンと同じで、ガロアの 2 つ上、ハミルトンの 3 つ下、アーベルの 7 つ下。日本だと緒方洪庵、佐久間象山と同世代。

ここで、グラスマンが何を思い描き こういうものに考え至ったかについて、推測も交えて記しておこう。

行列式の幾何学的意味として、図形の符号付き面積・体積というのがあった。グラスマンは、これをより高次元の空間の中で捉えようとした。手がかりとして、3 次元空間の中の 2 次元平行四辺形の符号付き面積は何かと考える。今だと、辺を構成するベクトルから作ったベクトル積[*166]ということになるが、これはグラスマンの研究と同じ頃に発見されたハミルトンの四元数に由来するもので、グラスマンが外積代数を構想した当時は知られていなかった。ついでに書いておくと、連立一次方程式の掃き出し法と行列式の理論はあったものの、線型代数を支えるベクトル空間の考えはグラスマンに端を発するもので、当然それもなかった。

ともかく、図形の大きさと方向を併せ持ったものをいかに記述するかが問題である。ここでヒントになったのが行列式の交代性であったろうか、行列式そのものは数についてのものであるが、2 つのベクトルの「積」として、それが交代性をもち、新たなベクトル様のものが出現する状況をグラスマンは構想したものと思われる。このベクトル様のものが何かはとりあえず詮索しないことにして、積の性質に結合法則を要求したらどのようなものになるかと考えをすすめる。交代性の結果、積は必然的に交換法則を満たさず、同じベクトルどうしの積は 0 となる。このような積＝外積は、行列式と通底する何かを内包することになる。具体的に

$$(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)\wedge(y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3) = (x_2y_3-x_3y_2)e_2\wedge e_3+(x_3y_1-x_1y_3)e_3\wedge e_1+(x_1y_2-x_2y_1)e_1\wedge e_2$$

[*166] 外積の特殊な場合ということで、日本では これも外積というのであるが、欧米の言葉としては 区別して使われる。

のような計算結果をながめると、この段階では意味がはっきりしないものの、$e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$, $e_1 \wedge e_2$ を ベクトル e_1, e_2, e_3 に読み替えることで 馴染みのベクトル積が出現することに気づく。

グラスマンは、$e_1 \wedge e_2$ を、e_1 と e_2 により辺取られる平行四辺形の大きさと方向を表わすものと考えた。ただし、積の交代性により、辺の順序を入れ換えた e_2 と e_1 に伴うものは 向きが反対になる（マイナスがつく）ものと解釈する。より一般に、ベクトル列 $v = (v_1, \dots, v_m)$ から作った

$$\wedge v \equiv v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$$

は $v_1, \dots, v_m$ から作られる**平行体** (parallelotope) の大きさ[*167]と方向を表わすと考える。外積の交代性により、$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m = 0$ であることと $v_1, \dots, v_m$ が一次独立であることが同値になる。これもグラスマンが拡大論 (Ausdehnungslehre) の中で指摘・証明している。この辺りまでが グラスマンの構想であった。

ここで、縦数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を V とし その標準基底を e_j と書くとき、一次独立なベクトル列 $v_1, \dots, v_m$ とその外積 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$ の対応関係を具体的に調べてみよう。まず、ベクトル列を並べ換えると、m 次外積に並換えの符号がつくのであった。これは、平行体の向きが m 次外積に反映されているためであると了解される。$m = 1$ の場合は、$V = \wedge^1 V$ という同一視を与えているに過ぎない。$m \geq 2$ については、極端である $m = n$ の場合、$\wedge^n V = \mathbb{R} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ は一次元であり、

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \det(v_1, \dots, v_n) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

のように 平行体の符号付き「体積」が行列式の値という形で現れる。

次に $2 \leq m \leq n-1$ の場合であるが、例 K.10 の記号を使うと、

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m = \sum_{\alpha \in S(n,m)} \Delta_\alpha(v_1, \dots, v_m) e_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha(m)}$$

のように展開される。とくに、$m = n-1$ のときは、

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = \sum_{j=1}^n \Delta_{\widehat{j}}(v_1, \dots, v_{n-1}) e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_j} \wedge \cdots \wedge e_n.$$

ただし、$\Delta_{\widehat{j}}$ は $v = (v_1, \dots, v_m)$ から j 以外の行を抜き出した小行列式を表わす。

変数 $u_1, \dots, u_n$ から作られるベクトル $u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$ は、

$$\det(u, v_1, \dots, v_{n-1}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \Delta_{\widehat{j}}(v_1, \dots, v_{n-1}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

を満たす。このことから、ベクトル $((-1)^{j-1} \Delta_{\widehat{j}}(v_1, \dots, v_{n-1}))_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$ は $v_1, \dots, v_{n-1}$ と直交することがわかる。したがって、与えられたベクトル $0 \neq w \in \mathbb{R}^n$ に対して、直交空間 $w^\perp$ の基底を $v_1, \dots, v_{n-1}$ とすることで、$((-1)^{j-1} \Delta_{\widehat{j}}(v_1, \dots, v_{n-1}))_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$ は w に比例する。そこで 基底を構成するベクトルを定数倍で調整すると、

$$w_j = (-1)^{j-1} \Delta_{\widehat{j}}(v_1, \dots, v_{n-1}) \quad (1 \leq j \leq n)$$

と表わされ、これは

$$V^{n-1} \ni (v_1, \dots, v_{n-1}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \in \wedge^{n-1} V$$

が全射（上への写像）であることを意味する。

[*167] ここで問題にしている大きさは相対的な大きさで、計量（ものさし）に基づく絶対的なものではない。

例 K.13. $n=3$ の場合は、$v_1\wedge v_2\in\wedge^2\mathbb{R}^3\cong\mathbb{R}^3$ であるが、$v_1\wedge v_2$ をベクトル積 $v_1\times v_2$ と思えば、$\mathbb{R}^3=\{v_1\times v_2;v_1,v_2\in\mathbb{R}^3\}$ となる。こういったことが $n\geq 4$ でも成り立つというのが、上で確かめた内容である。

中間的な $2\leq m\leq n-2$ については、こういったことが成り立たないのであるが、それを見るために、射影空間の拡張である V の m 次元部分空間を一つの点と見たグラスマン多様体との関係について述べておこう。

行列集合 $V^m\ni v=(v_1,\dots,v_m)$ の中で、$\mathrm{rank}(v)=m$ であるもの全体を V_0^m と書くと、これは V^m の開集合であり、$v,w\in V_0^m$ が V 内で同じ部分空間を張ることと $\wedge v$ と $\wedge w$ が平行であることは同値。一方、このことは v と w が同じ部分空間の基底であるとも言いかえられるので、行列群 $GL(m)$ の右作用による軌道が一致すること $vGL(m)=wGL(m)$ に同じ。かくして、軌道空間 $V_0^m/GL(m)$ から射影空間 $\mathbb{P}(\wedge^m V)$ への埋め込み

$$V_0^m/GL(m)\ni vGL(m)\mapsto[\wedge v]\in\mathbb{P}(\wedge^m V)$$

が得られた。上で確かめたことから、$m=1$ と $m=n-1$ については、この埋め込みは全射である。

他方、V の線型変換群 $GL(V)$ は V^m に左から自然に作用し、右からの $GL(m)$ の作用と合わせて双作用 (biaction) を成し、V_0^m は一つの $GL(V)$ 軌道になっている（基底の変換行列を考える)。さて、右軌道空間 $V_0^m/GL(m)$ であるが、列階段行列への掃き出し法により、v からの α 抜き出しが単位行列であるものをその開近傍として取ることができるので、開近傍は 抜き出したあとに残された行列の成分数 $(n-m)m$ だけの自由度をもつとわかる。すなわち、$\dim V_0^m/GL(m)=(n-m)m$ である。一方で、これの埋め込み先である $\mathbb{P}(\wedge^m V)$ の次元は $\binom{n}{m}-1$ である。

補題 K.14. $\binom{n}{m}-1\geq(n-m)m$ であり、$1\leq m\leq n-1$ の範囲で等号が成り立つのは $m=1$ または $m=n-1$ に限る。

Proof. 不等式は $m\leftrightarrow n-m$ の置き換えで不変であるから、$1\leq m\leq n/2$ の場合に示せばよい。以下これを仮定する。また $m=1$ については等号が明らかに成り立つので、$2\leq m\leq n/2$ の場合が問題である。このとき、より強い不等式

$$\binom{n}{m}\geq(n-m+1)m>(n-m)m+1$$

が成り立つことを確かめよう。 実際、左側の不等式は

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)}{m!}\geq m\iff n(n-1)\cdots(n-m+2)\geq mm(m-1)\cdots 2$$

と書き直され、$n\geq 2m$ に注意すれば、これは

$$(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2)\geq m(m-1)\cdots 3 \tag{$*$}$$

から従う。この不等式の右も左も $m-2$ 個の数を掛けたものになっていて、先頭の数を比較すると、

$$n-1\geq 2m-1\geq m\quad(m\geq 1)$$

であることから $2\leq m\leq n/2$ については $(*)$ が成り立ち、したがって すべての主張が示された。 □

例 K.15. $n=4$, $m=2$ のとき、$m(n-m)=4$, $\binom{n}{m}-1=5$ であるから、$V_0^2/GL(2)$ は $\mathbb{P}(\wedge^2 V)\cong\mathbb{P}^5$ の超曲面として埋め込まれる。埋め込み先の射影空間の同次座標として、

$$\Delta_{ij}(v)=\Delta_{i,j}(v_1,v_2)=\begin{vmatrix}v_{i1}&v_{i2}\\v_{j1}&v_{j2}\end{vmatrix}\quad(1\leq i<j\leq 4)$$

を使えば、埋め込み先の超曲面は Plücker relation $\Delta_{12}\Delta_{34}-\Delta_{13}\Delta_{24}+\Delta_{14}\Delta_{23}=0$ の定める二次曲面で与えられる。実際、$\alpha=(1,2)$ 行の抜き出しであれば、$GL(2)$ 軌道の代表元として

$$(v_1,v_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

を取ることで、

$$\Delta_{12}=1,\ \Delta_{13}=b,\ \Delta_{14}=d,\ \Delta_{23}=-a,\ \Delta_{24}=-c.\ \Delta_{34}=ad-bc$$

は、$\Delta_{12}\Delta_{34}-\Delta_{13}\Delta_{24}+\Delta_{14}\Delta_{23}=0$ をみたす。これは 2 次の同次式であるあるから、$\alpha=(1,2)$ 以外の開集合でも成り立つ。

一般の埋め込みについても、類似の二次超曲面何個かの共通部分（したがって代数多様体）であることが知られている[*168]。

慣れ親しんだ $n=3$ の場合、すべての $1\leq m\leq 2$ について、$\wedge^m V$ は 3 次元的解釈ができて、$m=2$ については 外積の代わりにベクトル積を使ったベクトル的解釈が可能である。ベクトル積の直感が働かない最も簡単な状況が上の例でみた $(n,m)=(4,2)$ の場合で、偶然か否か、これが電磁現象を記述する枠組みを与える。上で見たように $\wedge v$ $(v\in V^m)$ は $\wedge^m V$ の中の低次元部分集合となっているのだが、それでも $\wedge^m V$ の基底を含むだけの広がりをもっていることに注意する。

付録L　クリフォード代数

これは、幾何代数 (geometric algebra) とも呼ばれ、対称形式が与えられたベクトル空間から、一般性の手続きに従い得られるもので、量子代数の一種でもある。ここでは、有限次元の場合に限定して、その基本的なところを見ておこう。

まずは、双線型形式の行列表示から。これは、V の基底 $e=(e_1,\dots,e_n)$ に対して、$A=(\langle e_i,e_j\rangle)$ で与えられる行列のことで、これは、基底の取り換え $f=(f_1,\dots,f_n)=eP$ に対して、一次変換の場合と違って、${}^tPAP$ のように変化する。とくに、対称形式の表示行列は対称行列のままで、交代形式の表示行列は交代行列のままである。

命題 L.1. 複素スカラーの場合、対称形式の表示行列は、正段に取れ、実スカラーの表示行列の標準形は、符号付き正段行列となる。

$$\begin{pmatrix}I_k&0&0\\0&-I_l&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

また、交代形式の表示行列は、スカラーの範囲に依存せず、正準行列に取れる。

$$\begin{pmatrix}0&I_m&0\\-I_m&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

クリフォードは、1878 年の論文で、ハミルトンの四元数とグラスマンの外積代数を受けて、両者を統合する形で新たな代数構造を考案した。それは実内積空間 V のベクトルに対する積を $v^2=-(v|v)1$ $(v\in V)$ で

[*168] 例えば、I.R. Shafarevich and A.O. Ramikov, Linear Algebra and Geometry, Springer (2013).

あり結合法則をみたすように定めるというもので、そうすると、$(v|w) = 0$ であれば、

$$(v|v) + (w|w) = (v+w|v+w) = (v+w)(v+w) = (v|v) + (w|w) + vw + wv$$

より、必然的に $vw = -wv$ が成り立つ。実内積空間でなくても、ベクトル空間 V に対称形式 $\langle v, w \rangle$ があれば、同じ仕組みで代数構造が定められる。クリフォード自身は、それを geometric algebra と呼んでいるので、以下でも代数 (algebra) という用語をこの意味で使うことにする。

ただ、グラスマンもそうであったように、そのように定めた積が矛盾なく定まるかどうかは検証していない。クリフォードが若くして亡くなったこともあり、そういった存在に関する問題は後の世代に委ねられた形であった。ここでは、そういった試みの中でも最も直接的と思われる、Chevalley-Artin による構成を紹介しよう。このところ流行の geometric algebra の応用を論じる際にも、存在証明がややもすれば見過ごされがちな点を支えるべく。

さて、対称形式の標準形から、V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ で、$\langle e_i, e_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$ となるものが取れるので、それらの積の入替えに伴う交代性により、幾何代数はベクトル空間として、$e_\alpha = e_{\alpha_1} \cdots e_{\alpha_r}$ によって張られる。ここで、α は $\{1, 2 \dots, n\}$ の部分集合を小さい順に並べた部分列 $(\alpha_1 < \dots < \alpha_r)$ を表わす。以下、そのような部分列を $[n] \equiv \{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合全体 $2^{[n]}$ と同一視する。クリフォードの条件 $v^2 = \langle v, v \rangle 1$ により、これらの間の積の規則は、必然的に次をみたす。

$$e_\alpha e_\beta = \prod_{i \in \alpha \cap \beta} \epsilon_i (-1)^{[\alpha, \beta]} e_{\alpha + \beta}$$

ここで、$\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ であり、$\alpha + \beta$ は対称差を表わし、$[\alpha, \beta]$ は、$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ を小さい順に並べ替える際の偶奇性を表わす。ただし、同じ数字が並んだときは それを取り除く。すなわち、α_r がくぐり抜けるのは $j < \alpha_r$ となる $j \in \beta$ だけあり、次に α_{r-1} がくぐり抜けるのは $j < \alpha_{r-1}$ となる $j \in \beta$ だけあり、以下同様に、α_1 がくぐり抜けるのは $j < \alpha_1$ となる $j \in \beta$ だけあるので、全体として

$$[\alpha, \beta] = \sharp\{(i, j); i \in \alpha, j \in \beta, i > j\}$$

だけの符号が残る。

なお、部分集合に対する対称差が実施に加法群の演算になっていることは、$2^{[n]} \cong \mathbb{Z}_2^{[n]}$ という読み替えからわかる。$\mathbb{Z}_2$ は二元体であるため、$\mathbb{Z}_2^{[n]}$ は、加法群のみならず、$\mathbb{Z}_2$ に値を取る $[n]$ 上の関数の作る代数になっていて、$\alpha, \beta \in 2^{[n]}$ の共通部分が、$\mathbb{Z}_2$ 代数 $\mathbb{Z}_2^{[n]}$ における積を与える。この対応により、$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ に対応する $[n]$ の部分集合は、$\alpha \cap beta \cup \beta \cap \gamma \cup \gamma \cap \alpha$ であることに注意。

上で定めた偶奇関数であるが、$\alpha, \beta, \gamma \in 2^{[n]}$ に対して、

$$[\alpha + \beta, \gamma] = \sharp\{(l, k); l \in \alpha + \beta, k \in \gamma, l > k\}$$

と $[\alpha, \gamma] + [\beta, \gamma]$ を比べると、$[\alpha, \gamma] + [\beta, \gamma]$ は、$\alpha \cap \beta$ のところで二重に数えているので、それを取り除いた形の $[\alpha + \beta, \gamma]$ とは偶奇が一致する。すなわち、

$$[\alpha + \beta, \gamma] = [\alpha, \gamma] + [\beta, \gamma] \qquad \text{mod } 2.$$

同様の理由で、

$$[\alpha, \beta + \gamma] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \gamma] \qquad \text{mod } 2.$$

改めて、e_α $(\alpha \in 2^{[n]})$ を基底とするベクトル空間を考え、先の関係式により積を定める。この積について、$e_\emptyset$ は単位元に（掛けた相手を変えない元）なっていることに注意。

補題 L.2. この積は結合法則を満たす。すなわち、

$$(e_\alpha e_\beta)e_\gamma = e_\alpha(e_\beta e_\gamma) \quad (\alpha, \beta, \gamma \in 2^{[n]}).$$

Proof. 左辺は

$$\prod_{i\in\alpha\beta} \epsilon_i \prod_{j\in(\alpha+\beta)\gamma} \epsilon_j \, (-1)^{[\alpha,\beta]+[\alpha+\beta,\gamma]} e_{\alpha+\beta+\gamma}$$

であり、右辺は

$$\prod_{k\in\beta\gamma} \epsilon_k \prod_{l\in\alpha(\beta+\gamma)} \epsilon_k \, (-1)^{[\alpha,\beta+\gamma]+[\beta,\gamma]} e_{\alpha+\beta+\gamma}$$

であることから、

$$\prod_{i\in\alpha\beta} \epsilon_i \prod_{j\in(\alpha+\beta)\gamma} \epsilon_j = \prod_{k\in\beta\gamma} \epsilon_k \prod_{l\in\alpha(\beta+\gamma)} \epsilon_l$$

かどうかの問題である。これは、

$$\alpha\beta \sqcup (\alpha+\beta)\gamma = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \beta\gamma \sqcup \alpha(\beta+\gamma)$$

であることからわかる。 □

以上により、e_α $(\alpha \in 2^{[n]})$ で張られるベクトル空間の上の積で結合法則をみたすものが得られた。この積は、作り方から $e_\alpha = e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_r}$ であり、$e_i e_i = \epsilon_i e_\emptyset$ となる。また、$e_i e_j = -e_j e_i = e_{\{i,j\}}$ $(1 \le i < j \le n)$ である。したがって、$v = \sum_i v_i e_i$ に対しては、

$$vv = \sum_{i,j} v_i v_j e_i e_j = \sum_i v_i^2 \langle e_i, e_i \rangle e_\emptyset = \langle v, v \rangle e_\emptyset.$$

となり、クリフォードの条件をみたす。

まとめると、次のことがわかる。

定理 L.3. 対称形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を伴ったベクトル空間 V に対して、V から生成される単位元 1 をもつ代数で、クリフォード条件 $v^2 = \langle v, v \rangle 1$ を満たすものの中で一般性をもつものが、ちょうど一つ存在する。

クリフォード代数を $C(V, \langle , \rangle)$ と書く。あるいは、対称形式込みのベクトル空間を V と書くことにて、$C(V)$ と書くこともある。外積代数との関係。ベクトル空間としての自然な同型 $\wedge V \to C(V)$ がある。そうすると、$C(V)$ の積を $\wedge V$ の上に定義することも可能で、

索引