テンソル圏と対称性
— まぼろしの講義を巡って

Yamagami Shigeru

2021/3/4, Graduate School of Mathematics, Nagoya

おわり名古屋での１１年をふりかえり

- 教養２１コマ、専門１１コマ
- 古き良き時代の面影、それも今は
- 関数論と統計の授業
- 簡単なことだけを
- 自由な講義への憧れ
- １０年前の談話会

量子論のための関数解析

ヒルベルト空間 (von Neumann) の周辺

自己共役作用素 $\boldsymbol{H}$ のスペクトル分解

$$\boldsymbol{H} = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{s}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{ds})$$

と確率測度

$$(\xi|f(H)\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\,(\xi|E(ds)\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\,\mu(ds), \quad (\xi|\xi) = 1.$$

一径数ユニタリー群

$$U(t) = e^{itH} = \int_{\mathbb{R}} e^{ist}\,E(ds).$$

Stone の定理：$U(t)$ から H が復元。

局所コンパクト可換群 G のユニタリー表現の基本定理：
SNAG (Stone-Naimark-Ambrose-Godement) theorem

$$U(g) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)\, E(d\chi) \quad (g \in G).$$

$\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ は G の**指標群**（Pontryagin 双対）。

$$\mathbb{R}\hat{} \cong \mathbb{R}, \quad \mathbb{Z}\hat{} \cong \mathbb{T}, \quad \mathbb{T}\hat{} \cong \mathbb{Z}.$$

量子論における対称性＝群のユニタリー表現

量子確率変数 (observable) と**量子状態** (state) の代数的解釈

環 (-algebra) A の元 h と正汎関数 $\varphi(a^*a) \geq 0$ $(a \in A)$。

クリフォード*環（Dirac 代数）の構造（周期４）。実、*、複素。

（エルミート内積に関する「ユニタリー」の固有値、$1/\overline{\lambda}$ 不変性）

Example

ベクトル状態：$A = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\varphi(a) = (\xi|a\xi)$.

Bochner の定理とモーメント問題（量子確率）

$$\varphi(e^{ith}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ist}\,\mu(ds) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$\varphi(h^n) = \int_{\mathbb{R}} s^n\,\mu(ds) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

GNS (Gelfand-Naimark-Segal) **構成法**
（表現とベクトル状態の復元）

代数的には**正則表現** (regular representation) の構成
$a\varphi^{1/2} \in A\varphi^{1/2}$ 上の内積

$$(a\varphi^{1/2}|b\varphi^{1/2}) = \varphi(a^*b).$$

左正則表現と右正則表現の同一視 (standard representation)。

$$a\varphi^{1/2} = \psi^{1/2}b \quad \text{in} \quad L^2(A).$$

広く作用素環について可能（**冨田・竹崎理論**）。
順序ヒルベルト空間にして**双加群** (bimodule)

$$L^2_+(A) \subset L^2(A), \quad {}_AL^2(A)_A.$$

群と環の融合

群の自己同型作用 $\theta : G \ni g \mapsto \theta_g \in \mathrm{Aut}(A)$
による*環 A の拡大＝**接合積** (crossed product)

$$A \rtimes_\theta G = \sum_{g \in G} Ag = \sum_{g \in G} gA, \quad g^* = g^{-1}.$$

$$ga = \theta_g(a)g \iff \theta_g(a) = gag^{-1}.$$

Example

自明な作用 $\theta_g = \mathrm{id}$ $(g \in G)$ のとき

$$A \rtimes G = A \otimes \mathbb{C}G.$$

とくに、$\mathbb{C} \rtimes G = \mathbb{C}G$（**群環**）。

共変表現と接合積の表現

*環と群のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における表現
$\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $U : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ で共変条件

$$U(g)\pi(a) = \pi(\theta_g(a))U(g)$$

をみたすもの（**共変表現**）と
接合積 $A \rtimes G$ の表現 $\pi \rtimes U : A \rtimes G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が
次の関係で対応し合う。

$$(\pi \rtimes U)(ag) = \pi(a)U(g).$$

ハール測度の存在により、以上のことが局所コンパクト群の連続的作用についても広く成り立つ。
ただし、$\mathbb{C}G \implies C^*(G)$ （作用素ノルムによる完備化）などと読み替える。

Mackey による群拡大と誘導表現の周辺

Theorem (Imprimitivity theorem, 還元定理)

$C_0(X) \rtimes G$ $(X = G/H)$ の表現＝ H からの誘導表現。

$C^*(N \rtimes G) = C^*(N) \rtimes G \cong C_0(\widehat{N}) \rtimes G$
軌道による分解

$$C_0(\widehat{N}) \rtimes G \cong \oint_{X \in \widehat{N}/G} C_0(X) \rtimes G.$$

Example

$C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$ の表現＝単位元からの誘導表現。
既約表現は一つしかなく、すべて $L^2(\mathbb{R})$ におけるシュレーディンガー型表現と同値。

フーリエ変換 $C_0(\mathbb{R}) \cong C^*(\widehat{\mathbb{R}})$ による書き直し：

指標 $e_\tau \in \mathbb{R}\hat{}$ を $e_\tau(t) = e^{i\tau t}$ $(t, \tau \in \mathbb{R})$ で定める。

$$C_0(\mathbb{R}) \ni f(t) \longleftrightarrow \int \widehat{f}(\tau) e_\tau \, d\tau \in C^*(\widehat{\mathbb{R}})$$

$$f(t-s) \longleftrightarrow \int \widehat{f}(\tau) e^{i\tau s} e_\tau \, d\tau$$

共変表現 $\pi \rtimes U$ の下、$V(\tau) = \pi(e_\tau)$ と置くと、

$$U(s)\pi(e_\tau)U(s)^{-1} = e^{i\tau s}\pi(e_\tau)$$
$$\iff U(s)V(\tau)U(s)^{-1} = e^{i\tau s}V(\tau).$$

$C_0(\mathbb{R}^n) \rtimes \mathbb{R}^n$ についても同様。

量子交換関係

正準交換関係 (Heisenberg-Born-Jordan-Dirac-Weyl)

$$U(s)V(t) = e^{is\cdot t}V(t)U(s), \quad s,t \in \mathbb{R}^n.$$

の既約表現は一つしかない（Stone-von Neumann) ことの Mackey による証明。

冪零リー群 G のユニタリー表現
Dixmier vs. Kirillov

coadjoint orbit $\mathfrak{g}^*/G \cong \widehat{G}$（$G$ の既約表現全体）

量子化と反量子化 — 正しい方向は？

双対量とテンソル圏

群の**双対（表現）と不変量**

- 平行移動（エネルギー・運動量)、
- 回転（角運動量・スピン)、
- 入れ替え（ボソン、フェルミオン)

フーリエ解析

角運動量の合成則
表現のテンソル積と分解 (Clebsch-Gordan 1866)
$\dim V_n = n + 1$ $(n = 0, 1, \dots)$

$$V_m \otimes V_n \cong V_{|m-n|} \oplus V_{|m-n|+2} \oplus \cdots \oplus V_{m+n}.$$

Schur-Weyl 相互律 (reciprocity) ${}_{GL(V)}(V \otimes \cdots \otimes V)_{S_n}$

$$(GL(V))' = (S_n)'' \iff (GL(V))'' = (S_n)'.$$

Pontryagin dual (1934) と Tannaka dual (1938)

コンパクト群 G の**淡中双対**＝表現の作るテンソル圏 Rep(G)
テンソル圏 (tensor category) ＝ linear monoidal category
monoidal category ＝ 単位元と結合法則の Leibniz 的抽象化

Example (自明な例)

ベクトル空間の作るテンソル圏 Vec ＝自明な群の淡中双対

テンソル圏の Vec への埋め込み (Fiber functor) と**淡中双対定理**
(コンパクト量子群)

コンパクト群と対称（可換）テンソル圏

Theorem (対称テンソル圏としての特徴付け)

代数的 — *Grothendieck-Saavedra Rivano-Deligne*
ユニタリー的 — *Doplicher-Roberts*

作用素環と無限テンソル積

- 作用素環の直積分解 (von Neumann の reduction theory)
  既約分解と因子分解（極大可換環と中心環）
- 因子環の構成と Connes の分類
  無限テンソル積とエルゴード系の接合積
  $A = A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots$
  $A_k = M(n_k, \mathbb{C})$（行列環）$\Longrightarrow$
  $C(\prod_{k\geq 1}\{1, \ldots, n_k\}) \subset A$。
- 角谷二分律と無限自由度（無限テンソル積）の確率現象。
  統計物理との関係。
- KMS 条件（熱平衡状態の巡回周期性）と冨田・竹崎理論。

双加群とテンソル圏

部分因子環 $A \subset B$ の **Jones index**

$$[B:A] \in \{4\cos^2 \frac{\pi}{n}; n = 3, 4, \cdots\} \sqcup [4, \infty].$$

B/A の情報と量子不変量

双加群 (bimodule) ${}_A X_A$ — Connes, Ocneanu, Longo, Roberts
と部分環 $B = \mathrm{End}(X_A) \supset A$。ここで X はヒルベルト空間。

双加群のテンソル積：

$$ {}_A X \otimes^A Y_A \equiv {}_A X \otimes_A L^{-2}(A) \otimes_A Y_A.$$
$$L^2(A) \otimes^A X = X = X \otimes^A L^2(A).$$

テンソル積の構成には、冨田・竹崎理論がまるごと使われる。
結合法則 $(X \otimes^A Y) \otimes^A Z = X \otimes^A (Y \otimes^A Z)$ は非自明。

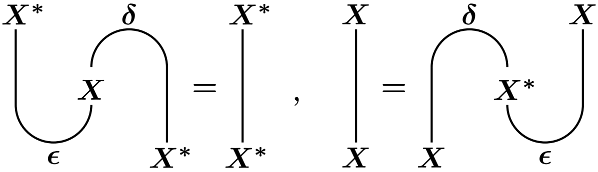
Rigid tensor category

X^* が X の**双対** (dual object) とは、

$$\delta_X : I \to X \otimes X^*, \quad \epsilon_X : X^* \otimes X \to I.$$

で、次のИIN 等式を満たすものが存在すること。

$$(\epsilon \otimes 1_{X^*})(1_{X^*} \otimes \delta) = 1_{X^*}, \quad (1_X \otimes \epsilon)(\delta \otimes 1_X) = 1_X.$$



すべての X について双対 X^* が存在し $(X^*)^* \cong X$ であるテンソル圏を **rigid** である（双対性構造をもつ）という。

双対性構造の存在と一意性

淡中双対 Rep(G) は rigid であり、すべての rigid tensor category は有限次元的。例えば、 $\dim \mathrm{Hom}(X, Y) < \infty$。

Theorem

$X = {}_A X_A$ のとき、$\delta : L^2(A) \to X \otimes X^*$, $\epsilon : X^* \otimes X \to L^2(A)$ の存在 $\iff$ $[End(X_A) : A] < \infty$。

Example

有界写像 $\delta : \mathbb{C} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$, $\epsilon : \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ の存在 $\iff$ $\dim \mathcal{H} < \infty$。

Theorem

rigid C-tensor category* では、テンソル圏全体での対応 $X \mapsto X^*$ が $X^{**} = X$ となるように取れ、「一意的」である。

Temperley-Lieb 代数と Jones-Kauffman category

自己双対 $X^* \cong X$ の場合。
最少の部品 $\delta : I \to X \otimes X$, $\epsilon : X \otimes X \to I$
から生成されたテンソル圏。

Kauffman 図式による表示：

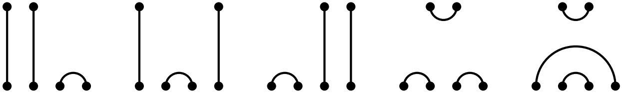
$$\mathrm{Hom}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}) = \mathbb{C}K_{m,n},$$

$$K_{m,n} = \{\text{上下 } m,\ n \text{ 個の点を結ぶ平面紐の同値類}\}.$$

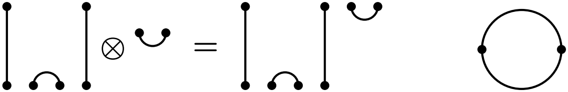
$K_{m,n} = \emptyset \iff m + n$ が奇数、

$$|K_{m,n}| = C_{(m+n)/2}, \quad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

$|K_{2,4}| = 5$:



テンソル積と合成

 $= d \in \mathbb{C}$

$SL(2,\mathbb{C})$ 型量子群の淡中双対

有限テンソル圏と量子不変量

対称性とテンソル圏

superselection sector とテンソル圏 $\boldsymbol{End}(\boldsymbol{A})$
(Doplicher-Haag-Roberts)

電荷：$\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})/\mathrm{Int}(\boldsymbol{A}) \subset \mathrm{End}(\boldsymbol{A})/\mathrm{Int}(\boldsymbol{A})$
内部対称性 $\widehat{\boldsymbol{G}} \subset \mathrm{End}(\boldsymbol{A})/\mathrm{Int}(\boldsymbol{A})$

テンソル圏 $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ の表現 $\boldsymbol{\mathcal{T}} \to \mathrm{End}(\boldsymbol{A})$ or $\boldsymbol{A}$ 双加群

$\boldsymbol{A}$ の作り方：Jones-Ocneanu-Popa

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{End}(\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X} \otimes \cdots).$$

ここで $\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ の「生成元」。

テンソル圏が良い離散性 (amenablility) をもつとき、うまく行く。

Mackey の手法と竹崎双対定理

接合積と Stone-von Neumann-Mackey

$$L^\infty(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R} \cong \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})), \quad L^\infty(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C} \rtimes \mathbb{R}(\text{フーリエ変換}).$$

$(A \rtimes \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R} \cong A \otimes \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ **(竹崎双対定理)**。

環の表現（加群）と森田同値

$A\text{-}\mathcal{M}od \cong B\text{-}\mathcal{M}od$

Imprimitivity bimodule (Fell, Rieffel)

双加群 ${}_BZ_A$ が imprimitivity bimodule であるとは

$$B = \mathrm{End}(Z_A) \iff Z \otimes^A Z^* \cong L^2(B)$$
$$\iff Z^* \otimes^B Z \cong L^2(A).$$

このとき、 A と B は森田同値。

$${}_AX \iff {}_BY, \quad Y = Z \otimes^A X, \quad X = Z^* \otimes^B Y.$$

テンソル圏と竹崎双対定理

竹崎双対定理の矮小化：有限可換群の場合
$(A \rtimes G) \rtimes \widehat{G} \cong A \otimes \mathcal{B}(\ell^2(G))$.
有限群の場合 — 群拡大の表現論 (Schur-Mackey)

（離散）群をテンソル圏と見る。

$$g \otimes h = gh, \quad g^* = g^{-1}, \quad \mathrm{Hom}(g, h) = \mathbb{C}\delta_{g,h}.$$

テンソル圏 $\mathcal{T}$ への埋込み $G \subset \mathcal{T}$ から
$\mathcal{T}$ における G 双加群全体 $\mathcal{T} \rtimes G =$ **軌道体** (orbifold) の双対版。

Mackey 理論 (little group analysis) との類似により
自然に $\widehat{G} \subset \mathcal{T} \rtimes G$ であり、$(\mathcal{T} \rtimes G) \rtimes \widehat{G} \cong \mathcal{T}$.

テンソル圏における Frobenius 代数による一般化。
imprimitivity object の構成。

余作用と双加群と接合積

淡中双対 $\widehat{G}$ の作用素環 A への作用。

Roberts 作用 $\widehat{G} \to \mathrm{End}(A)$ の双加群による書き直し
テンソル関手 $\Phi : \widehat{G} \to {}_A\mathcal{M}\mathrm{od}_A$

$A \subset A \rtimes \widehat{G}$ と双対作用 $G \to \mathrm{Aut}(A \rtimes \widehat{G})$

$$(A \rtimes \widehat{G}) \rtimes G \cong A \otimes \mathcal{B}(L^2(G)).$$

コンパクト群を越えた一般化？

具体的にベクトル群 $G = \mathbb{R}^n$ では？

物理的必要性と Poincare 群の再解釈。

A virtual plan of lectures

1. *-operations in tensor categories
2. *-representations of tensor categories
3. Tannaka dual: the tensor category of unitary representations of a compact group.
4. The trivial tensor category of Hilbert spaces.
5. symmetries in operator algebras (bimodule representations of tensor categories)
6. Group case: $\widehat{G}$ is canonically realized as a bimodule tensor category over a crossed product algebra $A \rtimes G$.
7. A realization of $\widehat{G}$ in the trivial tensor category is equivalent to giving the group G (Tannaka duality).
8. Crossed products in tensor categories and Takesaki duality.

あの日から早１０年。

春の岬　旅のをはりの鷗どり
浮きつつ遠くなりにけるかも
（三好達治「測量船」より）