関数解析入門

山上　滋

2026 年 1 月 8 日

目次

1	**道の糧など**	2
2	**バナッハ空間**	8
3	**たたみ込みと近似定理**	19
4	**ヒルベルト空間の幾何学**	29
5	**線型汎関数**	38
6	**バナッハの有界性定理**	54
7	**バナッハ空間における双対関係**	65
8	**ヒルベルト空間上の線型作用素**	65
9	**フーリエ変換**	74
10	**作用素のスペクトル**	81
11	**スペクトル分解定理**	87
12	**コンパクト作用素**	96
13	**閉作用素**	104

A　**コンパクト距離空間**　114

B　**可測関数の近似定理**　116

C　**球の表面積**　118

D　Tietze extension a la Riesz　120

E　Kuratowski-Zorn **の定理**　121

F　Baire **測度**　124

G　**テンソル積**　124

作用素解析とのつながりを意識した関数解析入門である。予備知識としては、フーリエ解析とルベーグ積分の初歩を仮定する。例えば、次の講義ノート程度のことを知っていれば十分であろう。

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/fourier/fourier2013.pdf

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/topics/integral2018.pdf

予備知識以上に大事なのが利用のしかたである。これは、知識とか技能を習得するためのものではない。数学を実践するための題材提供が主たる目的なので、各自の問題意識に応じて、緩急自在にいくつかある課題に取り組んで欲しい。他は、そこに至る準備に過ぎない。

なお、ところどころに現れる英文記述に深い意味はない。日本語での TeX 打ちが面倒になったときに気分転換をしたまでのこと。

1　道の糧など

周期的な現象を記述する関数を近似する手段としてフーリエ多項式を考えることは良い方法である。周期が 2π の関数であれば、

$$f(x) \fallingdotseq \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + \cdots + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

としてみるわけであるが、ここで問題になるのが、係数 $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ をどのように選ぶのがよいのかということ。$2n+1$ 個の未定数を決めるのであるから、適当な $2n+1$ 個の点 $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ (例えば、$x_j = 2\pi j/(2n+1)$) での f の値が正確に表示されるよ

うにするというのが一つの考え方であるが、特定の点での観測値というものは誤差を伴うものでもあり、合理性に欠ける。もっと賢い方法は、２つの関数の「近さ」を何らかの方法で数値化し、その近さを表す値が最小になるように係数 $\{a_0, \ldots, b_n\}$ を選ぶというものである。フーリエ級数の場合であれば、２つの周期関数 f, g の間の「距離」を

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx$$

で与えると、これを最小にする解として、いわゆるフーリエ係数

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\, dx$$

を得る。

このように、関数の間に「距離」を設定すると、ベクトル空間における内積から導入されるそれと形式上よく似たものであることがわかってくる。このことをより組織的に行うと、微積分の線型代数化、あるいは無限次元線型代数としての解析学、といった側面が見えてくる。これが、関数解析学の基本的なアイデアである。

さて、その関数が定義される場所を提供するものとして重要なのがユークリッド空間である。ユークリッド空間については位相も含めて知っていることであろうが、そもそもユークリッド空間とは何か説明できるだろうか。数を並べたものは、座標表示に過ぎないのであって、そういった座標のとり方に依存しない幾何学的実体に対して本来空間という言葉を使うべきである。数学的に簡明な作り方（H. Weyl の構成方法）は、次のようになっている。集合 E が**ユークリッド空間** (Euclidean space) であるとは、内積が指定された有限次元ベクトル空間 $\mathcal{E}$ と写像

$$E \times E \ni (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} \in \mathcal{E}$$

で、以下の性質をもつものが与えられたときをいう。

(i) $\overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$

(ii) $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$.

(iii) 勝手に選んだ点 $x \in E$ とベクトル $v \in \mathcal{E}$ に対して、$v = \overrightarrow{xy}$ となる $y \in E$ が丁度一つ存在する。

これは言うなれば、高校以来慣れ親しんできた幾何ベクトルとその内積を逆算的に用いて定義としたもので、卑怯といえば卑怯な方法である。しかし、こう割り切ることで、ユークリッド空間およびその幾何学が実数の性質に帰着するものであることが容易に把握

できるようになる。悪くない定義だと思うのだがどうだろうか。なお、こういった形式的な定義が、物理現象（主に光）に由来する空間認識と一致すべき先験的な理由は何もないのだが、非常に良く幾何学的直感となじんでいるのも事実。ここにも不思議の泉。

いわゆる原点 O を一つ固定すると、上の要請から、$E \ni P \mapsto \overrightarrow{OP} \in \mathcal{E}$ は全単射になるので、E の点を表すのに $\mathcal{E}$ のベクトルで代用することができる。これを点の位置ベクトル（表示）という。さらに、内積空間 $\mathcal{E}$ における正規直交基底 (e_k) を一組選んでおけば、$\mathcal{E}$ のベクトルは成分を使って表示することが可能になるので、結局 E の点を実数の組み（いわゆるデカルト座標[*1]）で表すことができる。また、この一連の操作を可能にするための情報 $(O, (e_k))$ のことを**座標系**と呼ぶ。

ベクトル空間 $\mathcal{E}$ の次元 d は、座標を構成する数の個数を表していて、これをユークリッド空間 E の次元という。次元の等しいユークリッド空間は、しかるべき意味ですべて同型であり、$\mathbb{R}^d$ によって代表させることができる。慣例にしたがって、以下では、積集合 $\mathbb{R}^d$ をユークリッド空間と呼ぶことにする。

なお、$\mathbb{R}^d$ における「長さ」を表す記号として、絶対値記号を流用することにする。

$$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}.$$

したがって、二点 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 間の距離は $|x - y|$ で与えられる。そして、この距離に関して $\mathbb{R}^d$ は完備である。

問 1.1. $\mathbb{R}^d$ の部分集合 S が完備であるための必要十分条件は、S が閉集合であること。

問 1.2. $\mathbb{R}^d$ における正方体 $\{x \in \mathbb{R}^d; 0 \leq x_j \leq 1\}$、球体 $\{x \in \mathbb{R}^d; |x| \leq 1\}$ との共通部分、標準単体 $\{x \in \mathbb{R}^d; 0 \leq \sum_j x_j \leq 1, x_j \geq 0\}$ 相互の体積比を求め、$d \to \infty$ のときの様子を観察せよ。

以下では、無限次元空間を構成する関数（数列も関数の一種とみなす）の生息場所（定義域）としては、ユークリッド空間内の開集合または閉集合（と同相な位相空間）を考えれば十分であるが、少し欲を出して、コンパクト距離空間あるいは σ コンパクト距離空間を扱ってもよい。ここで、σ コンパクト空間とは、ハウスドルフ空間で、可算個のコンパクト集合の合併で書けるものをいう。実際に、そういったものは、ごく普通の確率現象（例えばコイン投げを繰り返す）を記述する場面で必要になる。

距離空間における収束、開球、閉球、開集合、閉集合。連続関数。コーシー列、完備性。等長写像。位相空間の本に書いてある内容。概念というか、用語というか。距離空間の実

[*1] Cartesian coordinates

例をどれだけ挙げられるだろうか。これは、知識というよりも慣れ親しんでいるかどうか知る目安になる。「知っている距離空間を列挙せよ。さすれば、どのような数学を経験してきたか当ててみせよう。」といったところか。通常の位相の本ではあまり取り上げられない距離空間として、応用数学方面で欠かすことのできない無向単純グラフ（向きなし、多重線・ループなし）がある。これも手持ちの距離空間としておこう。

問 1.3. 距離空間 (X, d) において、次の条件を満たす正数 $\gamma > 0$ があれば、(X, d) は完備である。$d(x, y) \le \gamma$ である $x, y \in X$ は $x = y$ の場合しかない。

定理 1.1 (Bolzano-Cauchy)**.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は完備である。とくに、数体 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は完備である。

これは解析学の原点とでもいうべきもので、様々なことがこれから派生ないし生成されることになる。そういったものの一つとして、次の定理も参考までに挙げておく（証明については付録 A を見よ）。

定理 1.2. 距離空間 X に対して、次の 3 条件は同値である。

(i) X 内の点列は、収束する部分列をもつ。
(ii) Heine-Borel の有限被覆性が成り立つ。
(iii) X は全有界[*2]かつ完備。

問 1.4. $\mathbb{R}^d$ の部分集合 S に対して、以下の 3 条件は同値である。これを復習せよ。

(i) S は有界閉集合である。
(ii) S に含まれる点列は収束する部分列をもつ。
(iii) Heine-Borel の有限被覆性が成り立つ。

距離空間 (X, d) における写像 $T : X \to X$ で、

$$d(T(x), T(y)) \le \rho d(x, y), \quad \forall\, x, y \in X$$

となる $0 < \rho < 1$ が存在するものを**収縮**[*3](contraction) という。

[*2] 距離空間 X が全有界 (totally bounded) であるとは、$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 有限集合 $F \subset X$, $\forall x \in X$, $\exists y \in F, d(x, y) \le \epsilon$ となること。
[*3] 縮小写像ともよばれる、早口言葉。いっそ、縮み。

定理 1.3 (バナッハの不動点定理)**.** 収縮 $T : X \to X$ に対して、

$$T(x) = x$$

となる点 $x \in X$（T の**不動点** *fixed point* という）がちょうど一つ存在する。

Proof. 以下の手順で確かめていけばよい。

(i) 収縮 T の不動点は、あっても一つしかない。

(ii) 勝手に選んだ点 $x \in X$ に対して、$x_n = T^n(x)$ $(n \geq 1)$ とおくと、$\{x_n\}$ は Cauchy 列である。実際、$d(T^{n+1}(x), T^n(x)) \leq \rho^n d(T(x), x)$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^m(x)) &\leq d(T^n(x), T^{n-1}(x)) + \cdots + d(T^{m+1}(x), T^m(x)) \\ &\leq (\rho^{n-1} + \cdots + \rho^{m+1} + \rho^m) d(T(x), x). \end{aligned}$$

(iii) したがって、X が完備であれば $y = \lim_{n\to\infty} x_n$ となる点 y が存在する。

(iv) y は T の不動点である。 □

課題 1. 逆関数定理

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域（連結開集合） Ω の上で定義された正則関数 $f(z)$ を Ω から $\mathbb{C}$ への写像とみなす。領域内の点 $a \in \Omega$ で $f'(a) \neq 0$ であれば、a を含む開集合 $U \subset \mathbb{C}$ と $b = f(a)$ を含む開集合 V で次の性質をもつものが存在する。

(i) f を U に制限したものは一対一で、その像は V に一致する。

(ii) $f : U \to V$ の逆写像を g で表し、それを V の上で定義された複素数値関数とみなしたものは、正則である。

これを不動点定理の応用として示そう。証明の過程で、U のとり方が具体的に提示される。

Proof. 与えられた複素数 w に対して、写像 $\phi_w : \Omega \to \mathbb{C}$ を

$$\phi_w(z) = z + \frac{1}{f'(a)}(w - f(z))$$

で定める。$w = f(z) \iff \phi_w(z) = z$ に注意。

(i) a を含む凸開集合 $U \subset \Omega$ で、

$$|f'(z) - f'(a)| \leq \frac{|f'(a)|}{2} \quad \text{for } z \in U$$

となるものが存在する。

(ii) U 内の二点 z_0, z_1 に対して

$$|\phi_w(z_0) - \phi_w(z_1)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \phi_w(tz_1 + (1-t)z_0)\, dt \right| \le \frac{1}{2}|z_0 - z_1|$$

および

$$|z_0 - z_1| \le \frac{2}{|f'(a)|}|f(z_0) - f(z_1)|$$

を示せ。とくに、写像 f は U 内の異なる点を異なる点に写す。

(iii) f による U の像 $V = f(U)$ も開集合であることを不動点定理を使って示す。

V 内の点 $w_0 = f(z_0)$ $(z_0 \in U)$ に対して、$r > 0$ を $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ であるように選ぶ。このとき $|w - w_0| \le |f'(a)|r/2$ をみたす w に対して、

$$\phi_w(\overline{B_r(z_0)}) \subset \overline{B_r(z_0)}$$

であることを示せ。これから、ϕ_w の コンパクト集合 $\overline{B_r(z_0)}$ への制限は、収縮を与え、したがって不動点定理により、$\phi_w(z) = z$ をみたす $z \in \overline{B_r(z_0)} \subset U$ が存在し、$B_{|f'(a)|r/2}(w_0) \subset f(U)$ がわかるので、$f(U)$ は開集合である。

(iv) 逆写像 $g : V \to U$ が正則であり、$g'(w) = 1/f'(z)$ となることを示せ。 $\square$

Remark 1. 行列のノルムを導入することで、可微分写像の逆写像定理を同様の方法で証明することができる。また、常微分方程式の解の存在と一意性も不動点定理の応用として示すことができる。例えば、Dieudonne [1, １０章] を見よ。

課題 2. こんどは、コンパクト距離空間 (X, d) を扱う。写像 $T : X \to X$ が、弱収縮であるとは、$x \ne y \in X$ ならば $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ となること。このとき、T の不動点がちょうど一つ存在する。

(i) 弱収縮 T の不動点は、あっても一つしかない。

(ii) 不等式 $d(T(x), T(y)) \le d(x, y)$ $(x, y \in X)$ が成り立つ。とくに $x \mapsto Tx$ は連続である。

(iii) 連続関数 $X \ni x \mapsto d(T(x), x)$ の最小値を与える点を a とすると、$Ta = a$ である。実際、$d(T^2(x), T(x)) \le d(T(x), x)$ に注意すれば、最小性から $d(T^2(a), T(a)) = d(T(a), a)$ であるが、弱収縮性から、これは $T(a) = a$ を意味する。

コンパクト性を追加すると、弱い仮定からも同じ結論を得る。かように完備性とコンパクト性が玄妙に綾なす世界は、これからも何度となく出会うことになるだろう。

2 バナッハ空間

距離空間 (X, d) (より一般に、位相空間) に対して、X 上の複素値連続関数全体 $C(X)$ は関数の和と定数倍に関して複素ベクトル空間となる。これが、これからくり返し現れる関数空間の最初の例である。さて、$f \in C(X)$ に対して、

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in X\} \in [0, \infty]$$

とおくと、次の性質をみたす。(0) $\|f\| = 0$ となるのは $f = 0$ に限る。

(i) $\|f\| \geq 0$ である。
(ii) $f, g \in C(X)$ に対して、$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
(iii) $f \in C(X)$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$. (ただし、$0 \cdot \infty = 0$ と約束する。)

そこで $C_b(X) = \{f \in C(X); \|f\| < \infty\}$ とおくと、$C_b(X)$ は $C(X)$ の部分空間であり、$\| \ \|$ は、$C_b(X)$ 上の実数値関数を定める。X がコンパクト空間のときは、$C_b(X) = C(X)$ であることに注意しよう。

一般に、ベクトル空間 V の上で定義された実数値関数 $\|v\|$ $(v \in V)$ で、上の性質 (i), (ii), (iii) をみたすものを V の半ノルム (seminorm)、(0) も満たすものを**ノルム** (norm[*4]) と呼ぶ。ノルムが指定されたベクトル空間を**ノルム空間** (normed vector space) と称する。かくして、$C_b(X)$ はノルム空間である。

問 2.1. ベクトル空間 V の半ノルム $\| \cdot \|$ に対して、$W = \{v \in V; \|v\| = 0\}$ は V の部分空間であり、$\| \cdot \|$ は商ベクトル空間 V/W 上のノルムを誘導する。

ノルム空間においては、距離を $d(x, y) = \|x - y\|$ という形で導入できるので、距離空間の構造も併せ持つことになる。

問 2.2. 距離の性質を確かめよ。

この距離を使うことにより、ノルム空間における収束を

$$\lim_{n \to \infty} v_n = v \iff \lim_{n \to \infty} \|v_n - v\| = 0$$

で定める。関数空間 $C_b(X)$ に上で与えたノルムを考えた場合、これは関数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ が連続関数 $f(x)$ に一様収束することに他ならない。

[*4] ラテン語の norma（物差し）に由来する。

問 2.3. 一様収束の概念を復習し、このことを確かめよ。

ここで、距離空間における位相について復習すべきである。開球・閉球は、

$$B_r(x) = \{y \in V; \|x-y\| < r\}, \quad \overline{B}_r(x) = \{y \in V; \|x-y\| \leq r\}$$

で与えられる。

ノルム空間では $V_r = \{v \in V; \|v\| \leq r\} = \overline{B}_r(0)$ という記号も使う。ノルム空間の距離は平行移動で不変であるから、$\overline{B}_r(x) = x + V_r$ であることに注意

問 2.4. この位相に関して、ノルムは連続関数であることを確認。ノルム不等式が $\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v-w\|$ の形に言い換えられることに注意。

問 2.5. 閉球 $\overline{B}_r(x)$ は、開球 $B_r(x)$ の閉包に一致する。これは、一般の距離空間では成り立たなかった性質である。

問 2.6. ノルム空間 V の線型部分空間 W に対して、その閉包 $\overline{W}$ も線型部分空間である。

定義 2.1. 2つのノルム空間 V, W の間の**同型写像** (isomorphism) とは、ベクトル空間としての同型写像 $\Phi : V \to W$ でさらに、

$$\|\Phi(v)\|_W = \|v\|_V, \quad v \in V$$

であるものをいう。ノルム空間としての同型写像のことを**等長同型** (isometric isomorphism) ともいう。

問 2.7. コンパクト空間 K, K' が同相であれば、$C(K)$ と $C(K')$ は等長同型である。

ノルム空間内の列 $\{v_n\}$ がベクトル v に収束するならば、$\|v_m - v_n\| \leq \|v_m - v\| + \|v_n - v\|$ より、

$$\lim_{m,n\to\infty} \|v_m - v_n\| = 0$$

である。逆にこの性質をもつ点列（**コーシー列**) が常に収束するとき、ノルム空間は**完備** (complete) であると言う。完備なノルム空間は、その研究者[*5]に因んで**バナッハ空間** (Banach space) と称される。

命題 2.2. ノルム空間 $C_b(X)$ は完備であり、したがってバナッハ空間である。

[*5] Stefan Banach (1892–1945)、ポーランドの数学者、関数解析に偉大な足跡を残す。

Proof. ノルム空間 $C_b(X)$ の Cauchy 列 $\{f_n\}$ を考える。任意の $x \in X$ に対して、

$$\lim_{m,n\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\| = 0$$

であるから、実数の完備性により、$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する。さらに、関数列 $\{f_n\}$ は f に一様収束するので、f は有界連続関数になり、完備であることがわかる。 □

問 2.8. 上の証明の細部を埋めよ。

問 2.9. $C_0(a,b) = \{f \in C([a,b]); f(a) = f(b) = 0\}$ とおくと、これは $C([a,b])$ の閉部分空間であり、したがってそれ自身 Banach 空間である。

問 2.10. ベクトル空間 V における 2 つのノルム $\| \|, \| \|'$ が同値であるとは、次をみたす正数 $\alpha > 0, \beta > 0$ が存在すること。

$$\|v\| \leq \alpha\|v\|', \quad \|v\|' \leq \beta\|v\|, \quad v \in V.$$

同値なノルムの定める位相は等しいことを確認。また、有限次元ベクトル空間においては、すべてのノルムは同値であり、したがって完備である。

有限次元ノルム空間がつねに完備であることを使えば、次のコンパクト性による特徴づけを得る。

定理 2.3. ノルム空間 V について、V が有限次元であることと V_1 がコンパクトであることは同値。とくに無限次元ノルム空間では、有界閉集合がコンパクトにならない。

Proof. 有限次元空間のノルムがすべて同値であることから、V_1 はコンパクトである。

逆に V_1 がコンパクトであれば、V_1 を $v \in V_1$ の近傍である $v + V_{1/2}$ で $V_1 \subset \bigcup_{v\in V_1}(v + V_{1/2})$ のように覆うことにより、有限個の $(v_j)_{1\leq j\leq m}$ で $V_1 \subset (v_1 + V_{1/2}) \cup \ldots (v_m + V_{1/2})$ となるものが存在する。

そこで $W = \sum \mathbb{C}v_j$ とおくと、W は有限次元部分空間で、その完備性から V の閉部分空間であり、$V_1 \subset W + V_{1/2}$ が成り立つ。これを 1/2 倍すると、$V_{1/2} \subset W + V_{1/4}$ となり、したがって、$V_1 \subset W + W + V_{1/4} = W + V_{1/4}$ を得る。

以下、1/2 倍を繰り返すことで、$V_1 \subset W + V_{1/2^n}$ $(n \geq 1)$ が帰納的に成り立つので、$v \in V_1$ に対して、$v_n \in V_{1/2^n}$（$\iff \|v_n\| \leq 1/2^n$）で $v - v_n \in W$ となるものが取れ、W が閉であることから、$v = \lim_{n\to\infty}(v - v_n) \in \overline{W} = W$ が分かる。すなわち、$V_1 \subset W$ より $V = \bigcup_{r>0} V_r \subset \bigcup rW = W$ は有限次元である。 □

さて、数列と級数を比べると級数の方が扱いやすい。完備性の判定もまた然り。

命題 2.4 (Banach の判定法)**.** ノルム空間 V において、$\sum_{n=1}^{\infty}\|w_n\| < \infty$ を満たすどのような列 $\{w_n\}_{n\geq 1}$ に対しても極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} w_k$ が V で存在するならば、V はバナッハ空間である。

Proof. V におけるコーシー列 (v_n) に対して、自然数の増大列 (n_k) $(k \geq 1)$ を $\|v_i - v_j\| \leq 1/2^l$ $(i, j \geq n_k)$ となるように取れば、$w_k = v_{n_{k+1}} - v_{n_k}$ は判定条件の前提を満たすので、

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = w_1 + \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k} w_j$$

を $v \in V$ とすると、(v_n) がコーシー列であることから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = v$ である。 □

問 2.11. * バナッハ空間 V の閉部分空間 W による商ベクトル空間 V/W 上の関数を

$$\|v + W\|_{V/W} = \inf\{\|v + w\|; w \in W\}$$

で定めると、これは完備なノルムとなる。(完備性のヒント:上の命題)

これまでのところ、X は位相空間であればよく、距離空間であるという性質は使っていなかった。ここで、X が距離空間である場合に、X が、完備距離空間でもある $C_b(X)$ に等長に埋め込めることを示しておこう。そのために、$a \in X$ を一つ選び固定しておく。各 $x \in X$ に対して、$f_x \in C_b(X)$ を $f_x(t) = d(x,t) - d(a,t)$ で定めると($f_a \equiv 0$ であることに注意)、不等式

$$|f_x(t) - f_y(t)| = |d(x,t) - d(y,t)| \leq d(x,y)$$

が成り立ち、$t = x, y$ で等号が成立することから、$\|f_x - f_y\| = d(x,y)$ がわかる。

この埋込みを利用して、距離空間 X の**完備化** (completion) を構成しておこう。X におけるコーシー列全体を $\widetilde{X}$ で表し、値が一定の点列を取ることで、X を $\widetilde{X}$ の一部と思う。2 つのコーシー列 $\tilde{x} = \{x_n\}, \tilde{y} = \{y_n\}$ に対して、次の極限

$$\widetilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

が存在し、X における距離関数の拡張を与え、三角不等式をみたす。

問 2.12. 上の極限が存在することを確かめよ。

そこで、$\widetilde{X}$ における同値関係を

$$\tilde{x} \sim \tilde{y} \iff \widetilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$$

で定めると、$\widetilde{d}$ は商空間 $\widehat{X} = \widetilde{X}/\sim$ 上の距離 $\widehat{d}$ を誘導する。合成写像 $X \to \widetilde{X} \to \widehat{X}$ は等長写像であり、X の $\widehat{X}$ における像は密である、すなわち、X の $\widehat{X}$ における閉包は、$\widehat{X}$ に一致することが即座にわかる。あとは、距離空間 $(\widehat{X}, \widehat{d})$ が完備であることを示せばよい。これは直接確かめることも可能であるが、コーシー列のコーシー列を扱うことになりそれなりに鬱陶しい。そこで、先程の埋込みを使ってみよう。X におけるコーシー列 $\tilde{x} = \{x_n\}$ に対して、$\{f_{x_n}\}$ は $C_b(X)$ におけるコーシー列となるので、$C_b(X)$ が完備であることから、

$$f_{\tilde{x}} = \lim_{n\to\infty} f_{x_n}$$

が存在する。さらに別のコーシー列 $\tilde{y} = \{y_n\}$ を用意して $f_{\tilde{y}} \in C_b(X)$ を同様に定めると、

$$\|f_{\tilde{x}} - f_{\tilde{y}}\| = \lim_{n\to\infty} \|f_{x_n} - f_{y_n}\| = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \widetilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

であるので、対応 $\widetilde{X} \ni \tilde{x} \mapsto f_{\tilde{x}} \in C_b(X)$ は、$\widehat{X}$ から $C_b(X)$ への等長写像 $\widehat{x} \mapsto f_{\widehat{x}}$ を引き起こす。一方、$\widehat{X}$ の $C_b(X)$ における像は、X の $C_b(X)$ における閉包 $\overline{X}$ に一致するので、$\widehat{X}$ の完備性が示された。

問 2.13. 距離空間の間の等長写像 $f : X \to Y$ があれば、f は $\widehat{X}$ から $\widehat{Y}$ への等長写像に拡張できる。また、そのような拡張は一つしかない。

距離空間の間の写像 $f : X \to Y$ が一様連続 (uniformly continuous) とは、どのような $\epsilon > 0$ についても、$\delta > 0$ を小さく選ぶことで、$d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ $(d(x, x') < \delta)$ とできること。

命題 2.5. 距離空間の間の一様連続写像 $f : X \to Y$ は、$\widehat{X}$ から $\widehat{Y}$ への連続写像され、そのような拡張は一つしかない。それを $\widehat{f}$ で表わせば、$\widehat{f}$ も一様連続である。

Proof. 最初に、X のコーシー列 (x_n) に対して、$(f(x_n))$ が Y のコーシー列であることに注意する。実際、どのような $\epsilon > 0$ についても、f の一様連続性から、$\delta > 0$ が十分小さければ、$d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ $(d(x, x') < \delta)$ とできる一方で、(x_n) がコーシー列であるから、$N > 0$ を大きく取れば、$d(x_m, x_n) < \delta$ $(m, n \geq N)$ である。この 2 つを合わせると、$d(f(x_m), f(x_n)) \leq \epsilon$ $(m, n \geq N)$ がわかる。

このことから、連続な拡張 $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ があれば、X のコーシー列 (x_n) に対して、$\widehat{f}(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n)$ でなければならないので、そのような拡張は一つしかなく、もしそれがあれば、

$$\widehat{f}(x) = \lim_n f(x_n) \quad (x = \lim_n x_n)$$

を満たす。

この右辺の極限で写像 $\widehat{f}:\widehat{X}\to\widehat{Y}$ が定義できることは、$\lim x_n=\lim x'_n$ であるとき、まぜた $x_1,x'_1,x_2,x'_2,\dots$ も X のコーシー列で、したがって $f(x_1),f(x'_1),f(x_2),f(x'_2),\dots$ は Y のコーシー列であり、とくに $\lim f(x_n)=f(x'_n)$ となることからわかる。

こうして定めた $\widehat{f}$ の一様連続性であるが、f の一様連続性 $d(f(x),f(x'))\leq\epsilon$ $(d(x,x')<\delta)$ において、$\widehat{d}(\lim_n x_n,\lim_n x'_n)<\delta$ であれば、十分大きい n について、$d(x_n,x'_n)<\delta$ となるので $d(f(x_n),f(x'_n))\leq\epsilon$ が得られ、それからの極限として $\widehat{d}(\lim f(x_n),\lim f(x'_n))\leq\epsilon$ がわかる。

すなわち $\widehat{f}$ の一様連続性 $d(\widehat{f}(\widehat{x}),\widehat{f}(\widehat{x}'))\leq\epsilon$ $(d(\widehat{x},\widehat{x}')<\delta)$ が示された。 □

問 2.14. 上の命題で、f が連続なだけでは、連続な拡張 $\widehat{f}:\widehat{X}\to\widehat{Y}$ が保証されない。そのような具体例を一つあげよ。

数列空間

有界複素数列 $(x_n)_{n\geq 1}$ の作るベクトル空間を ℓ^∞ で表す。これは、ノルム

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|;n\geq 1\}$$

によりバナッハ空間である。各 $1\leq p<\infty$ に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$$

である複素数列 $\{x_n\}$ 全体を ℓ^p で表すと、$\ell^p\subset\ell^q$ $(p\leq q)$ かつ $\ell^p\neq\ell^q$ $(p\neq q)$ である。

問 2.15. 以上のことを確かめよ。

補題 2.6.

(i) ***Hölder* 不等式**：$1\leq p,q\leq\infty$ が $1/p+1/q=1$ をみたすとき、

$$\left|\sum_j x_j y_j\right|\leq\|x\|_p\|y\|_q.$$

(ii) ***Minkowski* 不等式**：$x,y\in\ell^p$ $(1\leq p\leq\infty)$ に対して、

$$\|x+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p.$$

Proof. 不等式が自明でないのは $1<p,q<\infty$ の場合なので、これを仮定する。

(i) 関数 $\log t$ は上に凸であるから、正数 $a, b \geq 0$ に対して、

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

となる。そこで、$a = |x_j|^p / \|x\|_p^p$, $b = |y_j|^q / \|y\|_q^q$ とおいて、j について和をとると、

$$\sum_j |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

(ii) Minkowski 不等式は、

$$\sum_j |x_j + y_j|^p \leq \sum_j |x_j| \, |x_j + y_j|^{p-1} + \sum_j |y_j| \, |x_j + y_j|^{p-1}$$

の右辺の各項に Hölder 不等式を使えばわかる。

□

定理 2.7. ℓ^p は、ℓ^∞ の線型部分空間であり、

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

をノルムとするバナッハ空間である。

Proof. 部分空間であることとノルムの性質については、Minkowski 不等式から分かる。完備性については、あとの定理 2.9 の証明を参照。 □

例 2.8. 単位球の形状を $\mathbb{R}^2$ で図示し、$p = 1$ から $p = \infty$ に至る変化の様子を観察する。

問 2.16. $p \leq q$ のとき、$\|x\|_q \leq \|x\|_p$ であることを確かめよ。また、$p < q$ のとき、$\|x_n\|_q \to 0$ かつ $\|x_n\|_p = 1$ であるような点列を作れ。ヒント：前半は、$t^\lambda + 1 \leq (t+1)^\lambda$ $(\lambda \geq 1,\ t \geq 0)$ に帰着させる。後半は、

$$\sum_k t_k^p = \infty \quad \text{だが} \quad \sum_k t_k^q < \infty$$

となる正数列 $\{t_k\}$ を考える。

問 2.17. 標準的な記号ではないが、$\ell_0 = \{x = (x_n) \in \ell^\infty; \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ とすると、ℓ_0 は ℓ^∞ の閉部分空間である。

測度空間 (Ω,μ) があるとき、可測関数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ および $1\le p\le\infty$ に対して、

$$\|f\|_p=\begin{cases}\left(\int_\Omega |f(\omega)|^p\,\mu(d\omega)\right)^{1/p} & \text{if } p<\infty\\ \inf\{M>0;\mu([|f|\ge M])=0\} & \text{if } p=\infty\end{cases}$$

とし、$\|f\|_p<\infty$ であるもの全体を同値関係

$$f\sim g \iff f(\omega)=g(\omega) \text{ for } \mu\text{-a.e. } \omega\in\Omega$$

で同一視して得られる商空間を $L^p(\Omega,\mu)$ という記号で表す。

Ω が $\mathbb{R}^d$ の可測集合（例えば開集合）であり、μ がルベーグ測度を Ω に制限したものであるときは、$L^p(\Omega)$ と略記する。

問 2.18. $\Omega=\mathbb{N}$、$\mu(A)=|A|$ (個数測度) の場合に、$L^p(\Omega,\mu)=\ell^p$ であることを確認。

問 2.19. $L^1(\Omega,\mu)\cap L^\infty(\Omega,\mu)\subset L^p(\Omega,\mu)$ $(p\ge 1)$ である。

問 2.20. ヘルダーの不等式

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,\mu(dx)\le\left(\int |f(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p}\left(\int |g(x)|^q\,\mu(dx)\right)^{1/q}$$

を示し、上の $\|\cdot\|_p$ がノルムであることを、ℓ^p の場合に倣って確かめよ。$p=q=2$ の場合は、とくにシュワルツ不等式と呼ばれる。

問 2.21. $\mu(\Omega)<\infty$ とする。

(i) $\|f\|_\infty>M$ ならば、$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p\ge M$ を示せ。
(ii) $1\le p\le q\le\infty$ ならば、$\|f\|_p\le\|f\|_q\,\mu(\Omega)^{(q-p)/pq}$ を示せ。
(iii) $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$ を示せ。

問 2.22. $|\Omega|>0$ であっても、Ω が内点を含むとは限らない。

定理 2.9 (Riesz-Fischer)**.** ベクトル空間 $L^p(\Omega,\mu)$ は、$\|\ \|_p$ をノルムとするバナッハ空間である。さらに $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$ *(*$f_n,f\in L^p(\Omega,\mu)$*)* ならば、

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)\quad \textit{for } \mu\textit{-a.e. } x\in\Omega$$

となるような部分列 $\{n_k\}_{k\ge1}$ が取れる。

Proof. $p \neq \infty$ の場合を考える。$L^p(\Omega, \mu)$ におけるコーシー列 $\{f_n\}$ が収束する部分列を持てばよい。部分列を十分まばらに取ることで[*6]、$\|f_{n+1} - f_n\|_p \leq 1/2^n$ としてよい。このとき、

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|\right)^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq 1$$

で $n \to \infty$ とすると、

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|\right)^p \mu(dx) \leq 1$$

となり、とくに

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| < \infty \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } x.$$

そこで、

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$$

は、ほとんど全ての $x \in \Omega$ で意味をもち、

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \in L^p(\Omega, \mu)$$

より、$f \in L^p(\Omega, \mu)$ である。最後に、

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

を p 乗積分して、Minkowski 不等式を使えば、

$$\|f - f_n\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

□

問 2.23. $L^\infty(\Omega, \mu)$ がバナッハ空間であることを示せ。

問 2.24. $1 \leq p < \infty$ のとき、$L^p([0,1])$ における関数列 f_n で、$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 0$ かつ、すべての $t \in [0,1]$ で $\lim_n f_n(t)$ が存在しないものを作れ。

[*6] 部分列 $\{N_k\}_{k\geq 1}$ を、$m, n \geq N_k \Longrightarrow \|f_m - f_n\|_p \leq 1/2^k$ であるように選ぶ。

問 2.25. 測度空間の間の同型が、L^p 空間の等長同型を引き起こすこと。

定義 2.10. 距離空間 (X,d) の部分集合 D が、X で**密**[*7] (dense) であるとは、$\overline{D}=X$ となること。距離空間は、可算密部分集合をもつとき、**可分**[*8] (separable) であるという。ノルム空間については、付随する距離に関してこの用語を使う。

問 2.26. ℓ^p $(1\le p\le\infty)$ が可分かどうか調べよ。

次は直感的に明らかであろうが、その証明はどうか。

問 2.27. 距離空間においては、可分であることと位相空間として第二可算公理を満たすことは同じこと。とくに距離空間 X が可分であれば、その部分空間 $Y\subset X$ も可分。

Remark 2. $L^p(\Omega)$ はルベーグ空間 (Lebesgue space) と称されるが、ℓ^p ともども導入したのは F. Riesz (1910) であるらしい。

課題 3. コンパクト距離空間 K に対して、バナッハ空間 $C(K)$ は可分である。

ノルム空間の完備化：存在と一意性[*9]

完備でないノルム空間は、極限点を追加して**完備化**することで、バナッハ空間に拡充することができる。

完備化の存在：V の距離空間としての完備化[*10]をまず考える。ノルム空間内のコーシー列 $\{v_n\}_{n\ge1}$ 全体の集合における同値関係を

$$\{u_n\}\sim\{v_n\}\iff\lim_{n\to\infty}\|u_n-v_n\|=0$$

で定め、その同値類全体の集合を $\overline{V}$ と書き、$\{v_n\}$ の属する同値類を $\overline{v}$ で表す。また、$v\in V$ に対して、$v_n=v$ であるコーシー列 $\{v_n\}$ の定める同値類を $\phi(v)$ とする。

次に $\overline{V}$ における和とスカラー倍を $\overline{u}+\overline{v}=\overline{u+v}$, $\lambda\overline{v}=\overline{\lambda v}$ により定めることで、$\overline{V}$ はベクトル空間となる。また、ベクトル空間 $\overline{V}$ におけるノルムが $\|\overline{v}\|=\lim_{n\to\infty}\|v_n\|$ によって定められる。

写像 $\phi:V\to\overline{V}$ は線型で、$\|\phi(v)\|=\|v\|$ をみたし、その像は $\overline{V}$ で密である。最後に、$\overline{V}$ は、距離空間としての V の完備化に一致するので、完備である。

[*7] 稠密（ちゅうみつ）ともいう。density は密性・密度と訳し分ける。「濃い」とか「濃さ」で良いような。

[*8] 可算分離可能 (countably separable) の略なのであろう、多分。

[*9] 業界の慣用である「一意性」は変な用語である。意味が一つしかないというのは、数学の命題である以上、当然ではないか。しかし、習慣で使ってしまうかな、一意性。

[*10] 距離空間の完備化を経ずに、V の二重双対 (second dual) V^{**} を使って構成することもできる。

完備化の一意性：その前に用語の復習をしておく。ノルム空間 V からノルム空間 W へのベクトル空間としての同型写像 $\Phi : V \to W$ で $\|\Phi(v)\| = \|v\|$ $(v \in V)$ であるものをノルム空間の同型写像というのであった。両者がバナッハ空間である場合には、バナッハ空間の同型写像ともいう。

さて、完備化の一意性は次のように述べられる。別の完備化 $\phi' : V \to V'$ があれば、バナッハ空間の同型写像 $\Phi : \overline{V} \to V'$ で、$\Phi \circ \phi = \phi'$ をみたすものがちょうど一つだけ存在する。

問 2.28. ノルム空間の完備化の唯一性の証明を与えよ。

問 2.29. ノルム空間の等長同型 $\Phi : V \to W$ は、バナッハ空間の等長同型 $\overline{V} \to \overline{W}$ に拡張され、拡張の仕方はただ一つである。

問 2.30. ベクトル空間 V における同値なノルムに関する完備化の結果得られるベクトル空間は、同一のベクトル空間である。

バナッハ空間 W の線型部分空間 V に対して、完備化の一意性により、V の完備化は、V の W における閉包と同一視される。

少し話題を変えて、微分作用素の解析でよく使われるものに、Sobolev 空間というものがある。自然数 n に対して、$C^n(\Omega)$ で、開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を定義域にもつ複素数値 C^n 級関数全体を表す。

$$C^{n,p}(\Omega) = \{f \in C^n(\Omega); \sum_{|\alpha| \leq n} \int_\Omega |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx < \infty\}$$

とおき、これを Sobolev ノルム

$$\|f\|_{n,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq n} \int_\Omega |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

に関して完備化したバナッハ空間を**ソボレフ空間** (Sobolev space) と呼び $W^{n,p}(\Omega)$ で表す。上で見てきたことから $W^{0,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ であるが、次の節でわかるように等号が成り立つので、ソボレフ空間はルベーグ空間の拡張になっている。

3　たたみ込みと近似定理

目標は、ユークリッド空間上のルベーグ可積分関数に対する各種近似定理である。扱うのは主としてルベーグ空間 $L^p(\mathbb{R}^d)$ であるが、その様子は、$p = \infty$ であるかないかで大分異なる。一言で言えば、$L^\infty(\mathbb{R}^d)$ はいろいろな意味で大きい。より小さいものとして有界連続関数の作るバナッハ空間 $C_b(\mathbb{R}^d)$ があるが、これでもまだ大きい。さらに小さいものとして、

$$C_0(\mathbb{R}^d) = \{f \in C(\mathbb{R}^d); \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0\}$$

を考えると、これは $C_b(\mathbb{R}^d)$ の閉部分空間となる。

問 3.1. このことと $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ に対する等式 $\|f\| = \max\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}^d\}$ を確かめよ。

位相空間 X の上で定義された関数 f の**支え**[*11] (support) を

$$[f] = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$$

で定める。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の開集合 Ω に対して、

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); [f] \text{ is compact}\}$$

とおき、$C_c(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ とみなす。

問 3.2. 連続関数 $f \in C(\Omega)$ が $|\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}| = 0$ を満たせば、$f(x) = 0$ $(\forall x \in \Omega)$ である。

例 3.1. $C_c(\mathbb{R}^d)$ は $C_0(\mathbb{R}^d)$ で密 (dense) である。いいかえると、$C_0(\mathbb{R}^d)$ は、$C_c(\mathbb{R}^d)$ を一様収束のノルムで完備化したものに一致する。実際、連続関数 $0 \leq \theta_n(x) \leq 1$ で、

$$\theta_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq n, \\ 0 & \text{if } |x| \geq n+1 \end{cases}$$

なるものを用意して $f_n(x) = \theta_n(x) f(x) \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ とおくと、$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ である。

次の事実は、ルベーグ測度の位相的な性質[*12]を反映するものである（証明については、付録参照)。

[*11] support に対する訳語としては台というのが一般的であるが、これだと動詞ないし形容詞的な使い方に難点がある。「支え」だと、「支えられた」、「支える」など、いかようにでも活用できる。

[*12] これは小森の三原則の一つで、本来ルベーグ積分で済ませておくべき内容である。

定理 3.2. 開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ に対して、ベクトル空間 $C_c(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ $(1\le p<\infty)$ の中で密である。とくに、$L^p(\Omega)$ は、$C_c(\Omega)$ のノルム $\|\ \|_p$ に関する完備化と同じもの。

問 3.3. $C_c(\Omega)$ をノルム $\|\ \|_\infty$ で完備化したものを関数空間として記述せよ。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の可測関数 $f,\,g$ に対して、

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\,dy$$

とおき、f と g の**たたみ込み**[*13] (convolution) と呼ぶ。ただし、右辺の積分は、ほとんどすべての $x\in\mathbb{R}^d$ で絶対収束するものとし、たたみ込みで得られた関数はルベーグ可測となる[*14]ので測度論的同一視を行う。定義から、$f*g=g*f$ であることに注意。

例 3.3. $f,\,g$ を有界可測集合 $A,\,B$ の支持関数[*15] $1_A,\,1_B$ とするとき、$(f*g)(x)=|(x-A)\cap B|$ $(x\in\mathbb{R}^d)$ である。

問 3.4. 関数 $f_y(x)=f(x-y)$ の支えが $[f_y]=[f]+y$ であることに注意して、$[f*g]\subset\overline{[f]+[g]}$ を示せ。ただし、$[f]+[g]=\{a+b;a\in[f],b\in[g]\}$ である。

微分の関数解析的見方：関数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ が、$x=a$ で微分可能とは、あるベクトル $f'(a)\in\mathbb{R}^n$ が存在して、

$$f(a+y)=f(a)+f'(a)\cdot y+o(|y|)$$

となること。このとき、f は $x=a$ で偏微分可能であり、

$$f'(a)=(D_1f(a),D_2f(a),\dots,D_nf(a)),\quad D_k=\frac{\partial}{\partial x_k}$$

となる。

命題 3.4.

(i) $f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ とすると、$f*g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ であり、

$$\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1.$$

さらに、$h\in L^1(\mathbb{R}^d)$ であれば、結合律 $(f*g)*h=f*(g*h)$ が成り立つ。

---

*13 convolution の訳語としては、他に合成積もよく使われる。
*14 可測関数の変域・値域カットで得られる L^2 関数による押え込み近似と下の命題 (iv) を使えばわかる。
*15 indicator (指示するもの) の意訳。$1_A(x)=1$ if $x\in A$ and $=0$ otherwise.

(ii) $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ であれば、$f * g \in C_b(\mathbb{R}^d)$ であり、

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

さらに $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ から $f * g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ が従う。

(iii) 有界連続関数 $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ が、k 成分に関して偏微分可能であり、$D_k f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ であれば、$f * g$ も k 成分に関して偏微分可能となり、

$$D_k(f * g) = (D_k f) * g.$$

これと *(ii)* から $D_k(f * g) \in C_b(\mathbb{R}^d)$ である。

(iv) $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ のとき、$f * g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ であり、

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2.$$

Proof. (i)

$$\int \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx = \int \left(\int |f(x-y)g(y)| dx \right) dy = \|f\|_1 \, \|g\|_1 < \infty$$

より、ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $f(x-y)g(y)$ は可積分であり、積分結果である $f * g$ も可積分で、(i) の不等式が成り立つ。結合律も、重積分の順序が交換できること (Fubini の定理) からわかる。

(ii) は不等式がまずわかり、それから押え込み収束定理[*16] により $f * g$ の連続性がわかる。$f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ のとき $f * g$ が無限遠方で消えることも、押え込み収束定理からわかる。

(iii) は、

$$\begin{aligned}
&\frac{(f * g)(x + te_k) - (f * g)(x)}{t} - (D_k f * g)(x) \\
&\qquad\qquad = \int \left(\frac{(f(x - y + te_k) - f(x-y)}{t} - (D_k f)(x-y) \right) g(y) \, dy
\end{aligned}$$

という表示式に

$$f(x - y + te_k) - f(x-y) = t \int_0^1 D_k f(x - y + ute_k) \, du.$$

[*16] 各点収束する可測関数列 $\{f_k\}$ が、可積分関数 g で $|f_k(x)| \leq g(x)$ のように押えられていれば、

$$\lim_{k \to \infty} \int f_k(x) \, dx = \int \lim_{k \to \infty} f_k(x) \, dx.$$

を代入したものが、

$$\int dy\, g(y) \int_0^1 du\, (D_k f(x-y+ute_k) - D_k f(x-y))$$

の形になり、ここで $D_k f$ の有界性と連続性に注意して押え込み収束定理を使うと、

$$\lim_{t\to 0} \int dy\, g(y) \int_0^1 du\, (D_k f(x-y+ute_k) - D_k f(x-y)) = 0$$

となることからわかる。

(iv) シュワルツの不等式を使って

$$\int |f(x-y)g(y)|\, dy \le \left(\int |f(x-y)|^2\, dy\right)^{1/2} \left(\int |g(y)|\, dy\right)^{1/2} = \|f\|_2\, \|g\|_2$$

である。$f*g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ であることは、近似関数 $f_\epsilon, g_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^d)$ を $\|f-f_\epsilon\|_2 \le \epsilon$, $\|g-g_\epsilon\|_2 \le \epsilon$ のように取って、

$$\|f*g - f_\epsilon * g_\epsilon\|_\infty \le \|f-f_\epsilon\|_2\, \|g\|_2 + \|f_\epsilon\|_2\, \|g-g_\epsilon\|_2 \le \|g\|_2\epsilon + (\|f\|_2+\epsilon)\epsilon$$

と評価してやる。$f_\epsilon * g_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^d)$ であるから、それの一様極限として、$f*g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ であることが分かる。 □

問 3.5. (ii) の証明では、積分の収束定理を用いたが、(iv) の証明で使った「しっぽ切り」により、直接示すことも可能である。これを試みよ。

Remark 3. $p,q,r \in [0,\infty]$ が $1/p+1/q = 1+1/r$ をみたすとする。$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ に対して、$f*g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ であり、Young の不等式 $\|f*g\|_r \le \|f\|_p\, \|g\|_q$ が成り立つ。(Reed-Simon II §9.4 参照。)

連続関数列 $\{0 \le \delta_n \in C_0(\mathbb{R}^d)\}_{n\ge 1}$ で、

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \delta_n(x)dx = 1$,

(ii) $\displaystyle\forall\epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\ge\epsilon} \delta_n(x)dx = 0$

となるものを**近似デルタ関数** (approximate delta function) という。

このような関数列は色々あって、例えば

$$\delta_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{I_n}(1-|x|^2)^n & \text{if } |x| \le 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

がそうである（付録 C 参照)。ここで、$I_n = \int_{|x|\le 1}(1-|x|^2)^n dx$ と置いた。

他にも、

$$\delta_n(x) = n^d \rho(nx),$$

ただし、$0 \le \rho \in C_0(\mathbb{R}^d)$ は $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$ を満たす、など。

問 3.6. 2つ目の例が近似デルタ関数であることを確かめよ (実感せよ)。

問 3.7. $d=1$ の場合に、

(i) 部分積分を使って

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}, \quad I_n = \frac{2}{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$$

を示せ。

(ii) Stirling の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ を使って、

$$I_n \sim \frac{2}{2n+1}\sqrt{\pi n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

を示せ。

例 3.5. 全解析的な ρ を2つほど。

(i) $\rho(x) = \pi^{-d/2} e^{-|x|^2}$ $(x \in \mathbb{R}^d)$.

(ii) $\rho(x) = \frac{1-\cos x}{\pi x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

問 3.8. 関数 $f = 1_{[-a,a]}$ のフーリエ変換を求め、上の 2 つ目の ρ の積分値が 1 であることを示せ。

問 3.9. 関数

$$h(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{if } |x| < 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

は、$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属することを確かめよ。したがって、これからスケール変換で得られる近似デルタ関数も $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する。

補題 3.6. $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ は一様連続である。すなわち、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-y| \le \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \le \epsilon.$$

Proof. どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても、$r > 0$ を大きく取れば、$|x| \geq r \Longrightarrow |f(x)| \leq \epsilon$ とできる。そして、$f(x)$ の $|x| \leq r + \epsilon$ での一様連続性により、$0 < \delta \leq \epsilon$ を十分小さく選んでおけば,

$$|x - y| \leq \delta, |x| \leq r + \epsilon, |y| \leq r + \epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

が成り立つ。$|x - y| \leq \delta \leq \epsilon$ ではあるが、$|x| \geq r + \epsilon$ のときは、$|y| \geq |x| - |x - y| \geq r$ となるので、

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2\epsilon$$

が成り立つ。$|y| \geq r + \epsilon$ のときも同様。 □

系 3.7. $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ と $y \in \mathbb{R}^d$ に対して、$f_y(x) = f(x - y)$ とおくと、

$$\mathbb{R}^d \ni y \mapsto f_y \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

は連続である。

命題 3.8. 近似デルタ関数 $\{\delta_n\}$ を用意する。

(i) $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ に対して、$\delta_n * f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ であり、

$$\lim_{n\to\infty} \|\delta_n * f - f\|_\infty = 0.$$

(ii) $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対して、$\delta_n * f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ であり、

$$\lim_{n\to\infty} \|\delta_n * f - f\|_1 = 0.$$

Proof. (i) 前半は命題 3.4 (ii) による。後半は、$f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ の一様連続性を使って、

$$\begin{aligned}
|(\delta_n * f)(x) - f(x)| &\leq \int \delta_n(y)|f(x - y) - f(x)|dy \\
&= \int_{|y|\geq r} \delta_n(y)|f(x - y) - f(y)|\,dy + \int_{|y|<r} \delta_n(y)|f(x - y) - f(y)|\,dy \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int_{|y|\geq r} \delta_n(y)dy + \epsilon \int_{|y|<r} \delta_n(y)dy \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int_{|y|\geq r} \delta_n(y)dy + \epsilon
\end{aligned}$$

よりわかる。

(ii) 同じく前半は命題 3.4 (i) による。$L^1(\mathbb{R}^d)$ が $C_c(\mathbb{R}^d)$ によって近似されることと不等式 $\|\delta_n * f\|_1 \le \|\delta_n\|_1 \|f\|_1 = \|f\|_1$ より、$f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ の場合がわかればよい。正数 $\epsilon > 0$ に対して、

$$[f]_\epsilon = \overline{\{y \in \mathbb{R}^d; \exists x \in \mathbb{R}^d, f(x) \neq 0, |x-y| \le \epsilon\}} = \overline{\bigcup_{f(x)\neq 0} B_\epsilon(x)}$$

とおく。これは、f の支え $[f]$ を ϵ だけ膨らませたものになっている。したがって、$f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ならば、$[f]_\epsilon$ もコンパクト。あとは、次のように評価して、最後の項に f の一様連続性を使う。

$$\begin{aligned}\int |(\delta_n * f)(x) - f(x)|\,dx &\le \int \delta_n(y) \int |f(x-y) - f(x)|\,dxdy \\ &= \int_{|y|\ge\epsilon} \delta_n(y)\,dy \int dx\,|f(x-y) - f(x)| \\ &\qquad + \int_{|y|\le\epsilon} \delta_n(y)\,dy \int dx\,|f(x-y) - f(x)| \\ &\le 2\|f\|_1 \int_{|y|\ge\epsilon} \delta_n(y)\,dy \\ &\qquad + \big|[f]_\epsilon\big| \sup_{|y|\le\epsilon}\{\|f_y - f\|_\infty\} \int_{|y|\le\epsilon} \delta_n(y)\,dy \\ &\le 2\|f\|_1 \int_{|y|\ge\epsilon} \delta_n(y)\,dy + \big|[f]_\epsilon\big| \sup_{|y|\le\epsilon}\{\|f_y - f\|_\infty\}.\end{aligned}$$

□

Remark 4. ここで取り上げた近似デルタ関数は、Friedrichs の mollifier（柔軟化作用素）として知られているものでもあるが、Sobolev の方が早くから使っていたこと、それよりも前に Dirac が量子力学の有名な教科書でデルタ関数の解釈として（実質的に）導入してあるのを踏まえて、あえて一般的でない名称を使った。最近の教科書では、これを approximate identity と呼ぶ向きもあるが、それと比較してなお approximate delta function は示唆的であろう。なお、この古典を読めば、Dirac がいかに線型代数に通暁していたか、のみならず、関数解析的見方をしていたかが良くわかる。Gibbs のベクトル解析の本と並ぶ驚異的なものであるが、もったいなくも、数学の学生は読まぬのだろうなあ。

P.M.A. Dirac, Principles of Quantum Mechanics (1930).

S. Sobolev (1938), K.O. Friedrichs (1944).

問 3.10. バナッハ環 $L^1(\mathbb{R}^d)$ は単位元を持たないことを示せ。

問 3.11. バナッハ空間 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ に、たたみ込みの積を導入し、バナッハ環になることを示せ。また、単位元の有無について調べよ。

問 3.12 (F. Riesz)**.** 距離空間 (X, d) のコンパクト部分集合 K 上で定義された連続関数 $h : K \to [0, \infty)$ に対して、

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{if } x \in K, \\ d(x, K) \max\left\{ \frac{h(y)}{d(x,y)}; y \in K \right\} & \text{if } x \notin K \end{cases}$$

は X 上の連続関数となる。ここで、$d(x, K) = \min\{d(x, y); y \in K\}$ である。

定理 3.9 (Weierstrass の近似定理)**.** 連続関数 $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ と有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対して、$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ の多項式関数の列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ で、

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_K = 0$$

となるものが存在する。ただし、$\|f\|_K = \max\{|f(x)|; x \in K\}$ である。

Proof. どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても、多項式 $p(x)$ で $\|f - p\|_K \leq \epsilon$ となるものを見つけてくればよい。$r > 0$ を十分大きくとってきて $|f(x)| \leq \epsilon$ $(|x| \geq r)$ かつ $K \subset \overline{B}_r(0)$ とする。そうして、$f = g + h$ $(\|g\| \leq \epsilon$, $[h] \subset B_r(0))$ と分解しておく。

これに対して、$|x| \leq 2r$ に局在した近似デルタ関数 δ_n を

$$\delta_n(x) = \frac{1}{I_n} \left(1 - \frac{|x|^2}{(2r)^2} \right)^n \quad (|x| \leq 2r)$$

で定め、さらに n を大きく取って $\|\delta_n * h - h\| \leq \epsilon$ とすると、$|x| \leq r$ のとき、

$$(\delta_n * h)(x) = \int_{|y| \leq r} \delta_n(x - y) h(y)\, dy = \frac{1}{I_n} \int_{|y| \leq r} \left(1 - \frac{|x - y|^2}{(2r)^2} \right)^n h(y)\, dy$$

は x の多項式であり、

$$\|f - \delta_n * h\|_K \leq \|f - \delta_n * h\| \leq \|f - h\| + \|h - \delta_n * h\| \leq 2\epsilon$$

となる。 □

系 3.10. 1次元トーラス $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ 上の連続関数 f は、z の *Laurent* 多項式により一様近似される。言い換えると、周期 2π の連続周期関数 $f(\theta)$ に対して、f を一様近似するフーリエ多項式

$$\sum_{|k| \leq N} f_k e^{ik\theta}$$

が存在する。

系 3.11. 有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対して、バナッハ空間 $C(K)$ は可分である。

問 3.13. 有理（複素）数係数の多項式全体を考えることで、これを示せ。

例 3.12. 関数 $f(t) = \sqrt{1-t}$ $(|t| \leq 1)$ が多項式で近似される様子を具体的に確かめよう。テーラー展開を

$$f(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \cdots$$

とすると、$c_n = -f^{(n)}(0)/n! > 0$ であるので、$0 < t < 1$ に対して、

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k t^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k = 1 - \sqrt{1-t} \leq 1$$

という不等式が成り立つ。そこで極限 $t \to 1-0$ をとれば

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \lim_{t \to 1-0} \sum_{k=1}^{n} c_k t^k \leq 1$$

が分かり、次に $n \to \infty$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \leq 1$$

を得る。したがって $f_n(t) = 1 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ は $[-1, 1]$ において連続関数 f_∞ に一様収束する。一方、$f_\infty(t) = f(t)$ $(|t| < 1)$ であるが、両者はともに $[-1, 1]$ 上の連続関数であることから $f_\infty(t) = f(t)$ $(-1 \leq t \leq 1)$ 。

問 3.14. $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots = 1$ および $c_1 + c_3 + \cdots = 1/\sqrt{2}$ である。

近似デルタ関数を $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ から取ってくることで、次がわかる。

命題 3.13. $1 \leq p < \infty$ に対して、$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ は、$L^p(\mathbb{R}^d)$ で密である。

問 3.15. 定理 3.2 に注意して、これを確かめよ。また、$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ の $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ における閉包を同定せよ。（∞ の意味が異なっているので、混乱せぬよう。）

近似定理の応用として、一様分布に関するワイルの判定法について紹介しよう。区間 $[0, 1)$ に値をとる数列 $(x_n)_{n \geq 1}$ が一様分布であるとは、$0 \leq b \leq 1$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sharp\{k \in \mathbb{N}; k \leq n, x_k \leq b\} = b$$

が成り立つことを言う。このとき、$0 \leq a < b \leq 1$ について、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sharp\{k \in \mathbb{N}; k \leq n, a < x_k \leq b\} = b - a$$

となることに注意。これは、$1, 2, \cdots, n$ の中で $x_k \in (a, b]$ となるものの割合が n を大きくすると $b - a$ に近づくということで、一様分布という名称の由来となっている。

定理 3.14 (Weyl, 1916)**.** 区間 $[0, 1)$ における数列 $(x_n)_{n \geq 1}$ について、以下は同値。

(i) 一様分布である。

(ii) $[0, 1]$ 上の連続関数 f に対して、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

(iii) 整数 $l \neq 0$ に対して、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i l x_j} = 0$$

Proof. (ii) における左辺の極限を取る前の式を $R_n(f)$ で表すと、$|R_n(f)| \leq \|f\|$ である。ということで、証明は関数解析的である。

(i) $\Longrightarrow$ (ii): f は実数値連続関数として良い。自然数 $1 \leq k \leq m$ に対して、

$$g_m(k) = \min\{f(x); x \in [(k-1)/m, k/m]\}, \quad h_m(k) = \max\{f(x); x \in [(k-1)/m, k/m]\}$$

と置いて、$[0, 1]$ 上の関数列を

$$g_m = \sum_{k=1}^{m} g_m(k) 1_{((k-1)/m, k/m]}, \quad h_m = h_m(1) 1_{[0,1/m]} + \sum_{k=2}^{m} h_m(k) 1_{((k-1)/m, k/m]}$$

で定めると、$g_m \leq f \leq h_m$ であり、

$$\underline{S}_m(f) \leq \liminf R_n(f) \leq \limsup R_n(f) \leq \overline{S}_m(f)$$

となるので、$m \to \infty$ とすれば (ii) がわかる。ここで、$S_m(f)$ はダルブー和を表す。

(ii) $\Longrightarrow$ (i): $g \leq 1_{[0,b]} \leq h$ なる連続関数 $0 \leq g, h \leq 1$ に対して成り立つ

$$\int_0^1 g(x)\, dx \leq \liminf R_n(1_{[0,b]}) \leq \limsup R_n(1_{[0,b]}) \leq \int_0^1 h(x)\, dx$$

において、$g \uparrow 1_{[0,b]}$, $h \downarrow 1_{[0,b]}$ とすると、$\lim_n R_n(1_{[0,b]}) = b$ を得る。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): $f(x) = e^{2\pi i l x}$ と置く。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): (iii) から f がフーリエ多項式のときに (ii) が成り立つ。一般の連続関数 f については、f を一様近似するフーリエ多項式 p を用意して、

$$\begin{aligned}|R_n(f) - \int_0^1 f(x)\,dx| &\leq |R_n(f) - R_n(p)| + |R_n(p) - \int_0^1 p(x)\,dx| + |\int_0^1 (p(x) - f(x))\,dx| \\ &\leq 2\|f - p\| + |R_n(p) - \int_0^1 p(x)\,dx|\end{aligned}$$

と評価すればわかる。 □

系 3.15 (Weyl, 1909)**.** 無理数 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して、$(n\theta - [n\theta])_{n\geq 1}$ は一様分布である。ただし、$n\theta - [n\theta]$ は正数 $n\theta$ の小数部分を表す。

問 3.16. 系を確かめよ。

Remark 5. 無理数 θ に対して $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ が $\mathbb{R}$ で密であること (Kronecker, 1884) よりも強いことを主張している。

4 ヒルベルト空間の幾何学

複素ベクトル空間 V に対して、$V \times V$ 上で定義された複素数値関数 $V \times V \ni (v, w) \mapsto (v|w) \in \mathbb{C}$ で、w について線型、v について共役線型であるものを**両線型形式**[*17] (sesquilinear form) という。さらに条件 $\overline{(v|w)} = (w|v)$ を満たすものを**エルミート形式** (hermitian form), エルミート形式で、$(v|v) \geq 0$ であるものを**正値形式** (positive semidefinite form)、さらに $(v|v) > 0$ ($v \neq 0$) であるものを**正定値形式** (positive definite form) という。形式だらけだ。正定値形式は**内積** (inner product) ともいう。また、正値形式という代わりに半内積という言い方もする。内積が指定されたベクトル空間を**内積空間** (inner product space) あるいは前ヒルベルト空間 (pre-Hilbert space) という。この辺りは基本的に、線型代数の世界である。

命題 4.1 (内積不等式[*18])**.** ベクトル空間 V 上の半内積 $(v|w)$ に対して、

$$|(v|w)|^2 \leq (v|v)\,(w|w).$$

[*17] sesquilinear の適訳がない！そもそも sesqui= 1 + 1/2 なので、これも勘定が合わぬ。$1 + \bar{1}$ といった感じのものなので。両の意味は、両親、両手の如く、相い対する二つ。ちなみに、双は同じものが二つ。
[*18] コーシー・シュワルツの不等式とも呼ばれる。

Proof. 二次不等式を使って証明することが多いのであるが、次のようにピタゴラスによるのが簡明である。直交分解

$$w = \frac{(v|w)}{(v|v)}v + \left(w - \frac{(v|w)}{(v|v)}v\right)$$

から、

$$(w|w) \geq \frac{|(v|w)|^2}{(v|v)^2}(v|v) = \frac{|(v|w)|^2}{(v|v)}.$$

□

半内積に対して、$\|v\| = \sqrt{(v|v)}$ とおけば、$\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ $(\lambda \in \mathbb{C}, v \in V)$ であり、内積不等式から $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ がわかるので、内積空間はノルム空間でもある。完備な内積空間を**ヒルベルト空間** (Hilbert space) と呼ぶ。

例としては、数列空間 ℓ^2 と関数空間 $L^2(\Omega, \mu)$, $W^{n,2}(\Omega)$ を挙げておく。$L^2(\Omega, \mu)$ の特殊なものとして、$L^2(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\mathbb{T})$, $L^2(S^n)$ などもヒルベルト空間である。

問 4.1. 内積は、内積から定まるノルムに関して連続である。すなわち、

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi - \xi_n\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\eta - \eta_n\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\xi|\eta) = \lim_{n\to\infty} (\xi_n|\eta_n)$$

である。問 2.4 を参照の上、これを確かめる。

命題 4.2. 内積空間の完備化は再び内積空間になり、したがってヒルベルト空間である。

問 4.2. これを確かめよ。人の証明を読むまでもなく、自分で書き下す類のもの。

ヒルベルト空間の元 $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ が**直交**する (orthogonal) とは、$(\xi|\eta) = 0$ であること。したがって、ゼロベクトル 0 は、任意のベクトルと直交することになる。さらに、ヒルベルト空間の部分集合 $S \subset \mathcal{H}$ に対して、

$$S^\perp = \{\xi \in \mathcal{H}; (\xi|\eta) = 0 \ \forall \eta \in S\}$$

とおく。集合 $S^\perp$ はヒルベルト空間の閉部分空間である。

ベクトルの集団 $\{e_j\}_{j\in J}$ で、

$$(e_j|e_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるものを、**正規直交系** (orthonormal system) という。正規直交系がさらに条件

$$\{e_j; j \in J\}^\perp = \{0\}$$

をみたすとき、**正規直交基底** (orthonormal basis) と呼ぶ。この最後の条件は、$\{e_j\}$ から代数的に生成された部分空間 $\displaystyle\sum_{j\in J}\mathbb{C}e_j$ が $\mathcal{H}$ で密であれば、満たされることに注意する。すぐ後でみるように、この逆も成り立つ。

命題 4.3. ヒルベルト空間の正規直交基底は必ず存在する。（全然一意的ではないが。）

Proof. 基本的なアイデアは Gram-Schmidt の直交化であるが、正式には Zorn の補題を使う。各自、確かめよ。 □

正規直交基底の濃度を考えているヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の**次元** (dimension) といい、$\dim\mathcal{H}$ で表す。正規直交基底の濃度は正規直交基底のとり方によらないのであるが、その確認には多少の議論を要する。以下ではとくに断らない限り可算次元のヒルベルト空間を扱うものとする。

例 4.4. ヒルベルト空間 ℓ^2 で、ベクトル列、

$$e_n = (0,\dots,0,1,0\dots)$$

は正規直交基底（標準基底と言う）を与える。とくに $\dim\ell^2 = \aleph_0$ (可算無限) である。

例 4.5. ヒルベルト空間 $L^2(-\pi,\pi)$ において、関数系

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos nt + i\sin nt), \quad n = 0,\pm1,\pm2,\dots$$

は正規直交基底をなす。（１次元トーラス上の関数と Weierstrass の近似定理。）

問 4.3.

(i) 三角関数 $\cos nt, \sin nt$ $(n = 1,2,\dots)$ を上の基底の線型結合として表せ。

(ii) 関数列

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \dots\right\}$$

は、$L^2(-\pi,\pi)$ の正規直交基底であることを示せ。

問 4.4. $L^2[0,1]$ 内の関数列 (Walsh function) $\{w_n\}_{n\geq 0}$ を

$$w_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n\pi t)), \quad 0\leq t\leq 1$$

で定める。

(i) $\{w_n\}_{n\geq 0}$ は正規直交基底をなす。

(ii) 有限集合 $\emptyset \neq F \subset \{1,2,3,\dots\}$ に対して、$\displaystyle\int_0^1 \prod_{n\in F} w_n(t)\,dt = 0$ である。

グラム・シュミットの直交化 (Gram-Schmidt orthogonalization)

Ω と μ を以下のようにとった場合のヒルベルト空間 $L^2(\Omega,\mu)$ において、x^n の定義域を Ω に制限した関数列 $\{1,x,x^2,\dots\}$ にグラム・シュミットの直交化を施すと、一連の**直交多項式** (orthogonal polynomial) が（定数倍の違いを除いて）得られる。

有限区間の場合　$\Omega = (-1,1)$, $\mu(dt) = (1+t)^\alpha(1-t)^\beta\,dt$ $(-1<t<1)$、ただし $\alpha>-1$, $\beta>-1$ である。ヤコビの直交多項式 (Jacobi polynomial) $J_n(t)$。とくに、$\alpha=\beta=0$ のとき、Legendre 多項式、$\alpha=\beta=-1/2$ のとき、Chebyshev 多項式。

半直線の場合　$\mu(dt) = e^{-t}dt$ $(t>0)$. Laguerre 多項式。

直線の場合　$\mu(dt) = e^{-t^2}dt$ $(t\in\mathbb{R})$. Hermite 多項式。

このようにして作られた直交多項式は、$L^2(\Omega,\mu)$ での正規直交系を与える。

問 4.5. ヤコビの直交多項式は、正規直交基底を与える。関数 $f\in C_c(-1,1)$ に対して、$f(t)/(1-t^2)$ を多項式近似することで、これを確かめよ。

ラゲール多項式、エルミート多項式も基底をなすのであるが、このことを示すためには、さらに工夫がいる。のちほど、フーリエ変換を使って確かめよう。

問 4.6. 多項式近似定理が単純には機能しない理由を認識せよ。

グラム・シュミットの直交化から、次のこともわかる。

命題 4.6. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が可分であれば、$\mathcal{H}$ の基底で可算個のベクトルからなるものが存在する。

定理 4.7. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ を用意すると、$\xi\in\mathcal{H}$ は

$$\xi = \sum_{n=1}^\infty (e_n|\xi)e_n$$

と表わされ、**内積等式** *(Parseval's equality)*

$$(\xi|\eta) = \sum_{n=1}^\infty (\xi|e_n)(e_n|\eta)$$

が成り立つ。

Proof. まず、

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

なる表示が可能であれば、$x_k = (e_k|\xi)$ であることに注意。

自然数 n に対して、$\xi_n = \sum_{k=1}^{n}(e_k|\xi)e_k$ とおくと、

$$(\xi|\xi_n) = \sum_{k=1}^{n}(e_k|\xi)(\xi|e_k) = (\xi_n|\xi_n)$$

となって、内積不等式より $\|\xi_n\| \leq \|\xi\|$ が成り立つ。これに上の等式を代入して極限 $n \to \infty$ を取ると、**ベッセル不等式** (Bessel's inequality)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k|\xi)|^2 \leq \|\xi\|^2$$

を得る。これを、等式 $\|\xi_m - \xi_n\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |(e_k|\xi)|^2$ の右辺に適用すれば、

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\xi_m - \xi_n\|^2 \leq \lim_{m,n\to\infty} |(e_k|\xi)|^2 = 0$$

がわかる。すなわち、 $\{\xi_n\}$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ におけるコーシー列である。完備性により $\xi_\infty = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ が存在するので、あとは $\xi = \xi_\infty$ がわかればよい。ここで、関係 $(e_k|\xi_n) = (e_k|\xi)$ for $n \geq k$ に注意すれば、

$$(e_k|\xi - \xi_\infty) = \lim_{n\to\infty}(e_k|\xi - \xi_n) = 0$$

が勝手な $k \geq 1$ に対して成り立つので、ベクトル $\xi - \xi_\infty$ は全ての $\{e_k\}_k$ と直交し、正規直交基底の性質から、$\xi = \xi_\infty$ である。

内積等式については、$\eta \in \mathcal{H}$ も $\eta = \sum_{k=1}^{\infty}(e_k|\eta)e_k$ と表して、

$$(\xi|\eta) = \lim_{n\to\infty}(\xi_n|\eta_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\xi|e_k)(e_k|\eta) = \sum_{k=1}^{\infty}(\xi|e_k)(e_k|\eta)$$

と計算すればよい。 □

系 4.8. 全ての（可分）ヒルベルト空間は、内積も込めて ℓ^2 と同型である[*19]。

[*19] ヒルベルト空間の没個性的性格（見かけは違っても、ヒルベルト空間は一つ）に注目。量子力学的な背景との関係が見え隠れしないか。

Remark 6. $L^p(\mathbb{R})$ が ℓ^p と等長同型であるかどうか気にならないか？実は、$p \neq 2$ では、次のことが知られていて、等長同型にはならない。

$\Phi : \ell^p \to L^p(\mathbb{R})$ が等長線型写像であれば、標準基底の像 $\{\Phi(e_n)\}$ は、互いに疎な集合で支えられている。(N.L. Carothers, A Short Course on Banach Space Theory, Cambridge University Press, 2005.)

ヒルベルト空間 $L^2(-\pi, \pi)$ の正規直交基底 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関する場合がとくに重要で、上の級数表示で変数を明示して、

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{int}, \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

と書き、関数 $f(t)$ の**フーリエ展開** (Fourier expansion) と称する。この級数表示は、一般に各点収束しないので不正確なものではあるが、象徴的な意味と思えばよい。$f(t)$ がなめらかな周期関数のときには、上の関数級数は一様収束することが知られている。（フーリエ解析の本を見よ。）

例 4.9. ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(-\pi, \pi)$ で関数 $\xi(t) = t$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$ についてそのフーリエ係数をもとめると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} t dt = \begin{cases} 2\pi i(-1)^n/n & \text{if } n \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるので、Parseval の等式は

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を意味する。

問 4.7. 関数 $\xi(t) = t^2$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$ について、Parseval の等式を計算すれば何が得られるか。

問 4.8. 内積空間 $L^2(0, \pi)$ で、$\{\cos nx\}_{n\geq 0}$ および $\{\sin nx\}_{n\geq 1}$ が直交基底を成すことを確かめ、基底の取り替えに伴うユニタリー行列を求めよ。

さて、一般的な状況に戻って、ヒルベルト空間の正規直交基底 $\{e_j\}_{j\in J}$ に対して、それから生成された代数的部分空間 $\sum_{j\in J} \mathbb{C}e_j$ が $\mathcal{H}$ で密であることを確かめよう。$\xi \in \mathcal{H}$ に対して、$J_\xi = \{j \in J; (e_j|\xi) \neq 0\}$ とおくと、上の定理の証明での議論を繰り返すことで

得られる $\displaystyle\sum_{j\in J_\xi}|(e_j|\xi)|^2 \leq (\xi|\xi)$ より、J_ξ は可算集合である。また、

$$\xi_\infty = \sum_{j\in J_\xi}(e_j|\xi)e_j \in \overline{\sum_{j\in J}\mathbb{C}e_j}$$

とおくと、$k \in J_\xi$ に対して、$e_k(\xi - \xi_\infty) = 0$ が成り立ち、一方 $k \notin J_\xi$ であれば $(e_k|\xi - \xi_\infty) = -(e_k|\xi_\infty) = 0$ であるから、$\xi - \xi_\infty \in \{e_j\}^\perp$ となって、$\xi = \xi_\infty$ である。

命題 4.10. 無限次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ について、次は同値である。

(i) 可分である。すなわち、可算部分集合で密なものが存在する。

(ii) 可算個のベクトルからなる正規直交基底が存在する。

このとき、すべての直交基底の添字集合は可算集合である。

Proof. (i) ⇒ (ii) は、Gram-Schmidt の直交化による。

(ii) ⇒ (i): 自然数を添字とする正規直交基底 $\{e_j\}_{j\geq 1}$ に対して、

$$\sum_{j\geq 1}(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})e_j$$

は、可算かつ密であることからわかる。

最後に、$\mathcal{H}$ は可算密部分集合 S をもつとする。正規直交基底 $\{e_j\}_{j\in J}$ に対して、$\xi_j \in S$ を $\|e_j - \xi_j\| \leq 1/2$ と選ぶと、$J \ni j \mapsto \xi_j \in S$ は単射である。実際、$j \neq k$ とすると、

$$\|\xi_j - \xi_k\| \geq \|e_j - e_k\| - \|\xi_j - e_j\| - \|\xi_k - e_k\| \geq \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - 1 > 0.$$

□

射影定理 (Projection Theorem)

ベクトル空間 V の部分集合 C で

$$x, y \in C \quad \Longrightarrow \quad tx + (1-t)y \in C \quad \text{for } 0 \leq t \leq 1$$

という条件をみたすものを**凸集合** (convex set) という。

問 4.9.

(i) ベクトル空間の部分空間およびそれを平行移動したものは、凸集合。

(ii) ノルム空間 V で、閉球、開球は凸集合。

(iii) ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ において、

$$\{(x,y); x^2+y^2<1\} \subset C \subset \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\}$$

である集合 C は凸集合。

補題 4.11 (中線定理 Parallelogram Law)**.** 内積空間のベクトル x, y に対して、

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

定理 4.12 (最短距離定理)**.** ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の凸閉集合 C と点 $y \in \mathcal{H}$ に対して、C 上の関数 $C \ni x \mapsto \|x-y\|$ を最小にする点 x が丁度一つ存在する。

Proof. 与えられた点 $y \notin C$ に対して、

$$\mu = \inf\{\|x-y\|; x \in C\}$$

とおくと、C 内の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ で $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| = \mu$ となるものが存在する。

このとき、$\{x_n\}$ は $\mathcal{H}$ のコーシー列である。というのは、

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\|^2 &= \|(x_m - y) - (x_n - y)\|^2 \\
&= 2\|x_m - y\|^2 + 2\|x_n - y\|^2 - 4\left\|\frac{x_m + x_n}{2} - y\right\|^2 \\
&\leq 2\|x_m - y\|^2 + 2\|x_n - y\|^2 - 4\mu^2 \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

そこで、ヒルベルト空間の完備性により、$x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ が存在する。

一方、C は閉集合であったから、$x_\infty \in C$ であり、

$$\|x_\infty - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| = \mu$$

となって、最小点の存在がわかる。

ひとつしかないことは、仮に最小点 $x \in C$ がもうひとつあったとすると、

$$\|x_\infty - x\|^2 = 2\|x_\infty - y\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\left\|\frac{x_\infty + x}{2} - y\right\|^2 \leq 2\mu^2 + 2\mu^2 - 4\mu^2 = 0$$

となって $x = x_\infty$ がわかる。 □

Remark 7. Clarkson の不等式というのを使えば、$L^p(\Omega, \mu)$ $(1 < p < \infty)$ でも最短距離定理が成り立つことがわかる。

定理 4.13 (直交分解定理)**.** ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 E に対して、全ての $x \in \mathcal{H}$ は

$$x = y + z, \quad y \in E,\ z \in E^\perp$$

と一意的に分解される。

Proof. E 上の関数

$$E \ni y' \mapsto \|y' - x\|^2$$

が $y \in E$ で最小値になったとする。このとき、$z = x - y \in E^\perp$ である。実際、任意のベクトル $a \in E$ に対して、２次関数

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \|y + at - x\|^2$$

は $t = 0$ で最小でなければならないので（$y' = y + ta$ と思う)、

$$(a|x-y) + (x-y|a) = 0, \quad \forall a \in E$$

となる。a を ia で置き換えると、これらから、$(a|x-y) = 0$ となって、$x - y \in E^\perp$ がわかる。一意性は、$E \cap E^\perp = \{0\}$ による。 □

系 4.14. ヒルベルト空間の線型部分空間 E に対して、$(E^\perp)^\perp = \overline{E}$ である。

Proof. $E^\perp = (\overline{E})^\perp$ に注意して、分解 $\mathcal{H} = \overline{E} + E^\perp$ を使う。 □

Remark 8. 直交分解は、最短距離定理とは無関係に、正規直交基底を使って直接的に示すことができる。実際、E の正規直交基底 $(e_i)_{i\in I}$ に対して、次のように置くだけである。

$$y = \sum_{i\in I} (e_i|x)e_i, \quad z = x - \sum_{i\in I}(e_i|x)e_i.$$

問 4.10. ヒルベルト空間 $L^2(-\pi,\pi)$ の直交系 $\{\sin nx\}_{n\geq 1}$ で張られる閉部分空間への射影 P は、$(Pf)(x) = (f(x) - f(-x))/2$ $(f \in L^2(-\pi,\pi))$ で与えられる。

問 4.11 (Schmidt)**.** $E = \langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ で $\{x_j\}$ が一次独立のとき、行列式を使って

$$z = \frac{\begin{vmatrix} x & x_1 & \dots & x_n \\ (x_1|x) & (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n|x) & (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) \end{vmatrix}}.$$

ヒルベルト空間の直和と線型作用素のグラフ： 2 つのヒルベルト空間 $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ に対して、その直和空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ に内積を

$$(\xi \oplus \eta | \xi' \oplus \eta') = (\xi|\xi') + (\eta|\eta')$$

で定めると完備であるので、$\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ はヒルベルト空間の構造をもつ。これをヒルベルト空間の直和という。閉とは限らない部分空間 $D \subset \mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型写像 T のグラフを

$$\Gamma(T) = \{\xi \oplus T\xi; \xi \in D\}$$

で定める。これは、$\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ の部分空間である。グラフ $\Gamma(T)$ が閉部分空間となる T を閉線型写像という。とくに $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ の場合は、**閉作用素** (closed operator) と呼ぶ。（閉集合を閉集合に写すという意味ではない！）

問 4.12. 複素ベクトル空間 V 上のノルム $\|\cdot\|$ が $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ $(x, y \in V)$ をみたすとき、

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\right)$$

は V の内積であることを確かめよ。

課題 4. ヒルベルト空間 $\ell^2 \oplus \ell^2$ の閉部分空間 E, F で、$E + F = \{x + y; x \in E, y \in F\}$ が閉集合にならないものを作れ。

5 線型汎関数

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V を考える。V 上の関数 $\varphi : V \to \mathbb{C}$ で、

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w), \quad \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v), \quad v, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$$

となるものを**線型汎関数** [*20] (linear functional) という。

例 5.1.

(i) $V = \mathbb{C}^n$ （縦ベクトルの空間）のときは、線型汎関数 $\varphi : V \to \mathbb{C}$ は、

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j v_j$$

[*20] 線型形式 (linear form) ともいう。

の形。ただし、$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{C}$.

(ii) V が内積空間のとき、$v \in V$ に対して、線型汎関数 v^* を

$$v^*(v') = (v|v'), \quad v' \in V$$

で定めることができる。

例 5.2. バナッハ空間 $C[a, b]$ において、次は線型汎関数である。

(i) $[a, b]$ 内の与えられた点列 $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$ と数列 $w_1, \ldots, w_n$ に対して、

$$f \mapsto \sum_{j=1}^{n} w_j f(\tau_j).$$

(ii) 与えられた可積分関数 $h(t)$ に対して、

$$f \mapsto \int_a^b f(t)h(t)dt.$$

上の例の (i) のタイプの線型汎関数として、リーマン和

$$f \mapsto R_n(f) = \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) f(\tau_j)$$

を捉えることができる。一方で、(ii) のタイプの汎関数には、リーマン積分（いわゆる定積分）

$$f \mapsto R(f) = \int_a^b f(t)dt$$

が含まれ、連続関数 f に対しては、$R(f) = \lim_{n\to\infty} R_n(f)$ である。

汎関数も関数の一種なので、上のリーマン積分の存在定理は、汎関数の収束なるものになっているのではないか、と期待される。このような汎関数の位相を調べる前に、汎関数そのものの連続性をまず考えてみよう。

ノルム空間 V 上の線型汎関数 $\varphi : V \to \mathbb{C}$ が**連続** (continuous) であるとは、

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(v_n) = \varphi(v)$$

が成り立つこと。ノルム空間 V 上の連続な汎関数全体を V^* で表すと、V^* は、演算

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v)$$

によりベクトル空間になる。これを V の**双対空間** (dual space) と呼ぶ。この段階では、$V^* \neq \{0\}$ かどうかさえ不明であることに注意しよう。すぐ後で、V^* が十分大きいベクトル空間であることがわかるのであるが。

例 5.3. リーマン積分 $f \mapsto R(f)$ は連続である。これは、関数列が一様収束するとき、積分と極限の順序交換可能、という定理の言い換えにすぎない。

定義 5.4. ノルム空間 V 上の線型汎関数 φ が**有界** (boundend) であるとは、

$$\{|\varphi(v)|; v \in V, \|v\| \leq 1\}$$

が有界集合であること、すなわち、ある正数 $M > 0$ があって

$$\|v\| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(v)| \leq M$$

となること。

命題 5.5. ノルム空間 V の線型汎関数 φ に対して、次は全て同値である。

(i) φ が連続である。
(ii) φ が有界である。
(iii) $\varphi^{-1}(0) = \{v \in V; \varphi(v) = 0\}$ が閉集合である。

Proof. (ii) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (iii) は、すぐ分かる。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): $p(v) = \inf\{\|v + x\|; x \in \varphi^{-1}(0)\}$ とおくと、

$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v), \quad p(v) \leq \|v\|, \quad p(v + x) = p(v), \quad \lambda \in \mathbb{C}, v \in V, x \in \varphi^{-1}(0)$$

である。さらに、$\varphi^{-1}(0)$ が閉集合であることから、$p(v) = 0 \iff v \in \varphi^{-1}(0)$ となる。

そこで、$w \in V$ を $\varphi(w) = 1$ と取ると、

$$V = \varphi^{-1}(0) + \mathbb{C}w$$

であるから、$v = x + \lambda w$ と表して $p(w) > 0$ に注意すれば、

$$|\varphi(v)| = |\lambda| = \frac{|\lambda| p(w)}{p(w)} = \frac{p(\lambda w)}{p(w)} = \frac{p(v)}{p(w)} \leq \frac{1}{p(w)} \|v\|.$$

□

有界な線型汎関数 φ に対して、

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(v)|; v \in V, \|v\| \leq 1\}$$

とおく。記号が示唆するように、$\|\varphi\|$ は双対空間 V^* のノルムである。

補題 5.6.

$$\|\varphi\| = \inf\{M > 0; |\varphi(v)| \leq M\|v\| \ \textit{for any}\ v \in V\}.$$

命題 5.7. 双対空間 V^* は、ノルム $\|\varphi\|$ によりバナッハ空間になる。

Proof. $\|\varphi\|$ がノルムであることは、上の補題などからすぐわかる。これが完備であることも、これまでの完備性の証明のパターンでわかる。

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\varphi_m - \varphi_n\| = 0$$

とすると、かってな $v \in V$ に対して、$\{\varphi_n(v)\}_{n\geq 1}$ が (複素) コーシー列になり、複素数の完備性から、

$$\varphi(v) = \lim_n \varphi_n(v)$$

が存在する。極限をとるまえの関数 φ_n が線型であることから、極限関数 φ も線型。

φ の有界性は、$\forall\epsilon > 0$, 十分大きい m, $n \geq N$ を取れば、

$$\|\varphi_m(v) - \varphi_n(v)\| \leq \|\varphi_m - \varphi_n\|\|v\| \leq \epsilon\|v\|$$

がすべての v について成り立ち、$m \to \infty$ とすれば、$\|\varphi(v) - \varphi_n(v)\| \leq \epsilon\|v\|$ なる不等式が得られる。これは線型汎関数 $\varphi - \varphi_n$ が有界で、$\|\varphi - \varphi_n\| \leq \epsilon, \forall n \geq N$ を意味するから、$\varphi = (\varphi - \varphi_n) + \varphi_n$ も有界で、さらに $\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$ となる。 □

問 5.1. 証明の細部を確かめよ。

例 5.8. 内積空間 V 上の線型汎関数 v^* $(v \in V)$ について、$\|v^*\| = \|v\|$.

例 5.9. ベクトル空間 $\ell_0 = \{(x_n) \in \ell^\infty; \lim_n x_n = 0\}$ にノルム $\|(x_n)\| = \max\{|x_n|; n \geq 1\}$ を与えたものに対して、自然な同一視の意味で $\ell_0^* = \ell^1$ であり、さらに $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ となる。

ここでは証明しないが、ルベーグ空間の双対空間について次が基本的である。

定理 5.10. 測度空間 (Ω, μ) に付随した $L^p(\Omega, \mu)$ について、$1 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ のとき、$(L^p(\Omega, \mu))^* = L^q(\Omega, \mu)$ であり、さらに $L^1(\Omega, \mu) \subset (L^\infty(\Omega, \mu))^*$ が成り立つ。

問 5.2. Hölder 不等式を使って、次が等長埋め込みであることを示せ。

$$L^q(\Omega, \mu) \subset (L^p(\Omega, \mu))^*.$$

とくに、$p = 2$ のときは、$(L^2(\Omega, \mu))^*$ と $L^2(\Omega, \mu)$ を同一視できるのであるが、これは、次の結果からもわかる。

定理 5.11 (Fréchet-Riesz)**.** ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の連続な線型汎関数 $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は、あるベクトル $z \in \mathcal{H}$ を使って $\varphi(x) = (z|x)$, $x \in \mathcal{H}$ と書ける（以前の記号で書くと、$\varphi = z^*$)。さらに、φ を与える z は一つしかなく、$\|\varphi\| = \|z\|$ をみたす。

Proof. $E = \{y \in \mathcal{H}; f(y) = 0\}$ とおくと、E は $\mathcal{H}$ の閉部分空間。$E = \mathcal{H}$ のときには、$z = 0$ と置けばよいので、$E \neq \mathcal{H}$ とする。直交分解定理により、$\mathcal{H} = E + E^\perp$ であるので、$E^\perp \neq \{0\}$. そこで、$a \in E^\perp$ で $\varphi(a) = 1$ となるものを取ってくると、$x - \varphi(x)a \in E$ $(x \in \mathcal{H})$ であるから、

$$(\lambda a|x) = (\lambda a|\varphi(x)a) = \overline{\lambda}(a|a)\varphi(x)$$

を $\varphi(x)$ に一致させるには、$\lambda = 1/(a|a)$ とすればよいので、$z = a/(a|a)$ と置けばよい。

唯一性は、$z' \in \mathcal{H}$ も z と同じ性質をもつとすると、$(z - z'|x) = f(x) - f(x) = 0$ で $x = z - z'$ とおけば $z - z' = 0$ がわかる。

最後にノルムの計算であるが、内積不等式から、

$$|(z|x)| \leq \|z\| \, \|x\| = \|z\| \quad \text{if } \|x\| \leq 1,$$

すなわち $\|\varphi\| \leq \|z\|$ である。$z = 0$ のときは自明であるから、$z \neq 0$ と仮定して、単位ベクトル $x = z/\|z\|$ を考えると、

$$|\varphi(x)| = |(z|x)| = \|z\|$$

であるので、$\|\varphi\| \geq \|z\|$ となる。以上を合わせると、求める等式が得られる。 □

Remark 9. ここでは Fréchet-Riesz としておいたが、ほとんど同時に（もちろん独立に）、Fréchet, Riesz, Schmidt が１９０７年に得た結果ということである。因みに、射影定理は Schmidt (1908) によるものが最初で、ℓ^2 の場合を扱っていたということである。(Pietsch, History of Banach spaces and Linera Operators, Birkäuser.) 一般のヒルベルト空間は、von Neumann (1933) による。

この定理の意味は、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対しては、その双対空間を $\mathcal{H}^*$ とすると、

$$\mathcal{H} \ni x \mapsto x^* \in \mathcal{H}^*$$

なる全単射で、(i) 共役線型であり、(ii) ノルムを保存するものがあるということ。従って、内積

$$(x^*|y^*) = (y|x), \quad x, y \in \mathcal{H}$$

により、 $\mathcal{H}^*$ もヒルベルト空間になる。

さらに $\mathcal{H}^{**}$ を考えると、

$$x \mapsto x^* \mapsto x^{**}$$

なる対応が得られる。その具体的な定義は、

$$x^{**}(y^*) = (x^*|y^*) = (y|x) = y^*(x)$$

で与えられ、$x \mapsto x^{**}$ は線型同型かつ内積を保つので、これらをを同一視することにより、通常、$\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$ とみなす。

有限次元の数ベクトル空間においては、V を縦ベクトル空間とすると、V^* は横ベクトル空間となり、V^{**} は再び縦ベクトル空間に戻る。これが上で述べた $\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$ に相当する。

例 5.12. フレッシェ・リースの定理を利用して、$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ であるとき、$f * g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ となり、不等式

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \, \|g\|_1$$

が成り立つことを示そう。実際、$h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して、

$$\begin{aligned}\int |f * g(x)h(x)| \, dx &\leq \iint |f(x-y)g(y)h(x)| \, dxdy \\ &\leq \int dy|g(y)| \left(\int |f(x-y)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int |h(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_2 \, \|h\|_2 \, \|g\|_1\end{aligned}$$

であるから、$f * g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ および $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \, \|g\|_1$ がわかる。

問 5.3. 上の例の証明において、可測関数 $\phi(x)$ が、すべての $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ について

$$\int |\phi(x)h(x)| \, dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \int \phi(x)h(x) \, dx = 0$$

であれば、$\phi(x) = 0$ (ほとんど全ての $x \in \mathbb{R}^d$ で) となることを利用していることを認識し、このことを確かめよ。

フレッシェ・リースの定理の他の応用として、von Neumann による Radon-Nikodym 定理の証明を取り上げよう。可測空間 $(X, \mathcal{B})$ の上の二つの測度 μ, ν について、ν が μ に関して絶対連続であるとは、

$$\mu(S) = 0 \Longrightarrow \nu(S) = 0 \quad (S \in \mathcal{B})$$

が成り立つことであった。

例 5.13. 可測関数 $\rho : X \to [0,\infty)$ を使って $\nu(dx) = \rho(x)\mu(dx)$ と書けるとき、ν は μ に関して絶対連続。

Radon-Nikodym の定理は、この逆が成り立つことを保証するものである。

Let μ and ν be σ-finite measures in a Borel space X. Then $\omega = \mu + \nu$ is σ-finite (think of $\{E_m \cap F_n\}_{m,n\geq 1}$ with $\mu(E_m) < \infty$ and $\nu(F_n) < \infty$). Let $X_n \uparrow X$ with $\omega(X_n) < \infty$. For $f \in L^2(X,\omega)$,

$$\begin{aligned}\int_{X_n} |f(x)|\mu(dx) &\leq \sqrt{\int_{X_n} |f(x)|^2\,\mu(dx)}\sqrt{\int_{X_n} 1\mu(dx)} \\ &\leq \sqrt{\mu(X_n)}\sqrt{\int_{X_n} |f(x)|^2\,\omega(dx)}\end{aligned}$$

shows that

$$L^2(X_n,\omega) \ni f\sqrt{\omega} \mapsto \int_{X_n} f(x)\,\mu(dx)$$

gives a bounded linear functional, whence we can find $\varphi_n \in L^2(X_n,\omega)$ such that

$$\int_{X_n} f(x)\,\mu(dx) = \int_{X_n} \varphi_n(x) f(x)\,\omega(dx)$$

for any $f \in L^2(X_n,\omega)$. Thus $\mu(dx) = \varphi_n(x)\omega(dx)$ on X_n and then

$$\mu(dx) = \varphi(x)\omega(dx)$$

if we set $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ for $x \in X_n \setminus X_{n-1}$ $(n = 1,2,\dots)$. By the positivity of μ, we have $\varphi \geq 0$.

Similarly, we can find a measurable function $\psi \geq 0$ such that $\nu(dx) = \psi(x)\omega(dx)$. From the expression, $\mu([\varphi = 0]) = 0$, whence $\psi(x) = 0$ for ω-a.e. $x \in [\varphi = 0]$ by the absolute continuity of ν relative to μ. Now the measurable function

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} & \text{if } \varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

does the job.

Remark 10. 同じような議論をヘルダー不等式に適用することで、以前、結果だけ述べたルベーグ空間の双対性を示すことができる。

次に、測度による積分が線型汎関数と見なせるという定理を紹介しよう。位相空間 X の開集合全体から生成された σ ブール代数 $\mathcal{B}$ をボレル集合族といい、これに属する集合をボレル集合 (Borel set) という。X の上で定義された実数値関数 f が、ボレル可測であるとは、$[a < f < b] \in \mathcal{B}$ $(a < b)$*21 となること。連続関数は常にボレル可測である。ボレル集合族 $\mathcal{B}$ の上で定義された測度をボレル測度という。

補題 5.14. 距離空間 X 上の有界ボレル測度は、連続関数に対する積分の値で決まる。すなわち、有界ボレル測度 μ, ν があって、すべての有界連続関数 $f \geq 0$ に対して

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \int_X f(x)\,\nu(dx)$$

が成り立てば、$\mu = \nu$ となる。

Proof. 距離関数を同値なもの（例えば $d/(1+d)$）で置換えて d 自身が有界であるとする。

まず、X の閉集合 F に対して $\mu(F) = \nu(F)$ であることを確かめる。X 上の有界関数を $d(x, F) = \inf\{d(x, a); a \in F\}$ で定めると、$d(x, F) = 0 \iff x \in F$ である。また、$|d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y)$ が成り立つので、これは連続関数である。そこで、$\mathbb{R}$ 上の連続関数列 $0 \leq h_n \leq 1$ を、$h_n \to 1_{(-\infty, 0]}$（各点収束）であるように取ってきて、$f_n(x) = h_n(d(x, F))$ とおけば、$f_n \to 1_F$ となる。有界収束定理により、

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\nu(dx) = \nu(F).$$

次に、開集合から生成されたブール代数 $\mathcal{E}_0$ 上で μ と ν が一致すること。実際、有限個の閉集合 $\{F_j\}_{1 \leq j \leq m}$ から生成されたブール代数は、$F_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap F_n^{\epsilon_n}$ $(F^\epsilon = F$ または $F^\epsilon = X \setminus F)$ を基底にもち、各基底の要素は $F \cap O = F \setminus (F \setminus O)$ の形であるから、$\mu(F \cap O) = \mu(F) - \mu(F \setminus O) = \nu(F) - \nu(F \setminus O) = \nu(F \cap O)$ のように、μ と ν の値が一致する。$\mathcal{E}_0$ はこのような部分ブール代数を併せたものに他ならないので主張が確かめられた。

最後に、$\mathcal{E}_0$ を含むブール代数 $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ で $\mu|_{\mathcal{E}} = \nu|_{\mathcal{E}}$ をみたすものの中で極大なものを考えると、単調収束定理により、$\mathcal{E}$ は σ ブール代数となることから $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ が従う。すなわち $\mu = \nu$ が示された。 □

Remark 11. このように、距離空間の場合には、連続関数から $[a < f < b]$ の形 (の和集合) で与えられる開集合と一般の開集合の間に違いはないのであるが、一般の位相空間の場合には異なって

*21 $[a < f < b] = \{x \in X; a < f(x) < b\}$.

くる。別の言い方をすると、すべての連続関数を可測にする最小の可算ブール代数は、開集合から生成された可算ブール代数よりも、範囲が狭くなる。前者に属する集合を Baire 集合、後者に属する集合を Borel 集合という。距離空間の場合には、この二つの概念が一致するということである。

問 5.4. d が距離関数であるとき、$d/(1+d)$ も距離関数であることを示せ。

定理 5.15 (Riesz-Radon-Banach)**.** コンパクト距離空間 X について、線型汎関数 $\varphi : C(X) \to \mathbb{C}$ で $f \geq 0 \Longrightarrow \varphi(f) \geq 0$ であるもの（正線型汎関数という）と X における有界ボレル測度 μ との間には一対一の対応が存在する。

$$\varphi(f) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

Proof. 線型汎関数からボレル集合上の有界測度が一意的に定まることは、上の補題による。

正線型汎関数 φ から測度 μ を構成する。開集合 $U \subset X$ に対して、

$$\mu(U) = \sup\{\varphi(f); 0 \leq f \in C(X), [f] \subset U\}, \quad [f] = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$$

部分集合 $A \subset X$ に対して、

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(U); A \subset U\}$$

とおく。$\mu(X) = \varphi(1) < \infty$ に注意。

μ^* **が外測度であること**：$\mu^*(A)$ を $\mu(U)$ で近似することで、開集合列 $\{U_j\}$ に対して

$$\mu(\bigcup_j U_j) \leq \sum_j \mu(U_j)$$

が示せればよい。

$U = \bigcup_j U_j$ とおく、$\mu(U)$ を下から関数 $0 \leq f \in C(X)$ で近似する。

$\{U_j\}$ は、$[f]$ の開被覆であるから、添字の有限集合 F を選んで、

$$[f] \subset \bigcup_{j \in F} U_j$$

とできるので、これに応じた単位の分解 $\{0 \leq h_j\}_{j \in F}$ （ $[h_j] \subset U_j$) を取ってくれば、$[fh_j] \subset U_j$ に注意して、

$$\varphi(f) = \sum_{j \in F} \varphi(fh_j) \leq \sum_{j \in F} \mu(U_j) \leq \sum_j \mu(U_j).$$

開集合 U が、μ^* 可測であること：まず、任意の開集合 V に対して

$$\mu(V) \geq \mu^*(U \cap V) + \mu^*(V \cap U^c)$$

を示す。これがわかれば、V として、部分集合 A を上から近似する開集合、$\mu(V) \leq \mu^*(A) + \epsilon$、を取ることで、

$$\mu^*(A) + \epsilon \geq \mu(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$$

となるから。

さて、開集合 $V \cap U$ を下から近似する関数を f とする。

$$0 \leq f, \quad [f] \subset V \cap U, \quad \mu^*(V \cap U) \leq \varphi(f) + \epsilon.$$

さらに、開集合 $V \setminus [f]$ を下から近似する関数 g,

$$g \geq 0, \quad [g] \subset V \setminus [f], \quad \mu^*(V \setminus [f]) \leq \varphi(g) + \epsilon$$

を用意する。このとき、$f[f+g] \subset [f] \cup [g] \subset V$ であり、

$$\mu(V) \geq \varphi(f) + \varphi(g) \geq \mu(V \cap U) - \epsilon + \mu(V \setminus [f]) - \epsilon \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\epsilon.$$

以上で有界ボレル測度が構成できた。

最後に、φ が μ に関する積分で書けること。これは、$0 \leq f \in C(X)$ に対して $\int f(x)\,\mu(dx) = \varphi(f)$ を示せば十分。

正数 $\epsilon > 0$ に対して、$[f \geq (n+1)\epsilon] \subset [f > n\epsilon]$ であるから、連続関数 $0 \leq h_n \leq 1$ を、

$$[f \geq (n+1)\epsilon] \subset h_n \Subset [f > n\epsilon], \quad \varphi(h_n) \leq \mu([f > n\epsilon]) \leq \varphi(h_n) + \epsilon$$

であるように選び、$f_\epsilon = \sum_{n=0}^{\|f\|/\epsilon} \epsilon h_n$ とおけば、$0 \leq f - f_\epsilon \leq \epsilon$ であり、正線型性より $\varphi(f) - \epsilon\varphi(1) \leq \varphi(f_\epsilon) \leq \varphi(f)$ である。また

$$\begin{aligned}\int f_\epsilon(x)\,\mu(dx) &= \epsilon \sum_{n=0}^{\|f\|/\epsilon} \int h_n(x)\,\mu(dx) \leq \epsilon \sum_{n=0}^{\|f\|/\epsilon} \mu([f > n\epsilon]) \\ &\leq \epsilon \sum_{n=0}^{\|f\|/\epsilon} (\varphi(h_n) + \epsilon) \leq \varphi(f_\epsilon) + \epsilon\|f\| + \epsilon^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon \sum_{n=0}^{\|f\|/\epsilon} \int h_n(x)\,\mu(dx) &\geq \epsilon \sum_{n=0}^{\|f\|/\epsilon} \mu([f > (n+1)\epsilon]) \\ &\geq \epsilon \sum_{n=1}^{\|f\|/\epsilon} \varphi(h_n) = \varphi(f_\epsilon) - \epsilon\varphi(h_0)\end{aligned}$$

となるので、$\epsilon \to +0$ とすれば、求める積分表示を得る。 $\square$

問 5.5. Carathéodory の構成を復習する良い機会である。各自努めよ。次も参照。
`https://math.berkeley.edu/~arveson/Dvi/rieszMarkov.pdf`

念のため、被覆による単位の分解について述べておこう。コンパクト集合 K の有限開被覆 $\{U_j\}$ に対して、連続関数 $0 \leq h_j \leq 1$ で、$[h_j] \subset U_j$, $\sum_j h_j(x) = 1$ $(x \in K)$ となるものが存在する。実際、各 $x \in [f]$ に対して、x のコンパクト近傍 $K_x \subset K$ を、$K_x \subset U_j$ for some j であるように選べば、

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} K_{x_k}$$

となるので、$K_{x_k} \subset U_j$ となる K_{x_k} の和集合を K_j とおけば、$K \subset K_j$ となる。そこで、連続関数 $0 \leq g_j \leq 1$ を、$g_j(x) = 1$ $(x \in K_j)$, $[g_j] \subset U_j$ となるように選び、

$$h_j = \frac{g_j}{\sum_j g_j}$$

とおけば良い。

系 5.16. 円周 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ 上の連続関数の作るバナッハ空間 $C(\mathbb{T})$ の上で定義された正線型汎関数 $\varphi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ は、$\mathbb{T}$ における有限測度 μ を使って、

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\mu(dz)$$

と表示され、この表示を与える測度 μ は一意的である。

Remark 12. 上の形の定理は Banach による。先行結果として Riesz (有界閉区間), Radon (ユークリッド空間の有界閉集合) があり、さらなる拡張として Markov, Kakutani (一般のコンパクト空間) がある。全体をひとまとめにして Riesz-Markov の定理と呼び習わされている。

ここでは、外測度を経由することで示したのであるが、Daniell 方式の積分（と付随する測度）を使えば、ほとんど明らかに見えるだろう。Daniell 積分については、講義ノート「ルベーグ積分速講」を見よ。

問 5.6. $C(K)$ 上の線型汎関数 $\varphi : C(K) \to \mathbb{C}$ が、$\varphi(|f|^2) \geq 0$ $(\forall f \in C(K))$ であるための必要十分条件は $\|\varphi\| = \varphi(1)$ となることである。

正値性の条件が、$\varphi(h) \geq 0$ $(0 \leq \forall h \in C(K))$ と言い換えられることにまず注意する。次に、$\langle f, g \rangle = \varphi(\overline{f}g)$ が $C(K)$ 上の半内積となることから、内積の不等式により、

$$|\varphi(f)|^2 \leq \varphi(1)\varphi(|f|^2) \leq \|f\|^2 \varphi(1)^2$$

となって、$\|\varphi\| = \varphi(1)$ がわかる。

逆を示すためには、$\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$ の場合を考えれば十分。まず、実数値連続関数 h に対して、$\varphi(h) = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とおくと、

$$|\alpha + i(\beta + t)| = |\varphi(h + it)| \leq \|h + it\| = \sqrt{\|h\|^2 + t^2}$$

すなわち $\alpha^2 + (\beta + t)^2 \leq \|h\|^2 + t^2$ $(t \in \mathbb{R})$ となって、$\beta = 0$ がわかる。そこで $0 \leq h \leq 1$ とすると、$|1 - \varphi(h)| = \varphi(1 - h)| \leq \|1 - h\| \leq 1$ であることと $\varphi(h) \in \mathbb{R}$ から、$\varphi(h) \geq 0$ がわかる。

さて、ノルム空間 V に対して、V^* はバナッハ空間であった。さらに、V^* の双対 V^{**} も再びバナッハ空間になる。$v \in V$ に対して、 線型汎関数 $v^{**} : V^* \to \mathbb{C}$ をヒルベルト空間のときの公式に倣って、

$$v^{**}(f) = f(v), \quad f \in V^*$$

で定めると、$|f(v)| \leq \|f\|\|v\|$ により、v^{**} は連続で、$\|v^{**}\| \leq \|v\|$ がわかる。さらに、対応 $v \mapsto v^{**}$ は線型である。

V が有限次元のときには、基底とその双対基底を取ることにより、これが同型であるとわかるが、無限次元のときに一般的に成り立つことは単射性のみであり、全射性は正しくない場合が普通である。

ここでの主な目標は次を示すこと。$V \to V^{**}$ は、等長写像であり、$V \subset V^{**}$ とみなせる。すなわち、勝手な $w \in V$ に対して、

$$\sup\{|f(w)|; f \in V^*, \|f\| \leq 1\} = \|w\|$$

が成り立つ。

より強く次が成り立つ。部分空間 $W \subset V$ 上の線型汎関数 f で、$|f(w)| \leq \|w\|$ $(\forall w \in W)$ であるものが与えられたとき、f は $|f(v)| \leq \|v\|$ $(\forall v \in V)$ を満たすように線型に拡張できる。とくに、W をベクトル w の張る 1 次元部分空間とし、その上の線型汎関数 $\lambda w \mapsto \lambda\|w\|$ にこの拡張定理を適用すれば、上で述べたことがわかる。

この拡張定理自体は、次の補題に帰納法 (Zorn lemma) を合わせればわかる。

補題 5.17. *Let V be a normed vector space and W be a subspace. Let $f : W \to \mathbb{C}$ be a linear functional such that*

$$|f(w)| \leq \|w\| \quad \textit{for } w \in W.$$

Then, for any $v \notin W$, we can extend f to a linear functional on $W + \mathbb{C}v$ so that the above inequality remains valid for elements in $W + \mathbb{C}v$.

この補題の本質的な部分はノルムの凸性にあり、それを見るためには、実ベクトル空間の場合にノルムの条件を弱めたものに対して調べておくのが良い。

定義 5.18. 実ベクトル空間 V 上の実関数 ϕ で $\phi(x+y) \leq \phi(x)+\phi(y)$ かつ $\phi(rx) = r\phi(x)$ $(x, y \in V,\ r > 0)$ となるものを **下部線型** (sublinear) と言う。下部線型関数でさらに $\phi(\pm x) = \phi(x)$ であるものを**半ノルム** (seminorm) とよぶ。V が複素ベクトル空間である場合は、さらに条件 $\phi(e^{i\theta}v) = \phi(v)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を追加しておく。

Remark 13. 半ノルム ϕ でさらに、$\phi(x) > 0$ $(x \neq 0)$ となるものが、実ベクトル空間上のノルムである。下部線型関数は quasi-seminorm とも呼ばれる。sub の訳語としては、部分・劣（部分集合、劣調和のように）を当てることが多いのであるが、ここでは意味と音を重視して。

問 5.7. 下部線型関数は $\phi(0) = 0$ を満たし、半ノルムは負の値を取らない。

問 5.8. 半ノルム ϕ と線型汎関数 f に対して、$f \leq \phi \iff |f| \leq \phi$ である。

問 5.9. Let $|\cdot|$ be a seminorm on V. Then $W = \{v \in V; |w| = 0\}$ is a linear subspace of V and $|v + w| = |v|$ for $v \in V$ and $w \in W$.

定理 5.19 (Hahn-Banach)**.** 実ベクトル空間 V 上の下部線型関数 ϕ と V の部分空間 W 上の線型汎関数 g で $g(w) \leq \phi(w)$ *(*$w \in W$*)* を満たすものに対して、g を拡張する V 上の線型汎関数 f で $f \leq \phi$ となるものが存在する。

Proof. 超限帰納法 (Zorn lemma) により、$V = W + \mathbb{R}v$ $(v \notin W)$ の場合に拡張の存在を示せば十分。さて、拡張に対する条件 $f \leq \phi$ は、斉次性により

$$f(w \pm rv) \leq \phi(w \pm rv) \quad (w \in W, r > 0) \iff f(w \pm v) \leq \phi(w \pm v) \quad (w \in W)$$

と言い換えられるので、

$$g(w) - \phi(w - v) \leq f(v) \leq \phi(w + v) - g(w) \quad (w \in W)$$

となる $f(v) \in \mathbb{R}$ が存在することと同値。

一方、$w, w' \in W$ についての不等式

$$g(w) + g(w') = g(w + w') \leq \phi(w + w') \leq \phi(w + v) + \phi(w' - v)$$

を書き換えた $g(w') - \phi(w' - v) \leq \phi(w + v) - g(w)$ より、

$$\sup\{g(w') - \phi(w' - v); w' \in W\} \leq \inf\{\phi(w + v) - g(w); w \in W\}$$

が成り立つので、確かに $f \leq \phi$ を満たす $f(v)$ が存在する。 □

問 5.10. 今の状況で超限帰納法が使えることを確かめよ。

系 5.20 (半ノルム形式の Hahn-Banach)**.** 実ベクトル空間 V における半ノルム $\|v\|$ と部分空間 W 上の線型汎関数 g が $|g(w)| \leq \|w\|$ *(*$w \in W$*)* を満たせば、g を拡張する V の線型汎関数 f で $|f(v)| \leq \|v\|$ *(*$v \in V$*)* となるものが存在する。

また $\|v\|$ が複素ベクトル空間 V における半ノルムで、部分空間 W 上の複素線型汎関数 g が $|g(w)| \leq \|w\|$ *(*$w \in W$*)* を満たせば、g を拡張する V の線型汎関数 f で $|f(v)| \leq \|v\|$ *(*$v \in V$*)* となるものが存在する。

Proof. 後半の複素汎関数の場合を示す。実線型汎関数 $G = \mathrm{Re}\, g$ は $|G(w)| \leq \|w\|$ $(w \in W)$ を満たすので、前半により、V の実線型汎関数 F で $|F(v)| \leq \|v\|$ $(v \in V)$ となるものがある。そこで、$f(v) = F(v) - iF(iv)$ を置けば、f は g を拡張する複素線型汎関数となる。さらに、$f(v) = |f(v)|e^{i\theta}$ と表わせば、

$$|f(v)| = e^{-i\theta} f(v) = f(e^{-i\theta} v) = F(e^{-i\theta} v) \leq \|e^{-i\theta} v\| = \|v\|.$$

□

Remark 14. $v \in V$ に対して、$\phi_v \in V^{**}$ を $\phi_v(\varphi) = \varphi(v)$ で定めると、上の系から、$\phi : V \to V^{**}$ は等長埋め込みであることがわかる。V^{**} はノルム空間 V^* の双対空間としてバナッハ空間であるから、ノルム空間の完備化を $\phi_V = \{\phi_v; v \in V\}$ の V^{**} における閉包として与えることができる。洗練された方法ではあるが、やはりコーシー列を使ったカントルの方法が力強い。

問 5.11. バナッハ空間 V の閉部分空間 W に対して、商空間 V/W の双対 $(V/W)^*$ は V^* の閉部分空間 $W^\perp$ とノルムも込めて同一視できる。一方制限写像 $V^* \to W^*$ が $W^\perp$ に他ならず、バナッハ空間としての同型 $V^*/W^\perp \cong W^*$ を引き起こす。

問 5.12. バナッハ空間の完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ $(Z \cong Y/X)$ から、$0 \to Z^* \to Y^* \to X^* \to 0$ が引き起こされる。したがってもう一度双対を取ると、$0 \to X^{**} \to Y^{**} \to Z^{**} \to 0$ である。

とくに、$0 \to V \to V^{**} \to V^{**}/V \to 0$ から $0 \to V^{**} \to V^{****} \to (V^{**}/V)^{**} \to 0$ が得られるので、$V \neq V^{**}$ ならば、$V^{**} \neq V^{****}$ がわかる。

次に順序構造を保つ線型汎関数の拡張定理を与える。ここから先の流れは、Bühler-Salamon [3] を参考にした。

定義 5.21. 実ベクトル空間 V の部分集合 C が**凸集合** (convex set) であるとは、

$$x, y \in C, 0 \leq t \leq 1 \Longrightarrow tx + (1-t)y \in C$$

となること。複素ベクトル空間 V の部分集合については、V の実ベクトル空間としての下部構造を使って凸集合を定義する。

凸集合 C で、条件 $rx \in C$ $(r \geq 0, x \in C)$ を満たすものを**凸錐** (convex cone) という。

問 5.13 (Caratheodory). ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S の凸包 C の点は、S に属する $n+1$ 個の点の凸結合で表される。これを使って、S が有界閉集合のとき、C も有界閉集合であることを示せ。

実ベクトル空間 V における順序 $x \leq y \iff y \geq x$ が (i) $rv \geq 0$ $(r > 0,\, v \geq 0)$ および (ii) $x \leq y \iff y - x \geq 0$ $(x, y \in V)$ をみたすとき、線型順序 (linear order) と呼ぶ。与えられた順序 $x \leq y$ に対して、$V^+ = \{v \in V; v \geq 0\}$ とおけば、$x \leq y$ が線型順序であることと V^+ が凸錐であることが同値となり、このとき、V^+ を V の**正錐** (positive cone) と呼ぶ。線型順序あるいは同じことであるが正錐が与えられたベクトル空間を**順序ベクトル空間** (ordered vector space) という。

順序ベクトル空間 V 上の線型汎関数 φ が正であるとは、$\varphi(x) \leq \phi(y)$ $(x \leq y)$ となること。このことは $\varphi(v) \geq 0$ $(v \in V^+)$ と言っても同じことである。正線型汎関数は、短く**正汎関数** (positive functional) とも言う。

例 5.22. 関数空間 $\mathbb{R}^X$ の部分集合 $[0, \infty)^X$ は凸錐であり、このときの関数順序はこれまで使ってきたところで、その部分空間上の正汎関数も積分あるいは測度との関連で既に出てきている。

問 5.14. 一般に集合 X 上の実関数 f に対して、$C_f = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}; f(x) \leq t\}$ を f の上部グラフ (epigraph) という。実ベクトル空間上の実関数 ϕ が下部線型であることとその上部グラフが凸錐であることが同値。

定理 5.23 (正汎関数についての Hahn-Banach). 順序ベクトル空間 (V, V^+) の部分空間 W が、押え込み条件「どの $v \in V$ に対しても $v \leq w$ となる $w \in W$ がある」を満たすとき、W 上の正汎関数 g は V 上の正汎関数 f に拡張できる。

Proof. まず、V における関数 ϕ を

$$\phi(v) = \inf\{g(w); v \leq w\}$$

で定める。仮定により $\phi(v) < \infty$ である。さらに、$w' \leq v \iff -v \leq -w'$ となる $w' \in W$ があるので、$\phi(v) \geq g(w')$ を満たし、とくに $\phi(v) > -\infty$ である。

作り方から ϕ は下部線型となるので、g を拡張する V の線型汎関数 f で $f \leq \phi$ を満たすものが取れ、$v \in V^+$ に対して、$-v \leq 0$ であることから、$f(-v) \leq \phi(-v) \leq g(0) = 0$ となり、$f(v) \geq 0$ がわかる。 □

最後に Hahn-Banach の幾何学版を示しておこう。

定理 5.24 (凸集合の分離)**.** 実ノルム空間 V の凸集合 A と開凸集合 B で $A \cap B = \emptyset$ となるものに対して、$\varphi(B) \subset (\sup \varphi(A), \infty)$ となる V の有界線型汎関数 φ が存在する。

Proof. 開凸集合 $B - A = \bigcup_{a \in A}(B - a)$ は 0 を含まない。そこで、凸錐を $V^+ = \bigcup_{r \geq 0} r(B - A)$ で定めると、$0 \notin B - A$ より、$V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$ である。

さて、$0 \neq c \in B - A$ に対して、部分空間 $W = \mathbb{R}c$ は押え込み条件を満たす。というのは、どの $v \in V$ についても、$B - A$ が開集合であることに注意すれば $c - rv \in B - A \subset V^+$ が十分小さい $r > 0$ について成り立ち、$v \leq c/r \in W$ となる。

したがって、W 上の正汎関数 $tc \mapsto t$ を拡張する V 上の正汎関数 φ が存在する。$B - A$ が開集合であることから、$\overline{B}_r(c) \subset B - A$ となる $r > 0$ が存在する。そうすると、ベクトル $v \in V_1$ に対して、$c - rv \in B - A \subset V^+$ であり、$\varphi(c - rv) \geq 0$ となる。すなわち、$\varphi(v) \leq \varphi(c)/r = 1/r$ $(v \in V_1)$ であり、これは $|\varphi(v)| \leq \|v\|/r$ $(v \in V)$ を意味するので φ は有界である。

さらに、$\varphi(b - a) \geq 0$ より $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ $(a \in A,\ b \in B)$ となるので、$\sup \varphi(A) \leq \inf \varphi(B)$ である。

最後に $b \in B$ に対して、$s > 0$ を十分小さく取れば、$b - sc \in B$ となり、$\varphi(b) = s + \varphi(b - sc) \geq s + \sup \varphi(A) \in (\sup \varphi(A), \infty)$ である。 □

系 5.25. 実ノルム空間 V の閉凸集合 C と $v \in V \setminus C$ に対して、V 上の有界線型汎関数 φ で $\sup \varphi(C) < \varphi(v)$ となるものが存在する。

Proof. 開球 $B_r(v)$ で $C \cap B_r(v) = \emptyset$ となるものがあるので、$A = C$, $B = B_r(v)$ に上の結果を適用する。 □

6　バナッハの有界性定理

これまでは主にベクトル空間を扱ってきた。線型代数での経験からわかるように、ベクトル空間の扱いは、線型写像を伴って完成する。とくに重要な場合は、写像の始集合と終集合が同一のベクトル空間の場合で、線型変換・線型作用素とも称される。行列の場合でいえば、正方行列に相当する場合で、それが行列代数を形成するように、線型変換・線型作用素[*22]においてもその代数構造が重要となる。

まずは、数列空間の場合の写像であるが、数列空間の標準基底 δ_n の線型変換 ϕ による像を

$$\phi(\delta_k) = \sum_j \phi_{jk}\delta_j$$

と展開することで、ϕ の行列表示 (ϕ_{jk}) を得る。上の無限和の収束を保証するために、(ϕ_{jk}) の $j, k \to \infty$ での振る舞いに種々の条件がつくことにはなるが、通常の線型代数における行列表示と形式的には同じ考え方である。

例 6.1. すべての ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ に共通する密部分空間として標準基底 $(\delta_k)_{k\geq 0}$ から代数的に生成される $D = \sum_k \mathbb{C}\delta_k$ を取り、D における線型変換 ϕ として、

$$\phi(\delta_k) = a_k\delta_k + b_{k+1}\delta_{k+1} + b_{k-1}\delta_{k-1}$$

を考える。ここで、$(a_k)_{k\geq 0}$, $(b_k)_{k\geq 0}$ は与えられた数列であり、$\delta_{-1} = 0$ と解釈する。ϕ の行列表示は、対角線に $a_0, a_1, a_2, \ldots$ が、対角線から一つずれた部分に数列 $b_0, b_1, b_2, \ldots$ が現れ、それ以外の成分は 0 となる。この形の行列を**ヤコビ行列** [*23] (Jacobi matrix) という。直交多項式の漸化式、確率測度のモーメント問題に関連して自然に現れる。

次に、関数空間の間の線型写像について考えよう。基本的な場合をいくつか列挙すると、

(i) 変数変換が引き起こすもの: 測度空間 (X, μ), (Y, ν) の間の可測同型写像 $\phi : X \to Y$ が、$\mu(\phi^{-1}[B]) = \nu(B)$ (B は Y の可測集合) を満たすとき、測度を保つという。このとき、対応 $f \mapsto f \circ \phi^{-1}$ は、$L^p(X, \mu)$ から $L^p(Y, \nu)$ への等長同型写像を与える。とくに、$X = Y = \mathbb{R}^n$ で、$\mu = \nu$ がルベーグ測度のときに、$a \in \mathbb{R}^n$ が定める移動変換 $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x + a \in \mathbb{R}^n$ は測度を保ち、したがって、等長同

[*22] 物理方面では、演算子という。

[*23] 最近の微積分の教科書には、写像の微分を表す行列をヤコビ行列とか Jacobian matrix と呼ぶ向きもあるが、これはヤコビ行列式に引きづられた誤用であろう。

型 $f(x) \mapsto f(x-a)$ を引き起こす。これを**移動作用素** (translation operator) という。

(ii) 微分作用素: 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ で考える。多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ で $|\alpha| \leq N$ であるものに対して関数 $c_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ を用意し、

$$D = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha(x) D^\alpha, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$$

という形の記号を考えると、D は $C_c^\infty(\Omega)$ あるいは $C^\infty(\Omega)$ における線型変換を引き起こす。これを**微分作用素** (differential operator) という。微分作用素は、定義域と値域をさまざまな形で拡張したものも使われる。例えば、$\Delta = D_1^2 + \cdots + D_n^2$ であれば、

$$\Delta : W^{2,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

という拡張が考えられる。

(iii) **積分作用素** (integral operator): 例えば、積空間上の可測関数 $K(x, y)$ に対して、

$$\int_{X \times Y} |K(x,y)| \mu_X(dx) \mu_Y(dy) < \infty$$

とすれば、$L^\infty(Y, \mu_Y) \to L^1(X, \mu_X)$ を

$$(Tf)(x) = \int_Y K(x,y) f(y)\, \mu_Y(dy)$$

で定めることができる。あるいは、

$$\int_{X \times Y} |K(x,y)|^2 \mu_X(dx) \mu_Y(dy) < \infty$$

であれば、$L^2(Y) \to L^2(X)$ という線型作用素を定める。

(iv) 掛け算作用素: 測度空間 (Ω, μ) を考える。関数 $h \in L^\infty(\Omega, \mu)$ に対して、対応 $f \mapsto hf$ は、$L^p(\Omega, \mu)$ における線型変換を引き起こす。これを h の定める**掛け算作用素** (multiplication operator) という。

ノルム空間 V からノルム空間 W への線型写像 $T : V \to W$ について考える。

命題 6.2. 次は同値。

(i) $\|Tv\| \leq M\|v\|$ *(*$v \in V$*)* をみたす $M > 0$ が存在する。

(ii) T は連続である。

(iii) W の単位閉球 $B = \{w \in W; \|w\| \leq 1\}$ の逆像 $T^{-1}[B] \subset V$ は内点を含む。

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) はすぐ分かる。

(iii) $\Longrightarrow$ (i): $\overline{B}_r(a) \subset T^{-1}[B]$ とする。$\|T(a)\| \leq 1$ であり、$0 \neq v \in V$ に対して、$\|T(a+v')\| \leq 1$ ($v' = rv/\|v\|$) であることに注意すれば、

$$\|T(v)\| = \frac{\|v\|}{r}\|T(a+v') - T(a)\| \leq \frac{\|v\|}{r}\Big(\|T(a+v')\| + \|T(a)\|\Big) \leq \frac{2}{r}\|v\|.$$

□

定義 6.3. 上の同値な条件をみたす線型写像は**有界** (bounded) と呼ばれる。有界な線型写像全体を $\mathcal{B}(V,W)$ とかく。また、$T \in \mathcal{B}(V,W)$ に対して、

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tv\|}{\|v\|}; 0 \neq v \in V\right\} = \sup\{\|Tv\|; v \in V_1\}$$

とおく。

Remark 15. 連続線型写像と呼ばずに、有界という意味を読み取りにくい言葉をあえて使う理由は、バナッハ空間の位相としてノルムよりも弱い重要なものがあり、その弱い位相での連続性との混同を避けるため。ノルム連続の意味で有界というのがこの業界の慣習である。逆らわないでおこう。

問 6.1. 上の命題の証明を検証して、次のことを確認。単位閉球 B の逆像 $T^{-1}[B]$ が半径 r の開球を含めば $\|T\| \leq 2/r$ である。

問 6.2. 行列 $A = (a_{i,j})_{i,j\geq 1}$ が表わす ℓ^∞ から ℓ^∞ への線型写像 T について、$\|T\| = \sup_{i\geq 1}\{\sum_{j\geq 1}|a_{i,j}|\}$ である。ℓ^1 から ℓ^1 への線型写像についてはどうか。

命題 6.4. $\mathcal{B}(V,W)$ はノルム空間であり、W がバナッハ空間であれば、$\mathcal{B}(V,W)$ もバナッハ空間。また、写像ノルムは $\|T\| = \inf\{M > 0; \|Tv\| \leq M\|v\|\}$ とも表示される。さらに $S \in \mathcal{B}(U,V)$ であれば、$TS \in \mathcal{B}(U,W)$ であり、$\|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|$ が成り立つ。

問 6.3. 双対空間の場合の証明にならって、これを確かめよ。

例 6.5.

(i) 等長写像について、$\|T\| = 1$.

(ii) 微分作用素について、$\|\Delta : W^{2,2} \to L^2\| \leq 1$.

(iii) 積分作用素について、

$$\|T : L^\infty(Y, \mu_Y) \to L^1(X, \mu_X)\| \le \int_{X\times Y} |K(x,y)|\,\mu_X(dx)\mu_Y(dy),$$
$$\|T : L^2(Y, \mu_Y) \to L^2(X, \mu_X)\| \le \sqrt{\int_{X\times Y} |K(x,y)|^2\,\mu_X(dx)\mu_Y(dy)}.$$

(iv) 掛け算作用素について、$\|L^p(\Omega,\mu) \ni f \mapsto hf \in L^p(\Omega,\mu)\| = \|h\|_\infty$.

たたみ込みには、移動平均という側面があった。これを移動作用素と結びつけて再度取り上げよう。まず、T^p_x という記号で $L^p(\mathbb{R}^d)$ における $x \in \mathbb{R}^d$ による移動作用素を表す。すなわち $(T^p_x\xi)(x') = \xi(x'-x)$ $(x' \in \mathbb{R}^d)$ である。$T^p_xT^P_y = T^p_{x+y}$, $T^p_{-x} = (T^p_x)^{-1}$ に注意。また、$1 \le p < \infty$ のとき、$\xi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対して、$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto T^p_x\xi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ がノルム連続である。

問 6.4. $1 \le p < \infty$ のとき、$C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ が密であることを利用して、これを確かめよ。

一般に、バナッハ空間 V における等長作用素の集まり $T_x : V \to V$ で、$T_xT_y = T_{x+y}$, $T_{-x} = (T_x)^{-1}$ および上の意味での連続性をみたすものを $\mathbb{R}^d$ の V における（連続）表現と呼ぶ。

問 6.5. $T^\infty_x\xi$ が x について連続でない $\xi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ を見いだせ。

$\mathbb{R}^d$ から V へのノルム連続関数 $v(x)$ が有界集合で支えられているとき、$v(x)$ は一様連続であり、したがってその積分 $\int_{\mathbb{R}^d} v(x)\,dx$ をリーマン式に V における一様極限として定めると、

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^d} v(x)\,dx\right\| \le \int_{\mathbb{R}^d} \|v(x)\|\,dx.$$

これを $f(x)T_xv$ $(f \in C_c(\mathbb{R}^d))$ に適用すれば、

$$\|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)T_xv\,dx| \le \|f\|_1\|v\|$$

となるので、線型作用素 T_f を定め、$C_c(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{B}(V)$ は $L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{B}(V)$ に連続に拡張され、$T_fT_g = T_{f*g}$ をみたす。以上の構成を $L^p(\mathbb{R}^d)$ における移動作用素に適用し、$T_fh = f*h$ $(f, h \in C_c(\mathbb{R}^d))$ に注意すれば、$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ と $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ のたたみ込みを $f*h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ かつ $\|f*h\|_p \le \|f\|_1\|h\|_p$ であるように定めることができる。

問 6.6. $1 \leq p < \infty$ のとき、近似デルタ関数列 $\{\delta_n\}$ は

$$\lim_{n\to\infty} \|\delta_n * f - f\|_p = 0, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d)$$

を満たす。

以下に述べる一連の定理は、すべてにおいて Stefan Banach が深く関わっており、ここではバナッハの有界性定理と呼んでおく。[Reed-Simon, III. 5]

最初は、完備距離空間の密性 (density) に関するもので、カテゴリー定理と称されるが、いわゆる圏論 (category theory) とは別のものである。その実態は、絞り出し論法であるか。

定理 6.6 (Baire Category Theorem)**.** *完備距離空間 X が $X = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ (F_n は X の閉集合) と表されるならば、少なくとも一つの F_n は内点を含む。いいかえると、内点を含まない閉集合の可算和として X を表すことはできない。*

Proof. 全ての F_n が内点を含まないと仮定して矛盾を導こう。F_1 は内点を含まないから、とくに $X \neq F_1$ であり、また $X \setminus F_1$ は開集合であるから、$\overline{B}_{r_1}(x_1) \subset X \setminus F_1$ であるような $x_1 \in X$ と $0 < r_1 \leq 1$ が存在する。

つぎに、F_2 が内点を含まない閉集合であることから、$B_{r_1}(x_1) \setminus F_2$ は空でない開集合で、したがって $\overline{B}_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1) \setminus F_2$ となる $x_2 \in X$ と $0 < r_2 \leq 1/2$ が存在する。以下、点列 $\{x_k\}$ と正数列 $\{r_k\}$ を、

$$\overline{B}_{r_k}(x_k) \subset B_{r_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus F_k, \qquad 0 < r_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

であるように取ってくることができる。このとき、

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq r_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

であるから、$\{x_k\}$ はコーシー列であり、X が完備であるから、その極限点 x が存在する。

一方、$x_k \in \overline{B}_{r_l}(x_l) \subset X \setminus F_l$ $(k \geq l)$ であるから、

$$x \in \overline{B}_{r_l}(x_l) \subset X \setminus F_l, \quad l \geq 1$$

となって、$X = \bigcup_{l\geq 1} F_l$ に反する。 □

例 6.7. ノルム空間で可算無限個の代数的基底をもつものは、完備ではない。実際、有限次元部分空間はつねに閉部分空間であり、そういったものの増大列の和で書けるならば、

どれか一つは内点を含む。一方、ノルム空間の部分空間で内点を含むものはノルム空間全体に限るので、ノルム空間自体が有限次元になってしまう。

問 6.7. 完備距離空間の密開集合の列 $\{U_n\}_{n\geq 1}$ に対して、$\bigcap_n U_n$ は密である。

課題 5. ℓ^2 の代数次元が連続濃度であることを次の手順で示せ。

(i) $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ の濃度が連続であることから、ℓ^2 が連続濃度以下であることを示す。
(ii) 角 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ に対して、帯領域 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x \sin\theta - y \cos\theta| \leq \cos\theta\}$ と $\mathbb{Z}^2$ の共通部分を S_θ とするとき、$\mathbb{Z}^2 = \cup_\theta S_\theta$, $|S_\theta| = \infty$, $|S_\theta \cap S_{\theta'}| < \infty$ を示せ。
(iii) 各 θ について、$a_\theta \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ を $\{(k, l); a_\theta(k, l) \neq 0\} = S_\theta$ であるように選べば、$\{a_\theta\}$ は一次独立である。

定義 6.8. 内点を含まない閉集合の可算和で表される集合を**やせた集合** (meager set) ということにすれば、完備距離空間はやせていないということである。

例 6.9. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ を可算個の超平面の和集合で表すことはできない。この事実は、超平面のユークリッド測度が 0 であることに注意してもわかることであるが、測度の存在と関係なく位相的な性質として成り立つことに注意。この意味で、やせた集合というのは、測度空間における零集合と類似の位相的な概念であると言ってよいだろう。ただし、次のようなものが存在することに注意。$\mathbb{R}^d$ の可算密集合 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を用意し、$r > 0$ に対して、開集合

$$U_r = \bigcup_{n\geq 1} B_{r/2^n}(a_n)$$

を考えると、$F_r = \mathbb{R}^d \setminus U_r$ は、内点を含まない閉集合であるが、$|U_r| = O(r^d)$ であるので、測度論的には大きい集合である。

問 6.8. $1 \leq p < q < \infty$ とする。

(i) $\{x \in \ell^q; \sum |x_n|^p \leq 1\}$ は ℓ^q の閉集合であることを示せ。
(ii) $\ell^q \setminus \ell^p$ は ℓ^q で密であることを示せ。
(iii) ℓ^p は ℓ^q のやせた集合であることを示せ。

問 6.9. 局所コンパクト空間はやせていないことを示せ。ヒント：しぼり出す集合としてコンパクト集合を取る。

定理 6.10 (Principle of Uniform Boundedness)**.** V をバナッハ空間、W をノルム空間とする。有界線型写像の集まり $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(V, W)$ に対して、

$$\sup\{\|Tv\|_W; T \in \mathcal{B}\} < \infty$$

がすべての $v \in V$ で成り立てば、

$$\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{B}\} < \infty$$

である。（見かけ上弱い条件から強い条件がでる。）

Proof. バナッハ空間 V の閉集合列を

$$F_n = \{v \in V; \|Tv\| \leq n,\ \forall T \in \mathcal{B}\}$$

で定めると、仮定より $V = \bigcup_{n \geq 1} F_n$ となるので、$B_r(v) \subset F_n$ となる、$n \geq 1$, $r > 0$, $v \in V$ が存在する。このとき、$B_{r/n}(v/n) \subset T^{-1}[B]$ であるので、$\|T\| \leq 2n/r$ となる。 □

つぎは、後ほど、スペクトル分解定理のところでも使う。

系 6.11 (Banach-Steinhaus)**.** 有界線型写像列 $T_n : V \to W$ に対して、各 $v \in V$ で $\{T_n v\}$ が収束するならば、

$$V \ni v \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n v = Tv$$

は有界線型写像で、不等式 $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| < \infty$ が成り立つ。

Proof. まず、$\{T_n v\}_{n \geq 1}$ がノルム収束することから、$\{\|T_n v\|; n \geq 1\}$ は有界であり、一様有界性定理により $\sup\{\|T_n\|; n \geq 1\} < \infty$ となることに注意する。つぎに、不等式

$$\|T_n v\| \leq \|T_n\|\,\|v\|$$

で n について下極限をとり、$\liminf \leq \limsup$ と合わせた

$$\|Tv\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n v\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\,\|v\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|T_n\|\,\|v\| \leq \sup\{\|T_n\|; n \geq 1\}\,\|v\|$$

から、$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| < \infty$ を得る。 □

問 6.10. Regard e^{int} as a linear functional on $L^1(\mathbb{R})$ for $n = 1, 2, \ldots$. Then

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{int} f(t)\, dt = 0$$

for $f \in L^1(\mathbb{R})$, whereas $\|e^{in(\cdot)}\|_\infty = 1$.

有界作用素列の収束三態:

ノルム収束 (norm convergence)

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

強収束 (strong convergence) 各 $v \in V$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n v - Tv\|_W = 0.$$

弱収束 (weak convergence) 各 $v \in V$ と $w^* \in W^*$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \langle w^*, T_n v - Tv \rangle = 0.$$

例 6.12. 有界作用素の積が強収束に関して連続であること。U, V, W をバナッハ空間とし、作用素列 $\{S_n\} \subset \mathcal{B}(U, V)$, $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(V, W)$ がそれぞれ $S \in \mathcal{B}(U, V)$, $T \in \mathcal{B}(V, W)$ に強収束するものとする。このとき、$\{T_n S_n\}$ は、TS に強収束する。一様有界性定理により、$\|T_n\|$ が有界であることに注意。

例 6.13. 可測関数 f が、$fL^q(\Omega, \mu) \subset L^1(\Omega, \mu)$ であれば、$f \in L^p(\Omega, \mu)$ となること。双対性 $(L^q)^* = L^p$ を使う。

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } |x| \leq n \text{ and } |f(x) \leq n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし、有界線型汎関数 $\phi_n : L^q \to \mathbb{C}$,

$$\phi_n(h) = \int f_n(x) h(x) \, \mu(dx)$$

を考えると、一様有界性定理により

$$\phi(h) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(h) = \int f(x) h(x) \, \mu(dx)$$

が有界汎関数となり、これから $f \in L^p$ がわかる。

次は、Banach-Steinhaus の応用と称して時に取り上げられる小ネタであるが、それほど意味のあるものかどうか。ただ、これまでに用意した道具を使うよい練習にはなる。

例 6.14. 周期 2π の連続関数のつくるバナッハ空間を C で表す。$f \in C$ に対して、そのフーリエ係数

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt$$

を C 上の線型汎関数と見たものを $\phi_n(f)$ と書く。そして、$\Phi_n = \sum_{k=-n}^{n} \phi_k$ と置くと、

$$\Phi_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t)\, dt$$

となる。ここで、

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-int} = \frac{\sin((2n+1)t/2}{\sin t/2}$$

である。上の積分表示から（$C^* = L^1[-\pi, \pi]$)

$$\|\Phi_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt$$

となるので、$D_n(t)|$ を下から評価することで、$\lim_{n\to\infty} \|\Phi_n\| = \infty$ を得る。これから、極限 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k$ をもたない $f \in C$ の存在がわかる。

定理 6.15 (開写像定理)**.** バナッハ空間 V からバナッハ空間 W への有界線型写像 T が全射であるならば、開集合の T による像は開集合である。

Proof. 原点を中心とした閉球 $\overline{B}_r(0)$ を表す記号として、

$$V_r = \{v \in V; \|v\| \leq r\}, \quad W_r = \{w \in W; \|w\| \leq r\}$$

を使うことにして、すべての $r > 0$ に対して、$W_\epsilon \subset T(V_r)$ である $\epsilon > 0$ が見つかればよい。（原点以外での開写像性は、平行移動するだけ。）線型写像はスカラー倍を保つので、どれか一つの r に対してわかれば十分。

さて、T が全射であることから、$W = \bigcup_{n\geq 1} \overline{T(V_n)}$ となるので、ベールの定理より、どれか一つは内点を含む。スカラー倍を調整することで $\overline{T(V_1)}$ が内点を含むことがわかる。$\overline{B}_r(b) \subset \overline{T(V_1)}$ ($b \in W$, $r > 0$) とする。このとき、

$$W_r \subset \frac{1}{2}(\overline{B}_r(b) + \overline{B}_r(-b)) \subset \overline{T(V_1)}$$

である。そこで、次が示せれば証明が完了する。

$$W_{(1-\delta)r} \subset T(V_1), \quad 0 < \delta < 1.$$

勝手な $w \in W_r$ と $0 < \delta < 1$ に対して、$w_0 = T(v_0) \in T(V_1)$ を $\|w - w_0\| \leq \delta r$ であるように取る。次に、$W_{\delta r} \subset \overline{T(V_\delta)}$ に注意して、$w_1 = T(v_1) \in T(V_\delta)$ を $\|w - w_0 - w_1\| \leq \delta^2 r$ であるように取る。以下、帰納的に $w_n = T(v_n) \in T(V_{\delta^n})$ を

$$\|w - w_0 - w_1 - \cdots - w_n\| \leq \delta^{n+1} r$$

であるように取る。このとき、$v = \sum_{n\geq 0} v_n \in V$ は、

$$\|v\| \leq \sum_{n\geq 0} \delta^n = \frac{1}{1-\delta}$$

であり、$w = T(v)$ をみたすので、

$$W_r \subset \frac{1}{1-\delta} T(V_1)$$

が示された。

$\square$

例 6.16. 有限次元ベクトル空間の上の 2 つのノルムは常に同値であった。無限次元空間では、これは成り立たないのであるが、完備なノルムに限定すると正しい。実際、$\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|''$ という V 上の 2 つのノルムが完備であったとすると、$\|v\| = \|v\|' + \|v\|''$ も完備なノルムとなり、V の恒等写像は、$(V, \|\cdot\|)$ から $(V, \|\cdot\|')$ への連続な全単射となる。これが開写像であることから、逆写像も連続となるので、$\|v\| \leq M\|v\|'$ となる定数 $M > 0$ が存在し、2 つのノルムの同値性がわかる。

例 6.17. バナッハ空間の直和について。直和には、外的なものと内的なものの 2 種類がある。まずは、外的な直和から。2 つのバナッハ空間 E, F に対して、その直和 $E \oplus F$ にノルム $\|x \oplus y\| = \|x\| + \|y\|$ を定めると完備であるので、バナッハ空間となる。直和に入れるノルムとしては他にも色々考えられるが、それが完備である限り、すべて同値である。

次に、内的な直和について考えよう。バナッハ空間 V の 2 つの閉部分空間 E, F が、$E \cap F = \{0\}$ かつ $V = \{x + y; x \in E, y \in F\}$ を満たすとする。このとき、$E \oplus F \ni x \oplus y \mapsto x + y \in V$ は、バナッハ空間の位相同型を与える。

問 6.11. 開写像定理の証明の記号で、$T(V_1)$ が閉集合とならない例を作れ。ヒント：双対定理が成り立つ空間（ヒルベルト空間など）では作れない。

問 6.12. フーリエ変換は、$L^1(\mathbb{R})$ から $C_0(\mathbb{R})$ への有界線型写像を定め、シュワルツ空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に制限すると、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ への全単射を与えることが知られている。$\{\widehat{f}; f \in L^1(\mathbb{R})\}$ が $C_0(\mathbb{R})$ に一致しないことを示せ。一致すれば、開写像定理により、$\|\widehat{f}\|_1 \leq C\|f\|_\infty$ となる定数 $C > 0$ があることになり、$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} h(x-k)$ $(h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ に対して、$\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ および $\widehat{f_n}(\xi) = D_n(\xi)\widehat{h}(\xi)$ であることに注意す

れば、

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi |D_n(x)|\,dx &\geq \sum_{k=1}^n \int_{2\pi(k-1)/(2n+1)}^{2\pi k/(2n+1)} \frac{|\sin((2n+1)x/2)|}{\sin x/2}\,dx \\
&\geq \sum_{k=1}^n \int_{2\pi(k-1)/(2n+1)}^{2\pi k/(2n+1)} \frac{|\sin((2n+1)x/2)|}{\sin k\pi/(2n+1)}\,dx \\
&\geq \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin\theta|}{\sin k\pi/(2n+1)}\,d\theta \\
&= \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^n \frac{2}{\sin k\pi/(2n+1)} \geq \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.
\end{aligned}
$$

そこで、h を $|\widehat{h}(\xi)| \geq 1$ $(0 \leq \xi \leq \pi)$ であるように取れば、

$$
\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \|\widehat{f_n}\|_1 \leq C\|f_n\|_\infty \leq C\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty
$$

となって、矛盾である。

定理 6.18 (閉グラフ定理)**.** *バナッハ空間 V からバナッハ空間 W への線型写像 T を用意する。点列 $\{v_n\}$, $\{Tv_n\}$ の極限に関して次の条件について考える。*

(i) $\lim_n v_n$ が存在する。

(ii) $\lim_n Tv_n$ が存在する。

(iii) $\lim_n Tv_n = T(\lim_n v_n)$ である。

もし、条件 *(i), (ii)* から条件 *(iii)* が従うならば、T は有界である。

Proof. 線型写像 $T : V \to W$ のグラフを $G(T) = \{v \oplus Tv \in V \oplus W; v \in V\}$ で定める。これは、直和空間 $V \oplus W$ の線型部分空間であるが、一般には閉集合にならない。閉集合であるという条件が、「(i), (ii) ならば (iii) である」という性質に他ならない。すなわち、定理の仮定は、T のグラフが閉集合であること。このとき、$G(T)$ は、$V \oplus W$ の閉部分空間として、バナッハ空間である。一方、線型写像 $G(T) \ni v \oplus Tv \mapsto v \in V$ は連続かつ全単射であるので、その逆写像 $V \ni v \mapsto v \oplus Tv \in G(T)$ も連続であり、したがって $V \ni v \mapsto Tv \in W$ も連続となる。 □

問 6.13. 閉グラフ定理を使って次を示せ。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が $(\xi|T\xi) \in \mathbb{R}$ $(\xi \in \mathcal{H})$ を満たせば、T は有界である。

7 バナッハ空間における双対関係

双対定理の成否と無関係にバナッハ空間とその双対空間の関係は奥が深い。ここではこれにまつわる基本的なところをいくつか。対形式 (pairing) の記号：$\phi(x) = \langle x, \phi \rangle$ なぜか順番をひっくり返しに書くことが多い。まず、弱い位相の記述を押さえておく。X の部分集合 B に対して、$\|B\| = \sup\{\|x\|; x \in B\}$ とし、$\|B\| < \infty$ である集合を有界集合と呼ぶ。$X_r = \{x \in X; \|x\| \leq r\}$ という記号を使えば、$\|B\| = \inf\{r > 0; B \subset V_r\}$ である。

X^* の部分集合についても同様。X の有界集合 B に対して、X^* の半ノルムを

$$\|\phi\|_B = \sup\{|\langle x, \phi \rangle|; x \in B\}$$

で定める。同様にして X^* の有界集合 B^* に対して、

$$\|x\|_{B^*} = \sup\{|\langle x, \phi \rangle|; \phi \in B^*\}$$

とおく。X^* の弱*位相 (weak* topology) を半ノルムの集まり $\{\| \cdot \|_F\}$ で定める。ここで、F は X の有限部分集合すべてを動く。同様に、X^* の有限部分集合 F^* を使って、X の弱位相 (weak topology) を半ノルムの集まり $\{\| \cdot \|_{F^*}$ で定める。これは、形式的には同等であるが、双対性 $X^{**} = X$ が成り立たない場合には、際立った違いを見せる。

8 ヒルベルト空間上の線型作用素

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ について考える。恒等作用素を $I_{\mathcal{H}}$ あるいは単に I で表す。とりあえず $\mathcal{H}$ は有限次元であるとして、その正規直交基底 $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$ を用意すれば、関係

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i, \qquad (Te_1, \dots, Te_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

により、T の行列表示 $[T] = (t_{ij})$ を得る。この対応は、

$$[S + T] = [S] + [T], \qquad [ST] = [S][T]$$

を満たすので、$\mathcal{H}$ 上の線型作用素の代数構造は行列のそれと同じである。

問 8.1. これを確かめよ。

複素数 λ が線型作用素 T の**固有値** (eigenvalue) であるとは、次の同値な条件を満たすことであった。

(i) $T\xi = \lambda\xi$ となるベクトル $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$ がある。
(ii) 作用素 $\lambda I - T$ は逆をもたない。

線型作用素の構造を論じる上で固有値の概念はとりわけ重要である。そこで、同様の考えを「無限サイズ」の行列についても適用してみようというのが、以下の内容である。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が無限次元である場合には、上の二つの条件には大きな隔たりがある。そこで、条件 (i) をみたす場合を固有値、条件 (ii) をみなす複素数を**スペクトル** (spectrum) と呼んで区別する。また T のスペクトル全体を $\sigma(T)$ で表し T のスペクトル集合と呼ぶ。固有値はスペクトルであるが、逆は必ずしも正しくない。

例 8.1. 線型作用素 $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ を $(Tf)(t) = tf(t)$, $0 < t < 1$ で定義すると、$\sigma(T) = [0,1]$ であるが、T の固有値は存在しない。

問 8.2. これを確かめよ。

「固有値」に関連するもう一つの問題として、不変部分空間の存在と分類がある。$\mathcal{H}$ の（閉）部分空間 $\mathcal{K}$ が、

$$\xi \in \mathcal{K} \Longrightarrow T\xi \in \mathcal{K}$$

という性質を持つとき、T の**不変部分空間** (invariant subspace) であるという。$\mathcal{H}$ が有限次元で、T が異なる固有値を次元の数だけもつならば、T の不変部分空間と $\sigma(T)$ の部分集合との間には、一対一の対応がある。

可算無限次元ヒルベルト空間の場合に、すべての有界線型作用素が自明でない不変部分空間をもつかどうかは、今も未解決の問題 (invariant subspace problem) である。

命題 8.2. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における線型作用素 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ のノルムは、内積を使って次のように表すことができる。

$$\|T\| = \sup\{|(\xi|T\eta)|; \|\xi\| \leq 1, \|\eta\| \leq 1\}.$$

線型作用素 T で $\|T\| < \infty$ であるものを**有界作用素** (bounded linear operator) といって、$\mathcal{H}$ における有界作用素全体を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で表すことは、バナッハ空間のときと同じ。

例 8.3. $\mathcal{H} = \ell^2$ とし、有界数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ に対して、$(A\xi)_n = a_n\xi_n$ とおくと、$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ となり、$\|A\| = \sup\{|a_n|; n \geq 1\}$ である。

問 8.3. 上の例で、非有界数列 $\{a_n\}$ に対して A を定義しようとしても無理である、すなわち $\xi \in \ell^2$ で $A\xi \notin \ell^2$ となるものが必ず存在する。これを確かめよ。

補題 8.4. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ からヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ への有界線型写像 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ に対して、有界線型写像 $T^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ を関係

$$(\eta|T\xi) = (T^*\eta|\xi), \qquad \xi \in \mathcal{H}, \eta \in \mathcal{K}$$

により定めることができる。これを T の**エルミート共役** *(hermitian conjugate)* あるいは**随伴** *(adjoint)* という。

Proof. まず、Fréchet-Riesz を復習。与えられた $\eta \in \mathcal{K}$ に対して、線型汎関数

$$\mathcal{H} \ni \xi \mapsto (\eta|T\xi)$$

は有界であるので、フレッシェ・リースの定理により、$\xi' \in \mathcal{H}$ で、

$$(\eta|T\xi) = (\xi'|\xi)$$

となるものが存在する。対応 $\eta \mapsto \xi'$ は線型なので、線型写像 T^* を定める。 □

Remark 16. 共役は「きょうやく」と読む。「きょうえき」ではない。もともとは共軛という字を使っていた。軛の意味は、馬車などで馬を連結する棒のようなものを指すらしい。ということで、その意味を汲み取って、「エルミート繋がり」とでも呼んでしかるべきものである。因みに、文法用語で「活用」のことも conjugate という。やはり、繋がっているということだ。中国由来の言葉の使用を控えるのが、話し言葉には似つかわしい。

問 8.4. 実は、上の補題の逆が成り立つ。すなわち、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における線型作用素 T に対して、同じく $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 S で $(S\xi|\eta) = (\xi|T\eta)$ $(\xi, \eta \in \mathcal{H})$ を満たすものが存在すれば、T は有界であり、$S = T^*$ となる。これを T のグラフが閉集合であることを確かめることで示せ。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が有限次元のときには、正規直交基底 $\{e_j\}$ を用意すれば、$\mathcal{H}$ のベクトル ξ に対して、その成分表示

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が得られ、さらに線型作用素 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ に対しても、

$$Te_j=\sum_{i=1}^n t_{ij}e_i,\quad (Te_1,\dots,Te_n)=(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ t_{n1} & & t_{nn}\end{pmatrix}$$

によって行列表示を得る。これらを $[\xi]$, $[T]$ で表せば、

$$(\xi|T\eta)=[\xi]^*[T][\eta]$$

となるので、通常の行列の場合の式に帰着する。すなわち、$[T^*]=[T]^*$.

命題 8.5 (エルミート共役の性質)**.** 有界作用素 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、$T\mapsto T^*$ は***演算** *(*-operation)* を定める。$(ST)^*=T^*S^*$, $(T^*)^*=T$ など。また、次が成り立つ。$\ker(T)=(T^*\mathcal{H})^\perp$. *演算が指定された代数を ***代数** *(*-algebra)* という。

定義 8.6. ヒルベルト空間上の有界作用素 T は、$T=T^*$ であるとき**エルミート作用素** (hermitian operator)、$(\xi|T\xi)\geq 0$ $(\xi\in\mathcal{H})$ であるとき**正作用素** (positive operator)、$T^*T=I=TT^*$ であるとき**ユニタリー作用素** (unitary operator)、$T=T^*=T^2$ であるとき**射影** (projection)、$TT^*=T^*T$ であるとき**正規作用素** (normal operator) と呼ばれる。

有界エルミート作用素の間の順序を、$A\leq B \iff B-A$ が正作用素、で定める。

線型写像 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ が、$T^*T=I_{\mathcal{H}}$ をみたすとき**等長写像** (isometry) 、$T^*T=I_{\mathcal{H}}$ かつ $TT^*=I_{\mathcal{K}}$ をみたすときユニタリー写像 (unitary map) と称する。ユニタリー写像は全単射であるので、ユニタリー同型とも呼ばれる。

問 8.5. エルミート作用素が $A\leq B$ を満たせば、$TAT^*\leq TBT^*$ が有界作用素 T について成り立つ。

問 8.6. $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ がエルミート作用素であるための必要十分条件は $(\xi|T\xi)\in\mathbb{R}$ $(\xi\in\mathcal{H})$ となること。とくに正作用素はエルミート作用素である。

命題 8.7. エルミート作用素 T に対して、$\|T\|=\sup\{|(\xi|T\xi)|;\|\xi\|\leq 1\}$ である。

Proof. 右辺を r と置くと、$r\leq\|T\|$ は当然なので、逆を示す。$\langle\xi,\eta\rangle=(\xi|T\eta)$ がエル

ミート形式であることに注意して、不等式

$$\begin{aligned}4\big|\mathrm{Re}\langle\xi,\eta\rangle\big| &= \big|\langle\xi+\eta,\xi+\eta\rangle - \langle\xi-\eta,\xi-\eta\rangle\big| \\ &\leq r(\|\xi+\eta\|^2 + \|\xi-\eta\|^2) = 2r(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2)\end{aligned}$$

で η を $(\|\xi\|/\|\eta\|)\eta$ で置き換えると $|\mathrm{Re}\langle\xi,\eta\rangle| \leq r\|\xi\|\,\|\eta\|$ を得る。そこで、$\langle\xi,\eta\rangle = |\langle\xi,\eta\rangle|e^{i\theta}$ なる $\theta\in\mathbb{R}$ を使って ξ を $e^{i\theta}\xi$ に代えれば、$|(\xi|T\eta)| \leq r\|\xi\|\|\eta\|$ が分かる。 □

命題 8.8. 射影作用素 E と $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{E}$ の間には、関係 $\mathcal{E} = E\mathcal{H}$ により、一対一の対応がある。さらに、$\mathcal{F} = F\mathcal{H}$ とするとき、$\mathcal{E}\subset\mathcal{F} \iff E\leq F$, $\mathcal{F} = \mathcal{E}^\perp \iff E+F = I$ である。

命題 8.9. 線型写像 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ が等長写像であるための必要十分条件は

$$(T\xi|T\eta) = (\xi|\eta), \quad \forall\xi,\eta\in\mathcal{H}.$$

等長写像 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ がユニタリー写像であるための必要十分条件は、全射であること。

例 8.10. ヒルベルト空間 ℓ^2 で、**シフト作用素** (shift operator) を

$$(S\xi)_n = \begin{cases}\xi_{n-1} & (n\geq 1),\\ 0 & (n=0)\end{cases} \iff S\xi = (0,\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$$

で定義すれば、S は等長作用素ではあるがユニタリーではなく、そのエルミート共役は

$$S^*\xi = (\xi_1,\xi_2,\cdots) \quad (\xi = (\xi_0,\xi_1,\cdots)\in\ell^2).$$

例 8.11. 有界作用素 T に対して、T^*T は正作用素である。逆にすべての正作用素はこの形で表されるのであるが、そのためには少し議論が必要。下の方で扱う。

問 8.7. 対角行列 $A = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ は正規作用素を表し、

(i) エルミート行列 $\iff a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$.
(ii) 正行列 $\iff a_1\geq 0,\ldots,a_n\geq 0$.
(iii) ユニタリー行列 $\iff |a_1| = \cdots = |a_n| = 1$.
(iv) 射影行列 $\iff a_1,\ldots,a_n\in\{0,1\}$.

命題 8.12 (有界作用素のノルムの性質)**.**

(i) $\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$.
(ii) $\|T^*\| = \|T\|$.

(iii) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

問 8.8. 上の命題を確かめよ。

Remark 17. *代数上のノルムが上記性質をみたすとき、C*ノルムと称する。完備な C*ノルムが指定された*代数を C*代数という。C*代数の基本定理の一つが、次の表現定理である。

どのような C*代数 A に対しても、*代数の準同型 $\phi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ でノルムを保存するものが存在する。これについては、作用素環の本か、気のきいた関数解析の本を見る。Hahn-Banach が使われる。

例 8.13. 対角行列 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ について、

$$\|A\| = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}.$$

これとノルムのユニタリー不変性を使うと、正規行列 A に対して、

$$\|A\| = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ は } A \text{ の固有値 }\}.$$

さらに上の命題の (iii) を使えば、一般の行列 A のノルムは、A^*A の最大固有値の平方根に一致することもわかる。

例 8.14. 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

のノルムは、

$$A^*A = \begin{pmatrix} |a|^2 & \overline{a}b \\ a\overline{b} & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix}$$

の固有値を計算して、

$$\|A\|^2 = |a|^2 + |b|\frac{|b| + \sqrt{4|a|^2 + |b|^2}}{2}.$$

問 8.9. たまには易しい問を。ユニタリー作用素 U に対して、$\|UTU^*\| = \|T\|$ である。

極分解 (polar decomposition)

複素数の極分解 $z = re^{i\theta}$ の有用性は良く知られているところであるが、同様の分解は、広くヒルベルト空間における作用素についても考えることができ、同じく役に立つ。

そのために、有界作用素の多項式の極限としての作用素関数（解析関数算 analytic functional calculus という）を素朴な形で導入しておこう。べき級数 $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ に対して、有界作用素 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $\sum_n |f_n| \|T\|^n < \infty$ を満たすとき、$f(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を

$$f(T) = f_0 I + f_1 T + f_2 T^2 + \cdots$$

で定める。右辺の作用素級数がノルム収束することは、

$$\|\sum_{k=m}^{n} f_k T^k\| \leq \sum_{k=m}^{n} |f_k| \|T\|^k \to 0 \ (m \to \infty)$$

からわかる。さらに、べき級数 $g(z) = \sum_n g_n z^n$ についても $\sum_n |g_n| \|T\|^n < \infty$ であれば、積級数 $h(z) = f(z)g(z) = \sum_n h_n z^n$ においても $\sum_n |h_n| \|T\|^n < \infty$ を満たし、$h(T) = f(T)g(T)$ となる。

証明のポイントは、絶対収束級数においては和の順序を変えても級数の値が一定であるという総和可能性にある。ということで、その要点を確認しておこう。

複素数の集まり $\{c_j\}_{j\in J}$ が**総和可能**[*24] (summable) であるとは、

$$\sum_{j\in J} |c_j| < \infty$$

となること。これは、正確には、

$$\left\{ \sum_{j\in F} |c_j|; F \text{ は } J \text{ の有限部分集合} \right\}$$

が有界であるということ。このとき、$c_j \neq 0$ となる $j \in J$ の個数は高々可算であり、

$$\sum_{j\in J} c_j \in \mathbb{C}$$

は、和を計算する順序によらずに定まり、不等式

$$\left| \sum_{j\in J} c_j \right| \leq \sum_{j\in J} |c_j|$$

をみたす。

問 8.10. 以上を確かめよ。

同様のことは、有界作用素の集まり $\{A_j\}_{j\in J}$ についても成り立つ。すなわち、$\sum_{j\in J} \|A_j\| < +\infty$ であれば、

$$\sum_{j\in J} A_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

[*24] このブルバキ好みの総和法は、von Neumann の無限テンソル積についての論文に始まるもので、級数論の基本というべきものであるにもかかわらず、数学科の学生でも知らずに卒業しかねないという現実。

は、和を計算する順序によらずに定まり、さらに不等式

$$\left\| \sum_{j \in J} A_j \right\| \leq \sum_{j \in J} \|A_j\|$$

をみたす。

問 8.11. 二重級数 $\sum f_m g_n T^{m+n}$ の組み換えにより、等式 $h(T) = f(T)g(T)$ を示せ。

定理 8.15. 正作用素 A に対して、正作用素 B で $A = B^2$ となるものがちょうど一つ存在する。さらに、$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が A と積交換すれば、B とも積交換する。以後これを $B = A^{1/2}$ と書き、A の平方根と呼ぶ。

Proof. 正数倍の調整により、$\|A\| \leq 1$ として良い。このとき、命題 8.7 から $I - A \geq 0$ かつ $\|I - A\| \leq 1$ であり、べき級数展開 $\sqrt{1-z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ は $|z| \leq 1$ で絶対収束する（例 3.12）ので、$B = I + c_1(I - A) + c_2(I - A)^2 + \cdots$ はノルム収束しエルミート作用素を定める。さらに、B^2 は、$(\sqrt{1-z})^2 = 1 - z$ に $z = I - A$ を代入したものとして、A に一致する。B が正作用素であることは、$c_n < 0$ $(n \geq 1)$ に注意して

$$(\xi|B\xi) = (\xi|\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\xi|(I - A)^n\xi) \geq (\xi|\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\xi|\xi) = 0$$

から分かる。また、$TA = AT$ のとき、$TB = BT$ であることは、B のべき級数表示から即座に従う。

最後に一つしかないことを示す。正作用素 C も $C^2 = A$ を満たすとする。$CA = AC$ より $CB = BC$ となることに注意すれば、

$$(B-C)B(B-C)+(B-C)C(B-C) = (B-C)(B+C)(B-C) = (B^2-C^2)(B-C) = 0$$

である。一方 $(B - C)B(B - C) \geq 0$, $(B - C)C(B - C) \geq 0$ であることから、

$$(\xi|(B - C)B(B - C)\xi) = 0 = (\xi|(B - C)C(B - C)\xi) \quad (\xi \in \mathcal{H}),$$

すなわち $(B - C)B(B - C) = 0 = (B - C)C(B - C)$ が分かり、したがって $(B - C)^3 = (B - C)B(B - C) - (B - C)C(B - C) = 0$ を得る。とくに $(B - C)^4 = 0$ であるから、$0 = \|(B - C)^4\| = \|(B - C)^2\|^2 = \|B - C\|^4$、すなわち $B = C$ である。 □

定義 8.16. 有界写像 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ に対して、$\ker T \subset \mathcal{H}$ の直交補空間への射影を T の右支え (right support) と呼び、$[T]$ と書く。また、T の左支え (left support) を $[T^*]$ で定める。有界写像 T で $TT^*T = T$ となるものを部分等長という。

問 8.12. T の右支え、左支えは、$TE = T$, $FT = T$ を満たす射影 $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $F \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ の中で最小のものとして特徴づけられる。

問 8.13. 部分等長写像 T については、T^* も部分等長であり、$T^*T = [T]$, $TT^* = [T^*]$ が成り立ち、T の部分空間 $[T]\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ への制限は、$[T]\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への等長写像となる。

定理 8.17. 有界写像 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ は、正作用素 $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と部分等長写像の積 $T = VR$ として表され、さらに条件 $[V] = [R]$ の下で V, R は一つに定まり、$R = (T^*T)^{1/2}$ である。これを T の**極分解** *(polar decomposition)* という。以後、$|T| = (T^*T)^{1/2}$ と書く。

Proof. $T = VR$ かつ $[V] = [R]$ とすると、$T^*T = RV^*VR = R[R]R = R^2$ であるから、$R = (T^*T)^{1/2}$ でなければならない。さらにこのとき、

$$\|R\xi\|^2 = (\xi|R^2\xi) = (\xi|T^*T\xi) = \|T\xi\|^2$$

であるから、対応 $R\xi \mapsto T\xi$ は、$[R]\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への等長写像を定めるので、それを $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への部分等長に拡張したものを V とおけば、$T\xi = VR\xi$ である。 □

系 8.18 (Jordan 分解)**.** 有界エルミート作用素 T は、$T_+T_- = 0$ を満たす正作用素 $T_\pm$ の差 $T_+ - T_-$ で表すことができ、そのような表し方は一つしかない。また $|T| = T_+ + T_-$ が成り立つ。

Proof. T を $[T]\mathcal{H}$ に制限することで、$[T] = I$ として良い。

T の極分解 $T = V|T|$ のエルミート共役から、$V^*V|T|V^*$ も T の極分解を与えるので、$V^* = V$, $V|T|V^* = |T|$ である。V はユニタリーかつエルミートであるから、$E_\pm = (I \pm V)/2$ は互いに直交する射影となり、$I = E_+ + E_-$ を満たす。そこで、$T_\pm = \pm E_\pm T = \pm TE_\pm$ と置けば、求める分解を得る。

一つしかないことは、$T^2 = T_+^2 + T_-^2 = (T_+ + T_-)^2$ より $|T| = T_+ + T_-$ となるので、$T_\pm = (|T| \pm T)/2$ のように定まることからわかる。 □

Remark 18. エルミート作用素のジョルダン分解は、後ほど出てくるスペクトル分解の立場から理解するのが自然ではあるが、このように極分解からも簡単に導くことができるし、これを逆手に取ってスペクトル射影を構成することも可能である。(「竹之内」を見よ。)

課題 6. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界エルミート作用素全体を $\mathcal{R}$ で表し、$\mathcal{R}$ に順序構造を

$$A \leq B \iff (\xi|A\xi) \leq (\xi|B\xi) \quad \forall\xi \in \mathcal{H}$$

で定める。このとき以下のことを考察せよ。

(i) これが実際に順序を定めていること。

(ii) エルミート作用素 B およびエルミート作用素の列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ が、$A_n \leq A_{n+1}$ $(n \geq 1)$ かつ $A_n \leq B$ $(n \geq 1)$ をみたすならば、$\{A_n\}$ は強収束し、$\lim_n A_n \leq B$ が成り立つ。

(iii) $0 \leq A \leq B \Longrightarrow A^2 \leq B^2$ が成り立つかどうか。

線型作用素 C で、$\|C\| \leq 1$ であるものを**収縮** (contraction) と呼ぶ。これは、バナッハの不動点定理で出てきたものよりも弱い条件であるが、同じ言い方をする。この場合の不動点集合は $\ker(C-1)$ ということになる。さて $C\xi = \xi$ としよう。次は、Riesz-Nagy §144 にある。

$$\|\xi\|^2 = (\xi|C\xi) = (C^*\xi|\xi) \leq \|C^*\xi\|\,\|\xi\| \leq \|\xi\|^2$$

から、$(C^*\xi|\xi) = \|\xi\|^2$ となって、

$$\|C^*\xi - \xi\|^2 \leq 2(\xi|\xi) - 2\Re(C^*\xi|\xi) = 0.$$

収縮からなる積と凸結合について閉じている集合 $\mathcal{C}$ を考え、部分空間 $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} \ker(C-1)$ への射影を E で表す。このとき、勝手な $\eta \in \mathcal{H}$ とどのように小さい $\epsilon > 0$ についても、$\|C\eta - E\eta\| \leq \epsilon$ となる $C \in \mathcal{C}$ が見つかる。

上で見たように、$E\mathcal{H}$ は $\mathcal{C}$ で不変であるから、$(E\mathcal{H})^\perp$ も $\mathcal{C}$ 不変。そこで、$\eta \perp E\mathcal{H}$ のとき、$0 \in \overline{\mathcal{C}\eta}$ を言えばよい。$\overline{\mathcal{C}\eta}$ は、凸閉集合であるから、大きさが最小のベクトル η_0 が丁度ひとつある。そして、$C\eta_0 \in \overline{\mathcal{C}\eta}$, $\|C\eta_0\| \leq \|\eta_0\|$ であるから、$C\eta_0 = \eta_0$ となり、η_0 は $E\mathcal{H}$ と $(E\mathcal{H})^\perp$ の両方に入るから $\eta_0 = 0$ である。

9 フーリエ変換

関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ の**フーリエ変換** (Fourier transform) を

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

で定める。ただし、$x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. 可積分とは限らない関数についてもフーリエ変換は様々な形で拡張され使われている。以下でも、$L^2(\mathbb{R}^n)$ に対するフーリエ変換を導入する。

理論上も応用上も極めて重要なフーリエ変換であるが、この定義だけではその実態はなかなか見えないかも知れない。例えば、フーリエ級数とどういう関係にあるのか。正しい

理解のためには、このような定義から出発するのではなく、フーリエ級数からの極限移行としてフーリエ変換を捉えるべきであろうが、ここでは、不本意ながらフーリエ級数の復習をする時間的な余裕がないこと、フーリエ解析の講義ノートにその辺の事情は書いたということもあり、独立した形での説明を試みる。

まず、定義から得られる $\widehat{f}$ の性質を調べてみよう。

命題 9.1 (Riemann-Lebesgue)**.** 可積分関数 f のフーリエ変換 $\widehat{f}$ について、$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ であり、$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ が成り立つ。

Proof. まず、一番簡単なのが不等式で、これは即座にわかる。フーリエ変換が連続関数であることは、押え込み収束定理を使えばこれも即座にわかる（他の方法もある）。工夫が要るのは、無限遠方で消えること。

これもいくつか方法があるが、ここでは $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ が密であること (命題 3.4, 命題 3.8) を使って、$h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\|f - h\|_1 \leq \epsilon$ であるように選び、部分積分を使って得られる

$$i\xi_k \int h(x) e^{-ix\xi}\, dx = \int D_k h(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad D_k = \frac{\partial}{\partial_k}$$

の絶対値をとり、k について和を取ると

$$(|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|)|\widehat{h}(\xi)| \leq \int \sum_{k=1}^n |D_k h(x)|\, dx.$$

これから、

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\widehat{h}(\xi)| = 0$$

がわかる。最初の f については、

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |(\widehat{f} - \widehat{h})(\xi)| + |\widehat{h}(\xi)| \leq \|f - h\|_1 + |\widehat{h}(\xi)| \leq \epsilon + |\widehat{h}(\xi)|$$

で、$|\xi| \to \infty$ とすると分かる。 □

たたみ込みと複素共役についての簡単な等式：

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi), \qquad \overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f^*}(\xi), \quad f^*(x) = \overline{f(-x)}.$$

多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して、

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \prod_{j=1}^n \alpha_j!$$

という記号を導入しておく。これは、比較的標準的なものである。記号の使い方は、例えば、

$$(x_1 + \cdots + x_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha.$$

また、多重指数 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ と $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup\{|x^\alpha D^\beta f(x)|; x \in \mathbb{R}^n\} \in [0, +\infty]$$

とおく。

定義 9.2. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の**シュワルツ空間** [*25](Schwartz space) を

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

で定める。

シュワルツ空間は、フーリエ変換に関して良い振る舞いをする。

定理 9.3.

(i) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であれば、$\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であり、

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

(ii) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であれば、$fg, f * g \in \mathcal{S}$ で、

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}, \qquad \widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Proof. (i)

$$\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|^2)|f(x)|$$

が有界であるから、$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ がわかり、$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ である。これの微分可能性を調べるために、

$$\widehat{f}(\xi + t\eta) - \widehat{f}(\xi) = \int dx f(x) e^{-ix\xi}(e^{-itx\eta} - 1)$$

[*25] フランスの数学者 Laurent Schwartz (1915–2002) に因む。シュワルツの不等式の Hermann Schwarz (1843–1921) と混同せぬよう。こちらはドイツの数学者。

と書いてみて、$\varphi(u)=e^{-iutx\eta}$ に対する表示

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\int_0^1 \varphi''(u)(1-u)\,du$$

を使うと、

$$\widehat{f}(\xi+t\eta)=\widehat{f}(\xi)-it\int f(x)x\cdot\eta e^{-ix\xi}\,dx-t^2\int dx f(x)(x\cdot\eta)^2e^{-ix\xi}\int_0^1 due^{-itux\eta}(1-u)$$

である。最後の項は、

$$\frac{t^2}{2}\int |f(x)|(x\cdot\xi)^2\,dx$$

で押さえられるので、$\widehat{f}$ は微分可能であり、

$$D_k\widehat{f}(\xi)=-i\int f(x)x_ke^{-ix\xi}\,dx$$

となる。以上の議論を繰り返せば、$\widehat{f}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であり、

$$D^\alpha\widehat{f}(\xi)=(-i)^{|\alpha|}\int f(x)x^\alpha e^{-ix\xi}\,dx$$

がわかる。

次に、部分積分を繰り返すことで得られる

$$\xi^\alpha\widehat{f}(\xi)=(-i)^{|\alpha|}\int D^\alpha f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

より、$\widehat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ もわかる。

逆変換の公式は、

$$\begin{aligned}\int d\xi\,e^{ix\xi}\int dy\,f(y)e^{-iy\xi} &= \lim_{r\to+0}\int d\xi\int dy\,f(y)e^{-i(y-x)\xi-r|\xi|^2}\\ &= \lim_{r\to+0}\int dy\int d\xi\,f(y)e^{-i(y-x)\xi-r|\xi|^2}\\ &= \lim_{r\to+0}\left(\frac{\pi}{r}\right)^{n/2}\int dy\,f(y)e^{-|x-y|^2/4r}\\ &= (2\pi)^n\lim_{r\to+0}(\delta_{1/r}*f)(x)\\ &= (2\pi)^nf(x)\end{aligned}$$

と計算する。最後の等式で $\delta_{1/r}$ が近似デルタ関数であることを使った。

(ii) $fg \in \mathcal{S}$ であることは、シュワルツ空間の定義からわかる。最初の等式は、

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\xi) &= \int dx \int dy\, f(x-y)g(y)e^{-ix\xi} \\ &= \int dy \int dx\, f(x-y)g(y)e^{-ix\xi} \\ &= \int dy \int du\, f(u)g(y)e^{-i(u+y)\xi} \\ &= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

これに逆変換を施せば二番目の等式がわかり、それと同時に $f*g$ が、$\widehat{f}\widehat{g} \in \mathcal{S}$ のフーリエ変換として、$\mathcal{S}$ に入ることもわかる。($f*g \in \mathcal{S}$ であることは直接確かめることもできる。) □

Remark 19. 物理学者のディラック[*26]は、上の証明で使った関係式を

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\, dx = 2\pi\delta(\xi)$$

と簡潔かつ力強く表現した[*27]。

定理 9.4 (Plancherel formula)**.** $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ のとき、$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ であり、$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$(\widehat{f}|\widehat{g}) = (2\pi)^n (f|g).$$

Proof. 次のように計算する。最後の行では、逆変換の公式を使う。$f \in L^1 \cap L^2$ のとき、$(\widehat{f}|\widehat{f}) = (2\pi)^n(f|f)$ を示せばよい。まず、

$$\begin{aligned}0 \le |\widehat{f}(\xi)|^2 &= \int dy \int dx\, \overline{f(x)} f(y) e^{-i(y-x)\xi} \\ &= \int du\, e^{-iu\xi} \int dy\, f^*(u-y)f(y) \\ &= \int du\, e^{-iu\xi}(f^* * f)(u)\end{aligned}$$

に注意して、単調収束定理を使えば、

$$\int d\xi |\widehat{f}(\xi)|^2 = \lim_{r\to+0} \int d\xi e^{-r|\xi|^2} \int du\, e^{-iu\xi}(f^* * f)(u).$$

[*26] P.A.M. Dirac (1902–1984)

[*27] Lord Kelvin にならって、「物理学者とは、この等式を $1+1=2$ と同じくらい自在に扱える人種のことである。」といってみる。ほめ言葉なり。

ここで、$f^* * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に注意して、積分の順序を交換すると、

$$\begin{aligned}\int du\,(f^* * f)(u)\int d\xi\, e^{-r|\xi|^2 - iu\xi} &= \left(\frac{\pi}{r}\right)^{n/2}\int du\,(f^* * f)(u)e^{-|u|^2/4r}\\ &= (2\pi)^n\int \delta_{1/r}(u)(f^* * f)(u)\,du\end{aligned}$$

となる。そこで、$f^* * f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ に注意して極限 $r \to +0$ をとると、

$$(\widehat{f}|\widehat{f}) = (2\pi)^n(f^* * f)(0) = (2\pi)^n(f|f).$$

$\square$

系 9.5. 線型写像 $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{F}(f) = (2\pi)^{-n/2}\widehat{f}$ で定めると、$\mathcal{F}$ は、$L^2(\mathbb{R}^n)$ におけるユニタリー作用素に拡張でき、$(\mathcal{F}^2 f)(x) = f(-x)$ $(f \in L^2(\mathbb{R}^n))$ をみたす。

Proof. $\mathcal{F}$ は内積を保存するので、$L^2(\mathbb{R}^n)$ から $L^2(\mathbb{R}^n)$ への等長写像に拡張される。一方、$\mathcal{F}$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1 \cap L^2$ に制限すると、$\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ となるので、$\mathcal{F}$ は全射、すなわちユニタリー作用素となる。$\mathcal{F}^2$ の公式は、$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に制限したところでは、逆変換の公式と同じ内容となり成り立つので、$L^2(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ でも成り立つ。 $\square$

問 9.1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ を確かめよ。

問 9.2. 自然数 n と正数 $\lambda > 0$ について、関数

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\lambda + i\xi)^n}e^{ix\xi}\,d\xi$$

を考える。部分積分を利用して

$$f_{n+1}(x) = \frac{x}{n}f_n(x)$$

を導き、$(\lambda + i\xi)^n$ の無限遠点での減少度とそのフーリエ（逆）変換である f_n の関数としての滑らかさが n と共にどのように変化するか実感せよ。

問 9.3. (i) 支持関数 $1_{[-1,1]}$ のフーリエ変換を求めよ。
(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}$ を求めよ。

直交関数系の完全性

まず、対応 $f(x) \mapsto e^{-x^2/2}f(x)$ が $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$ から $L^2(\mathbb{R})$ へのユニタリー写像を与えることに注意すれば、関数 $e^{-x^2/2}$ に多項式をかけたもの全体 $\mathbb{C}[x]e^{-x^2/2}$ が $L^2(\mathbb{R})$ で密であることを示す問題となる。そこで、$g \in L^2(\mathbb{R})$ が $\mathbb{C}[x]e^{-x^2/2}$ と直交すると仮定して、$g = 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ を示そう。

そのために、関数 $h(x) = e^{-x^2/2}g(x)$ が $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ に属することに注意して、そのフーリエ変換

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-x^2/2}e^{-ix\xi}\,dx$$

を考えると、これは $\xi \in \mathbb{R}$ の連続関数である。一方、右辺の積分は、$\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ に対して意味をもち、ζ の正則関数を定めるので、$\widehat{h}$ は、それの実軸への制限であることがわかる。一方、$e^{-ix\zeta}$ のべき級数表示と積分の順序を形式的に交換した表示式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\zeta)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-x^2/2}x^k\,dx$$

は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\zeta|^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|e^{-x^2/2}|x|^k\,dx &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\zeta|^k}{k!} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^{2k}\,dx} \\ &= \pi^{1/4}\|g\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\zeta|^k}{\sqrt{k!}} < \infty\end{aligned}$$

であることに注意すれば、積分と和の順序の交換が保証され、とくに、

$$\widehat{h}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-x^2/2}x^k\,dx = 0$$

がわかる。最後の等式のところでは、g と $e^{-x^2/2}t^k$ が $L^2(\mathbb{R})$ の元として直交することを使った。したがって、$\widehat{h} = 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ である。フーリエ変換が、$L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ へのユニタリー変換の定数倍であることから、$h = 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ がわかり、したがって、$g(x) = e^{x^2/2}h(x)$ は、ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して 0 になる。すなわち、$g = 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ が示された。

問 9.4. $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ が $e^{-x}x^n$ $(n \geq 0)$ と直交すると、$f = 0$ である。これを確かめよ。

課題 7. エルミート関数 $h_n(x)$ を

$$e^{-x^2/2+2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

で定めるとき、以下を示せ。

(i) $e^{x^2/2}h_n(x)$ は n 次の多項式である。

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_m(x)h_n(x)\,dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{m,n}$$

(iii)

$$\mathcal{F}h_n = (-i)^n h_n.$$

10　作用素のスペクトル

作用素値関数 $A(t)$, $a \leq t \leq b$ がノルムに関して連続であるとき、その積分 $\int_a^b A(t)dt$ をリーマン和

$$\sum_{j=1}^{n} A(\tau_j)(t_j - t_{j-1}), \quad \tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$$

の極限として定義することができ、

$$\left| \int_a^b A(t)dt \right| \leq \int_a^b \|A(t)\|dt$$

が成り立つ。

複素平面内の領域（連結開集合）D で定義された有界作用素値関数 $A(z)$ が**解析的** (analytic) であるとは、各 $z_0 \in D$ に対して、z_0 を中心とする開円板 $|z - z_0| < r$ で D に含まれるものが存在し、そこで、

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} A_n(z - z_0)^n$$

という冪級数表示が可能であること。ここで、$\{A_n\}$ は有界作用素の列で

$$\sum_{n\geq 0} \|A_n\||z - z_0|^n < +\infty, \qquad |z - z_0| < r$$

を満たし、関数 $A(z)$ と z_0 に依存して決まる。

作用素値解析関数についても Cauchy の積分定理

$$\oint_C A(z)dz = 0$$

が成り立つ。逆に連続関数 $A(z)$ で Cauchy の積分定理が成り立つものは解析的であり、上の冪級数表示の範囲は、$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} \subset D$ となる**全ての** $r > 0$ に対して有効である。とくに、z_0 と D の境界との距離を d とすれば、

$$\sum_{n \geq 0} r^n \|A_n\| < +\infty, \quad 0 \leq \forall r < d$$

である。

問 10.1. （複素解析の本を参考にして）以上のことを確認する。

有界作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が**可逆** (invertible) であるとは、$AB = BA = I$ となる有界作用素 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在すること。このとき、B は A のみで決まり、$B = A^{-1}$ と書き表される。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界可逆作用素全体を $GL(\mathcal{H})$ であらわすと、これは群になる。

定義 10.1. 有界作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、集合

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \notin GL(\mathcal{H})\}$$

を A の**スペクトル** (spectrum) と呼ぶ。また、

$$r(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$$

を A の**スペクトル半径** (spectral radius) と呼ぶ。

固有値はスペクトルの一部であるが、逆は一般に正しくない。スペクトル・スペクトル半径ともに、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の代数構造だけで決まることに注意しよう。

例 10.2.

(i) 正方行列 A に対しては、$\sigma(A)$ は A の固有値全体の集合に他ならない。

(ii) 有界数列 $(a_n)_{n \geq 1}$ に対して、ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上の有界作用素を $(A\xi)_n = a_n \xi_n$ で定めると、A の固有値は $\{a_n; n \geq 1\}$ であり、$\sigma(A) = \overline{\{a_n; n \geq 1\}}$ となる。とくに、$\sigma(A)$ は $\mathbb{C}$ の勝手なコンパクト集合となり得る。

(iii) ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ の上の有界作用素 A を

$$(A\xi)(t) = t\xi(t)$$

で定めると、$\sigma(A) = [0,1]$ であるが、どれも固有値ではない。

問 10.2. 連続関数 $a(t)$ による掛け算作用素のスペクトルは何か。

問 10.3. $\ell^2(\mathbb{Z})$ におけるエルミート作用素 A を $(Ax)_n = x_{n+1} + x_{n-1}$ で定めるとき、$\sigma(A)$ を求めよ。

問 10.4.

(i) 交換可能な二つの有界作用素 A, B について、$AB \in GL(\mathcal{H})$ であるための必要十分条件は $A, B \in GL(\mathcal{H})$ となること。

(ii) 有界作用素 A の多項式 $f(A)$ のスペクトル集合は

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}$$

で与えられる。

命題 10.3.

(i) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

(ii) $A \in GL(\mathcal{H})$ のとき、$\sigma(A^{-1}) = \sigma(A)^{-1}$.

命題 10.4. エルミート作用素 $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Proof. 作用素の定数倍を調整することで、$iI - A \in GL(\mathcal{H})$ がわかればよい。これは、

$$\|(iI - A)\xi\|^2 = \|\xi\|^2 + \|A\xi\|^2, \quad \xi \in \mathcal{H}$$

であることから、$\ker(iI - A) = \{0\}$ および $(iI - A)\mathcal{H}$ が閉部分空間であることがまずわかり、さらに $\ker(T) = (T^*\mathcal{H})^\perp$ に注意すれば、$(iI - A)\mathcal{H} = \mathcal{H}$ である。したがって、$iI - A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の逆作用素を $(iI - A)\xi \mapsto \xi$ で定めることができる。最後に、逆作用素のノルムが 1 以下であることに注意すればよい。 $\square$

補題 10.5. 有界作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、$\lambda \in \mathbb{C}$ が $\|A\| < |\lambda|$ をみたすならば、$\lambda I - A \in GL(\mathcal{H})$ であり、

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \frac{A^3}{\lambda^3} + \cdots\right).$$

系 10.6. $GL(\mathcal{H})$ は、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の開集合であり、$GL(\mathcal{H}) \ni A \mapsto A^{-1} \in GL(\mathcal{H})$ は連続である。

Proof. $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $B = A(I + A^{-1}(B - A))$ と書きなおせば、$\|B - A\| < 1/\|A^{-1}\|$

のとき、$B \in GL(\mathcal{H})$ であり、

$$\|B^{-1}-A^{-1}\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (A^{-1}(A-B))^n A^{-1} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A^{-1}\|^{n+1} \|B-A\|^n = \frac{\|A^{-1}\|^2 \|B-A\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|B-A\|}$$

となるので、求める連続性が得られる。 □

命題 10.7. 有界作用素 A のスペクトル $\sigma(A)$ は、空でない有界閉集合であり $r(A) \leq \|A\|$ をみたす。さらに、作用素値関数 $(zI - A)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は、$z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ の解析関数である。

Proof. 関数 $\mathbb{C} \ni z \mapsto zI - A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で $GL(\mathcal{H})$ が開集合であることから、スペクトルの補集合 $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ は開集合である。また、$\{|z| > \|A\|\} \subset \rho(A)$ であるから、$r(A) \leq \|A\|$ がわかる。さらに、$\rho(A) \ni z \mapsto (zI - A)^{-1}$ が解析的であることは、逆作用素の等比級数表示からわかる。とくに、$|z| > \|A\|$ のとき

$$(zI - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} A^n$$

であり、$r > \|A\|$ に対して

$$2\pi i I = \sum_{n \geq 0} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z^{n+1}} A^n = \int_{|z|=r} (zI - A)^{-1} dz$$

という表示が得られるので、もし $\sigma(A) = \emptyset$ とすると、この右辺は Cauchy の積分定理により 0 となって矛盾。

□

系 10.8. ユニタリー作用素 $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ に対して、$\sigma(U) \subset \mathbb{T}$.

Proof. $\|U\| = 1$ であるから、$\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1$ であるが、一方

$$\sigma(U)^{-1} = \sigma(U^{-1}) = \sigma(U^*) \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}.$$

□

例 10.9. シフト作用素 S について、S^* の固有値は $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}$ であり、一方 $\|S\| = 1$ から $\sigma(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$ となるので、$\sigma(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$ がわかり、したがって、$\sigma(S) = \overline{\sigma(S^*)} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$ である。

さて、$|\lambda| > \|A\|$ に対して、

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$$

であり左辺は、$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ の解析関数であった。

この右辺の作用素値級数は、

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n} < +\infty$$

であれば総和可能で意味をもち、さらに

$$(\lambda I - A)\left(\sum_{n\geq 0}\lambda^{-n-1}A^n\right) = \sum_{n\geq 0}\lambda^{-n}A^n - \sum_{n\geq 0}\lambda^{-n-1}A^{n+1}$$

も総和可能であるから、和の順序を変えて計算すると、恒等変換 I に一致する。このことから、$\lambda I - A$ は逆をもつことになり、$\lambda \notin \sigma(A)$ がわかる。

まとめると、$0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ が、不等式

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n} < +\infty$$

をみたせば、$\lambda \notin \sigma(A)$ である。対偶を取れば、$\lambda \in \sigma(A)$ に対して、

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n} = +\infty$$

である。そこで、この級数の収束半径とスペクトル半径との関係が問題になる。

補題 10.10. 有界作用素 A について、数列 $\{\|A^n\|^{1/n}\}_{n\geq 1}$ は収束し、その極限値は $\inf\{\|A^n\|^{1/n}; n \geq 1\}$ に一致する。

Proof. $a_n = \log\|A^n\|$ とおくと、$a_{m+n} \leq a_m + a_n$ である。これから、任意の m と $n \geq m$ に対して、$n = mq + r$ と表せば、

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{qa_m + a_r}{mq + r}$$

となって、$n \to \infty$ すなわち $q \to \infty$ の状況を考えると、

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}$$

がわかる。$m \geq 1$ は任意であったから、これから

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{m\geq 1} \frac{a_m}{m}$$

となり、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$$

であることがわかる。 $\square$

これと上のまとめを合わせると、$\lambda \in \sigma(A)$ に対して、$|\lambda| \leq \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ となり、

$$r(A) \leq \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

がわかる。逆の不等式を示すために、まず $r > \|A\|$ に対して、

$$\int_{|\lambda|=r} \lambda^n (\lambda I - A)^{-1} d\lambda = \sum_{k\geq 0} \int_{|\lambda|=r} \frac{\lambda^n}{\lambda^{k+1}} d\lambda A^k = 2\pi i A^n.$$

左辺の積分に、Cauchy の積分定理を使えば、上の関係式は $r > r(A)$ でも正しい。とくに、

$$\|A^n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=r} \|\lambda^n (\lambda I - A)^{-1}\| |d\lambda| \leq M(r) r^{n+1},$$
$$M(r) = \max\{\|(\lambda I - A)^{-1}\|; |\lambda| = r\}$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq r$$

となって、$r > r(A)$ を $r(A)$ に近づけると、逆の不等式も得られる。以上をまとめて、

定理 10.11 (Spectral Radius Formula)**.** 有界作用素 A に対して、

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

である。

系 10.12. 正規作用素 A に対して、

$$\|A\| = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Proof. 正規作用素 B に対して、

$$\|B^2\| = \|(B^2)^* B^2\|^{1/2} = \|(B^* B)^* (B^* B)\|^{1/2} = \|B^* B\| = \|B\|^2.$$

正規作用素 A においては、A^n $(n=2,3,\dots)$ も正規作用素であるので、B のところに、A, A^2, A^4, A^8 を順次代入していけば、

$$\|A^{2^m}\| = \|A\|^{2^m}$$

が得られるので、

$$r(A) = \lim_{m\to\infty} \|A^{2^m}\|^{1/2^m} = \|A\|.$$

□

例 10.13. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値は 1 だけであるので、$\sigma(A) = \{1\}$ であるが、$a \neq 0$ のとき、$\|A\| > 1$.

例 10.14. 有界数列 $(w_n)_{n\geq 0}$ の定める対角作用素を D_w とし、重みつきシフト作用素を $S_w = SD_w$ で定める。このとき、$S_w = D_{sw}S$, $D_wS = S_{S^*w}$ であり、$S_w^n = S^nD_{w(S^*w)\dots(S^{*n}w)}$ より、$\|S_w^n\| = \|w(S^*w)\cdots(S^{*n}w)\|_\infty$ となる。

さらに $|w_0| \geq |w_1| \geq \cdots$ であれば、$\|S_w^n\| = |w_0||w_1|\cdots|w_n|$ より、

$$r(S_w) = \lim_{n\to\infty} \|S_w^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |w_n|$$

がわかる。とくに $|w_n| \downarrow 0$ のときは、$r(S_w) = 0$ すなわち $\sigma(S_w) = \{0\}$ となる。このような作用素を quasi-nilptent という。

また、$|w_n| \downarrow r > 0$ のとき、S_z^* の固有値はすべて単純でその全体は $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < r\}$ に一致する。したがって、$\{\lambda; |\lambda| < r\} \subset \sigma(S_w^*) \subset \{\lambda; |\lambda| \leq r\}$ より $\sigma(S_w) = \overline{\sigma(S_w^*)} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq r\}$ である。

11　スペクトル分解定理

いわゆるスペクトル分解定理を、作用素のボレル関数による拡大定理の自然な帰結として示そう。

定義 11.1. 群の**ユニタリー表現** (unitary representation) とは、群 G から、ユニタリー作用素の作る群 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ への準同型写像 π のことをいう。G が位相群（群演算に適った位相が定められている）のときは、$G \times \mathcal{H} \ni (g,\xi) \mapsto \pi(g)\xi \in \mathcal{H}$ の連続性を要求する。

例 11.2.

(i) ユニタリー作用素 U を一つ用意すれば，加法群 $\mathbb{Z}$ のユニタリー表現 π を、$\pi(n) = U^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ で与えることができる。逆に $\mathbb{Z}$ のユニタリー表現は、この形である。言い換えると、ユニタリー作用素を考えることと $\mathbb{Z}$ のユニタリー表現を考えることは同等の内容をもつ。

(ii) $L^2(\mathbb{R}^n)$ の移動作用素は、加法群 $\mathbb{R}^n$ のユニタリー表現を与える。

問 11.1. 移動作用素による $\mathbb{R}^n$ のユニタリー表現の連続性を確かめよ。

群 G のユニタリー表現があると、各 $\xi \in \mathcal{H}$ から、G 上の関数 φ を

$$\varphi(g) = (\xi|\pi(g)\xi)$$

で定めることができる。このとき、G の有限列 $\{g_k\}_{1\leq k\leq n}$ と複素数列 $\{z_k\}_{1\leq \leq n}$ に対して、

$$0 \leq \left\| \sum_{k=1}^n z_k \pi(g_k)\xi \right\|^2 = \sum_{1\leq j,k\leq n} \varphi(g_j^{-1}g_k)\overline{z_j}z_k$$

であることから、行列

$$\Big(\varphi(g_j^{-1}g_k)\Big)_{1\leq j,k\leq n}$$

は半正定値である。一般に、このような性質をもつ関数を G 上の**正定値関数** *28(positive definite function) という。G が位相群のときは、正定値関数に連続性を要求しておく。

問 11.2. G 上の正定値関数 φ について、(i) $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$, (ii) $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$.

問 11.3. 群 G 上の正定値関数 $\{\varphi(g)\}_{g\in G}$ で $\varphi(e) \neq 0$ (e は G の単位元) であるものが与えられたとき、G のユニタリー表現 $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ とベクトル $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$ が存在し、

$$\varphi(g) = (\xi|\pi(g)\xi)$$

と表示できる。これを示せ。

補題 11.3. 可分バナッハ空間 V 上の線型汎関数列 $\{\varphi_n\}$ が、

$$\sup\{\|\varphi_n\|; n \geq 1\} < \infty$$

を満たせば、部分列 $\{\varphi_{n'}\}$ と $\varphi \in V^*$ で、

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n'}(v) = \varphi(v), \quad \forall v \in V$$

となるものを見つけることができる。

*28 半正定値関数と言わないところに注意。これが、業界の慣習である。

Proof. 単位球の可算密部分集合 $\{v_n\}_{n\geq 1}$ を用意し、次の数列の有界性に注意して

$$\{\varphi_n(v_1)\}, \quad \{\varphi_n(v_2)\}, \ldots$$

が収束するように次々と部分列を取り出して対角線論法を適用する。そうすると、$W = \sum_n \mathbb{C}v_n$ 上の線型汎関数 φ を

$$\varphi(w) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n'}(w)$$

で与えることができ、$\|\varphi\| \leq M = \sup\{\|\varphi_n\|\} < \infty$ であることから、$\varphi \in V^*$ である。最後に、$v \in V$ に対しては、$\|v - w\| \leq \epsilon$ となる $w \in W$ を用意して、

$$|\varphi_{n'}(v) - \varphi(v)| \leq |\varphi_{n'}(v-w)| + |\varphi_{n'}(w) - \varphi(w)| + |\varphi(w-v)| \leq |\varphi_{n'}(w) - \varphi(w)| + 2M\epsilon$$

という評価を使えばよい。 □

系 11.4. コンパクト距離空間 K 上の確率測度の列 $\{\mu_n\}$ に対して、その部分列と確率測度 μ を選ぶことで,

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f(x)\,\mu_{n'}(dx) = \int_K f(x)\,\mu(dx), \quad \forall f \in C(K)$$

が成り立つようにできる。

Proof. バナッハ空間 $C(K)$ が可分であることと Riesz-Radon-Banach の定理による。 □

定理 11.5 (Herglotz [*29]). 加法群 $\mathbb{Z}$ 上の正定値関数 $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ に対して、$[0, 2\pi)$ における測度 μ で、

$$\varphi(k) = \int_{[0,2\pi)} e^{ik\theta}\,\mu(d\theta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

となるものが丁度一つだけ存在する。

Proof. 対応 $z = e^{i\theta}$ により $[0, 2\pi)$ と $\mathbb{T}$ を同一視しておく。自然数 n と実数 θ に対して、

$$0 \leq \sum_{0\leq j,k\leq n} \varphi(j-k)e^{i(k-j)\theta} = \sum_{l=-n}^{n} \varphi(l)e^{-il\theta}(n - |l| + 1)$$

である。そこで、

$$\rho_n(\theta) = \sum_{l=-n}^{n} \varphi(l)e^{-il\theta}\left(1 - \frac{|l|}{n+1}\right)$$

[*29] B. Simon の本 [6] によれば、Carathéodory-Toeplitz の定理と呼ぶのが正しいらしい。

とおき、$[0,2\pi)$ における測度 μ_n を、

$$\mu_n(d\theta) = \frac{1}{2\pi}\rho_n(\theta)\,d\theta$$

で定めると、整数 $|k| \leq n$ に対して

$$\int_{[0,2\pi)} e^{ik\theta}\,\mu_n(d\theta) = \varphi(k)\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right).$$

とくに、$\mu_n(\mathbb{T}) = \varphi(0)$ は n に依らないので、部分列 $\{n'\}$ を適切に選べば、

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_{n'}$$

が $C(\mathbb{T})$ 上の線型汎関数としての各点収束の意味で存在し、上で確かめた関係式より、これが求めるものである。

測度の一意性は、Weierstrass の定理により $\{e^{ik\theta}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の一次結合全体が、$C(\mathbb{T})$ で密であることからわかる。 □

問 11.4. 群 $\mathbb{T}$ 上の正定値連続関数 $\varphi(z)$ は、数列 $\{c_n \geq 0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を使って、

$$\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$$

と表示される。

課題 8 (Bochner の定理)**.** 加法群 $\mathbb{R}$ 上の正定値連続関数 $\varphi(t)$ は、$\mathbb{R}$ 上の測度 μ を使って、

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx)$$

と表示される。このことを以下の手順で示せ。

(i) $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(t)$ に対して、

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(s-t)f(s)\overline{f(t)}\,dsdt \geq 0.$$

(ii) $f(t) = e^{-\epsilon t^2 - itx}$ ($\epsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$) の場合の不等式から、

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)e^{-iux-\epsilon u^2/2}\,du \geq 0.$$

(iii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\rho_\epsilon(x)\,dx = \varphi(t)e^{-\epsilon t^2/2}.$$

(iv) $\mathbb{R}$ 上の測度 μ_ϵ を $\mu_\epsilon(dx) = \rho_\epsilon(x)dx$ で定め、その極限 $\mu = \lim_{\epsilon\to+0} \mu_\epsilon$ を考える。

ベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に付随した $\mathbb{Z}$ 上の正定値関数を $\varphi_\xi(k)$ で表せば、Herglotz の定理から $\mathbb{T}$ 上の測度 μ_ξ で、

$$(\xi|U^k\xi) = \int_{\mathbb{T}} z^k \,\mu_\xi(dz)$$

となるものが丁度一つだけ存在する。

定義 11.6. 位相空間 X に対して、X 上の有界 Borel 可測関数全体を $B(X)$ [*30]で表し、各点ごとの演算で $\mathbb{C}$ 上の*代数構造を入れておく。また、可測関数列 $f_n \in B(X)$ が $f \in B(X)$ に**有界各点収束**するとは、$\|f_n\|_\infty \leq M$ となる正数 M が存在し、各 $x \in X$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

であることと定義する。

次は強力な結果であり、これがわかればあとは何でもやり放題である。

定理 11.7 (Borel 関数算)**.** ヒルベルト空間上のユニタリー作用素 U に対して、*代数の準同型写像 $B(\mathbb{T}) \ni f \mapsto f(U) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で、次のスペクトル条件をみたすものが丁度一つだけ存在する。$\xi \in \mathcal{H}$, $f \in B(\mathbb{T})$ に対して、

$$(\xi|f(U)\xi) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\,\mu_\xi(dz).$$

そして、このとき、関数列 $\{f_n\} \subset B(\mathbb{T})$ が $f \in B(\mathbb{T})$ に有界各点収束するならば、

$$\forall \xi \in \mathcal{H}, \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n(U)\xi - f(U)\xi\| = 0.$$

また、恒等関数 $f(z) = z$ に対しては、$f(U) = U$ である。

Proof. $B(\mathbb{T})$ の*部分代数 A があれば、準同型写像は、A だけで一意的に決まる。実際、実数値関数 f に対しては、スペクトル条件によりエルミート作用素 $f(U)$ が一意的に定まり、一般の関数はそのようなものの一次結合で書けるから。とくに、$z = (z+z^*)/2 + i(z-z^*)/2i$ の場合から、$f(z) = z$ であれば、$f(U) = U$ が従う。

そこで、そのような準同型写像を許す*部分代数 A 全体を $\mathcal{A}$ で表したとき、$B(\mathbb{T}) \in \mathcal{A}$ を示すことになる。

[*30] 位相は異なるが、$C_b(X) \subset B(X)$ に注意する。

Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ を $\mathbb{T}$ に制限する写像は、単射準同型であるから、$\mathbb{C}[z, z^{-1}] \subset C(\mathbb{T}) \subset B(\mathbb{T})$ とみなす。測度 μ_ξ の性質から、$\mathbb{C}[z, z^{-1}] \in \mathcal{A}$ である。

次に $A \in \mathcal{A}$ が与えられたとして、関数列 $\{f_n\} \subset A$ が $f \in B(\mathbb{T})$ に有界各点収束すると仮定するとき、有界作用素の列 $f_n(U)$ は強位相で収束する。実際、$A \ni f \mapsto f(U)$ が星準同型であることとスペクトル条件から、$\xi \in \mathcal{H}$ に対して、

$$\|f_m(U)\xi - f_n(U)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{T}} \Big(f_m^*(z)f_m(z) + f_n^*(z)f_n(z) - f_m^*(z)f_n(z) - f_n^*(z)f_m(z)\Big)\mu_\xi(dz)$$

という表示を得るので $\{f_n(U)\xi\}$ はコーシー列である。また、

$$\|f_n(U)\xi\|^2 = (\xi|f_n^* f_n(U)\xi) = \int_{\mathbb{T}} |f_n(z)|^2 \, \mu_\xi(dz) \leq \|f_n\|_\infty^2 \|\xi\|^2 \leq M^2 \|\xi\|^2$$

であるから、有界作用素 $f(U)$ を

$$\lim_{n\to\infty} f_n(U)\xi = f(U)\xi, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

で定めることができる。そして、この関係式から

$$(\xi|f(U)\xi) = \lim_{n\to\infty} (\xi|f_n(U)\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f_n(z)\, \mu_\xi(dz) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\, \mu_\xi(dz)$$

が成り立つ。

そこで、A に含まれる関数列の有界各点収束極限で得られる星代数を $\overline{A}$ と書けば、各 $f \in \overline{A}$ に対して、$f(U) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を、

$$f(U) = \lim_{n\to\infty} f_n(U)$$

によって与えることができ、その拡張に対してスペクトル条件が維持される。また、この収束が一様有界強収束の意味で成り立つことから、$f, g \in \overline{A}$ に対して

$$\begin{aligned}(fg)(U) &= \lim_{n\to\infty} (f_n g_n)(U) = \lim_{n\to\infty} f_n(U) g_n(U) \\ &= \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(U)\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} g_n(U)\Big) = f(U)g(U).\end{aligned}$$

また、

$$(\xi|f^*(U)\eta) = \lim_{n\to\infty} (\xi|f_n^*(U)\eta) = \lim_{n\to\infty} (f_n(U)\xi|\eta) = (f(U)\xi|\eta),$$

すなわち、$f^*(U) = (f(U))^*$ である。以上により $\overline{A} \in \mathcal{A}$ が示された。

Zorn の補題により、$\mathcal{A}$ の中に包含関係による極大元 B で $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ を含むものが存在する。このとき、$\overline{B} = B$ であるから、$C(\mathbb{T}) \subset \overline{\mathbb{C}[z, z^{-1}]} \subset B$ に注意すれば、B は全ての有界ボレル関数を含み、$B = B(\mathbb{T})$ がわかる。 □

例 11.8. ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{T})$ 上のユニタリー作用素 U を、$(U\xi)(z) = z\xi(z)$ $(|z| = 1)$ で定めると、$\mathbb{T}$ 上で定義された有界ボレル関数 $f(z)$ に対して、

$$(f(U)\xi)(z) = f(z)\xi(z).$$

例 11.9. ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ における移動作用素 T_a $(a \in \mathbb{R}^n)$ と $f \in B(\mathbb{T})$ に対して、

$$\mathcal{F}f(T_a)\mathcal{F}^* : \xi(x) \mapsto f(e^{iax})\xi(x).$$

ただし、$\mathcal{F}$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上のフーリエ変換を表す。

射影測度の構成：$\mathbb{T}$ のボレル集合 S に対して、$E(S) = 1_S(U)$ は射影作用素であり、$S = \sqcup_{n\geq 1} S_n$ であれば、

$$E(S) = \sum_{n\geq 1} E(S_n)$$

が強収束の意味で成り立つ。この意味で、$E(S)$ のことを射影測度と呼ぶ。射影測度を使うと $f \in B(\mathbb{T})$ に対する $f(U) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の表示として

$$f(U) = \int_{\mathbb{T}} f(z)E(dz)$$

という形のものを得る。とくに、恒等関数 $f(z) = z$ にこの表示を適用すると、

$$U = \int_{\mathbb{T}} zE(dz)$$

となる。これを、ユニタリー作用素 u の**スペクトル分解** (spectral decomposition) という。

問 11.5. ルベーグ積分の定義に倣って、上記積分表示を正当化せよ。$f \in B(\mathbb{T})$ を単純関数列 $\{f_n\}$ の有界各点極限として表示し、$f_n(U)$ を E で表す。

射影測度の支えを

$$[E] = \mathbb{T} \setminus \bigcup_{E(O)=0} O$$

で定義する。

命題 11.10.

$$\sigma(U) = [E].$$

Proof. まず、$1_{[E]}(U)$ は、恒等作用素になることに注意すると、$\sigma(U) \subset [E]$ がわかる。逆に $\omega \in [E]$ とすると、$E_n = E(B_{1/n}(\omega) \cap \mathbb{T}) \neq 0$ より、単位ベクトル ξ_n で $E_n\xi_n = \xi_n$ となるものが存在する。このとき、

$$\|(U - \omega I)\xi_n\| = \left\| \int_{\mathbb{T}} (z - \omega) E(dz)\xi_n \right\| = \left\| \int_{B_{1/n}(\omega)} (z - \omega) E(dz)\xi_n \right\| \leq \frac{1}{n}$$

であるので、$U - \omega I$ は有界な逆作用素をもたない。 □

問 11.6 (スペクトル写像定理)**.** 連続関数 $f \in C(\sigma(U))$ を $\sigma(U)$ の外では 0 に拡張することで $f \in B(\mathbb{T})$ とみなす。

$$\sigma(f(U)) = \{f(z); z \in \sigma(u)\}.$$

定理 11.11. 有界エルミート作用素 H に対して、$\sigma(H) \subset \mathbb{R}$ を支えとする $\mathbb{R}$ 上の射影測度が存在し、

$$H = \int_{\mathbb{R}} tE(dt)$$

と書ける。

Proof. 命題 9.4 により、$iI \pm H \in GL(\mathcal{H})$ であることに注意して、H の**ケイリー変換** (Cayley transform) を

$$U = (iI - H)(iI + H)^{-1} = (iI + H)^{-1}(iI - H)$$

で定める。U はユニタリーであることに注意。

　複素数 λ に対して、

$$(iI - H)(iI + H)^{-1} - \lambda I = (i(1 - \lambda)I - (1 + \lambda)H)(iI + H)^{-1}$$

であるから、$\lambda \in \sigma(U)$ という条件は

$$t = i\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \in \sigma(H)$$

と同値になる。すなわち、$\lambda \in \sigma(U)$ は、

$$\lambda = \frac{i - t}{i + t}, \quad t \in \sigma(H)$$

の形であるから、とくに、$-1 \notin \sigma(U)$ である。以上のことから、U のスペクトル分解を

$$H = i(I - U)(1 + U)^{-1} = i(I + U)^{-1}(I - U)$$

に適用することで、H のスペクトル分解を得る。 □

例 11.12. 実数値連続関数 $f(t)$ に対して、$L^2(a,b)$ 上のエルミート作用素 H を

$$(H\xi)(t) = f(t)\xi(t)$$

で定めると、$E(t)$ は、(a,b) の部分集合 $\{s; f(s) \leq t\}$ の特性関数 χ による掛け算作用素

$$(E(t)\xi)(s) = \chi(s)\xi(s)$$

で与えられる。

課題 9. 有界エルミート作用素に対するスペクトル写像定理を定式化し、その証明を与えよ。

課題 10 (スペクトル分解定理 - しつこいバージョン)**.**

(i) ベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対して、$L^2(\mathbb{T}, \mu_\xi)$ と $\overline{\{f(U)\xi; f \in B(\mathbb{T})\}}$ との間の自然な同型を構成し、この部分空間の上で、U は掛け算作用素によって表示されることを示せ。

(ii) 測度空間 (Ω, μ) とユニタリー写像 $\Phi : L^2(\Omega, \mu) \to \mathcal{H}$ および可測関数 $\phi : \Omega \to \mathbb{T}$ が存在し、

$$U\Phi(f) = \Phi(\phi f), \quad f \in L^2(\Omega, \mu)$$

が成り立つようにできることを示せ。

課題 11. 以下の結果 (Stone の定理) を示せ。

加法群 $\mathbb{R}$ の連続ユニタリー表現 $U(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ に対して、*代数の準同型写像 $B(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f(U) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で次の条件をみたすものが丁度ひとつだけ存在する。$(\xi|f(U)\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu_\xi(dx)$. ここで、$\mathbb{R}$ 上の正定値関数 $(\xi|U(t)\xi)$ の Bochner の定理を適用して得られる測度を μ_ξ で表す

そして、このとき、有界関数列 $\{f_n\} \subset B(\mathbb{R})$ が $f \in B(\mathbb{R})$ に各点収束するならば、

$$\forall \xi \in \mathcal{H}, \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n(U)\xi - f(U)\xi\| = 0.$$

また、$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} h(t)\, dt$ $(h \in L^1(\mathbb{R}))$ のとき、$f(U) = \int_{\mathbb{R}} h(t)U(t)\, dt$.

Remark 20. 正定値関数の積分表示というのは、ほとんど群のユニタリー表現そのものなので、ここで用いた手法というのは、ユニタリー表現論ということになる、あまり露骨には書かなかったが。関数解析の教科書で、群のユニタリー表現が取り上げられることは稀であるが、フーリエ解析との関係あるいは群環を通じての作用素環との繋がりを思えば、もっと中心に据えてしかるべき話題のように思われる。ここでは、その最小限ということで、加法群 $\mathbb{Z}$ のユニタリー表現をその双対群 $\mathbb{T}$

の上で既約分解した場合を調べたわけであるが、これを $\mathbb{Z}^n$ とその双対群 $\mathbb{T}^n$ の場合に拡張することは、自明に近いと言って良いだろう。その結果をケーリー変換経由でエルミート作用素の言葉に書き直せば、即座に次の定理に到達する。下手なスペクトル分解の証明では、こういった拡張は思いもよらないにもかかわらず。

相互に交換可能な有界エルミート作用素列 $H_1, \dots, H_n$ に対して、*準同型 $\Phi : B(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で、有界各点収束について連続で、$\Phi(x_j) = H_j$ $(1 \leq j \leq n)$ であるものが丁度一つだけ存在する。

とくに $n = 2$ の場合を解釈し直せば、正規作用素に対するスペクトル分解が即座に手に入る。

12 コンパクト作用素

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ の代数的テンソル積を $\mathcal{H} \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{K}$ で表す。(ベクトル空間の代数的テンソル積については、付録参照) このベクトル空間に内積を

$$(\sum_j x_j \otimes y_j | \sum_k x'_k \otimes y'_k) = \sum_{j,k} (x_j | x'_k)\,(y_j | y'_k)$$

で定める。これが意味をもつことは、$\mathcal{H}, \mathcal{K}$ の基底をとって見れば分かる。内積の性質のうち正定値性は、有限集合 $\{\xi_j\}, \{\eta_j\}$ をカバーする正規直交基底 $\{e_j\}, \{f_j\}$ を取ってきて、

$$\xi_j = \sum_k x_{j,k} e_k, \quad \eta_j = \sum_l y_{j,l} f_l$$

と表し、

$$\sum_j \xi_j \otimes \eta_j = \sum_{k,l} \left(\sum_j x_{j,k} y_{j,l} \right) e_k \otimes f_l$$

に注意して、つぎのように計算すればわかる。

$$\begin{aligned}(\sum_i \xi_i \otimes \eta_i | \sum_j \xi_j \otimes \eta_j) &= \sum_{i,j} \sum_{k,l,k',l'} \overline{x_{i,k}}\, x_{j,k'}\, \overline{y_{i,l}}\, y_{j,l'} (e_k \otimes f_l | e_{k'} \otimes f_{l'}) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \overline{x_{i,k}}\, x_{j,k}\, \overline{y_{i,l}}\, y_{j,l} = \sum_{k,l} \left| \sum_j x_{j,k}\, y_{j,l} \right|^2 .\end{aligned}$$

内積空間 $\mathcal{H} \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{K}$ を完備化して得られるヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ のテンソル積といい、$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ という記号で表す。作り方から、$\mathcal{H} \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{K}$ は、$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ の密な部分空間であり、$\{e_j\}, \{f_k\}$ を $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ の正規直交基底とすれば、$\{e_j \otimes f_k\}$ は、$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ の正規直交基底を作ることが分かる。

命題 12.1. 可分測度空間 (X,μ), (Y,ν) およびその直積空間 $(X\times Y,\mu\times\nu)$ から作られるヒルベルト空間 $L^2(X,\mu)$, $L^2(Y,\nu)$, $L^2(X\times Y,\mu\times\nu)$ について、次の自然な同一視が存在する。

$$L^2(X,\mu)\otimes L^2(Y,\nu)=L^2(X\times Y,\mu\times\nu).$$

Proof. $f\in L^2(X)$, $g\in L^2(Y)$ に対して、$f\boxtimes g\in L^2(X\times Y)$ を

$$(f\boxtimes g)(x,y)=f(x)g(y)$$

で定めると、

$$(f\otimes g|f'\otimes g')=(f\boxtimes g|f'\boxtimes g')$$

がわかるので、これから、$f\otimes g\mapsto f\boxtimes g$ は、等長写像 $L^2(X)\otimes L^2(Y)\to L^2(X\times Y)$ に拡張できることがわかる。あとはこれが全射であること。直積測度の構成に立ち戻って考えてもよいが、ここでは Fubini を使って処理しよう。直交基底を $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_k\}$ ととる。そして、$f\in L^2(X\times Y)$ が

$$(\varphi_j\boxtimes\psi_k|f)=0,\forall j,k$$

をみたすとする。そうすると、

$$\int\mu(dx)\varphi_j(x)\int\nu(dy)\psi_k(y)f(x,y)=0$$

であり、$\{\varphi_j\}$ は $L^2(X)$ の基底であるから、各 k に対して

$$\int\nu(dy)\psi_k(y)f(x,y)=0\quad \mu\text{-a.e. } x\in X$$

そこで、

$$N=\bigcup_k N_k,\quad N_k=\{x\in X;\int\nu(dy)\psi_k(y)f(x,y)\neq 0\}$$

とおくと、$\mu(N)=0$ となり、$x\notin N$ のとき、

$$\int\nu(dy)\psi_k(y)f(x,y)=0\quad\forall k$$

となる。ここで、$\{\psi_k\}$ が $L^2(Y)$ の基底であることを使うと、

$$\int\nu(dy)|f(x,y)|^2=0\quad x\notin N$$

がわかり、したがって、

$$(f|f)=\int\mu(dx)\int\nu(dy)|f(x,y)|^2=0$$

となる。 □

ヒルベルト空間における有界線型作用素 T を考える。正規直交基底 $\{e_j\}$ に対して、

$$\sum_k \|Te_k\|^2$$

は、正規直交基底のとり方によらず、T だけで決まる。この値の平方根を $\|T\|_2$ で表せば、

$$\|\lambda T\|_2 = |\lambda|\|T\|_2, \quad \|S+T\|_2 \leq \|S\|_2 + \|T\|_2, \quad \|T^*\|_2 = \|T\|_2$$

をみたす。

Proof. Parseval の等式を使って、次のように計算する。

$$\sum_j \|Te_j\|^2 = \sum_{j,k} |(Te_j|f_k)|^2 = \sum_{j,k} |(T^*f_k|e_j)|^2 = \sum_k \|T^*f_k\|^2.$$

ノルムの不等式は、$\ell^2(J, \mathcal{H})$ がヒルベルト空間であることに注意する。 □

補題 12.2. $\|T\| \leq \|T\|_2$.

Proof. $\xi = \sum_j x_j e_j$ と展開すると、

$$\begin{aligned}\|T\xi\|^2 &= \sum_k |(e_k|T\xi)|^2 = \sum_k \left|\sum_j x_j (e_k|Te_j)\right|^2 \\ &\leq \sum_k \sum_j |x_j|^2 \sum_j |(e_k|Te_j)|^2 = \|\xi\|^2\|T\|_2^2.\end{aligned}$$

□

定義 12.3. $\|T\|_2 < \infty$ である作用素を**ヒルベルト・シュミット作用素** (Hilbert-Schmidt operator) と呼ぶ、ヒルベルト・シュミット作用素全体を $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ と書けば、$\|T\|_2$ は、$\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ の上のノルムを与える。これをヒルベルト・シュミットノルムという。

命題 12.4. 自然な等長同型

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^* \to \mathcal{C}_2(\mathcal{H}), \quad \xi \otimes \eta^* : \zeta \mapsto (\eta|\zeta)\xi$$

が存在する。とくに、$\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ はヒルベルト空間である。

Proof. まず、$\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta^* \in \mathcal{H}^*$ に対して、$\xi\eta^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $(\xi\eta^*)\zeta = (\eta|\zeta)\xi$ で定めると、対応 $(\xi, \eta^*) \mapsto \xi\eta^*$ は、双線型であり、一次独立性もすぐわかるので、テンソル積の唯一性から、埋め込み写像 $\mathcal{H} \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{H}^* \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を得る。さらに、Parseval の等式

$\sum_j(\xi|e_j)(e_j|\eta) = (\xi|\eta)$ に注意すれば、この埋込みが、$\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}^*$ から $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ への等長写像であることがわかる。最後に、$T\in\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ は、

$$\sum_j Te_j\otimes e_j^*\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}^*$$

の像であることが、これも Parseval の等式からわかる。 □

$K\in L^2(X\times Y)$ に対して、積分作用素を

$$T: L^2(Y)\ni g(y)\mapsto\int\nu(dy)K(x,y)g(y)\in L^2(X)$$

で与えたものはヒルベルト・シュミット作用素で、

$$\|T\|_2^2=\int_{X\times Y}\mu(dx)\nu(dy)|K(x,y)|^2.$$

$$(T^*f)(y)=\int\mu(dx)\overline{K(x,y)}f(x).$$

<u>距離空間におけるコンパクト性</u>

距離空間 X の部分集合 S について、次は同値。

(i) 閉包 $\overline{S}$ がコンパクト。

(ii) 点列 $\{x_n\}$ を S から取ってきたときに、収束する部分列 $\{x_{n'}\}$ を見つけることができる。ここで、$\lim_{n\to\infty}x_{n'}$ が S に入ることは要求していない点に注意。(要求すると、S 自体がコンパクトになる。)

定義 12.5. 線型写像 $T:V\to W$ が**コンパクト** (compact) であるとは、有界列 $\{v_n\}$ に対して、$\{Tv_n\}$ がノルム収束する部分列をもつこと。

例 12.6. 有界作用素 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で、$T\mathcal{H}$ が有限次元であるものを**有限ランク作用素** (finite rank operator) という。有限ランク作用素は、コンパクト作用素。

定義 12.7. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 内のベクトル列 $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ が**弱収束する** (converge weakly) とは、

$$\lim_{n\to\infty}(\eta|\xi_n)=(\eta|\xi)\quad\forall\eta\in\mathcal{H}$$

となるような (η と無関係な) $\xi\in\mathcal{H}$ ($\{\xi_n\}$ の弱極限) が存在すること。

例 12.8. 正規直交系 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ は 0 に弱収束する。Bessel 不等式。

補題 12.9.

(i) 弱極限は、存在すれば一つ。

(ii) $\{\xi_n\}$ が ξ に弱収束し、T が有界作用素であれば、$\{T\xi_n\}$ は、$T\xi$ に弱収束する。

(iii) 弱収束する列は有界である。

(iv) 有界列は弱収束する部分列をもつ。

Proof. (i) ξ', ξ'' が $\{\xi_n\}$ の弱極限であったとすると、

$$(\eta|\xi' - \xi'') = \lim_n (\eta|\xi_n) - \lim_n (\eta|\xi_n) = 0$$

がすべての $\eta \in \mathcal{H}$ で成り立つので、$\xi' = \xi''$ となる。

(ii)

$$\lim_n (\eta|T\xi_n) = \lim_n (T^*\eta|\xi_n) = (T^*\eta|\xi) = (\eta|T\xi).$$

(iii) 一様有界性の原理による。

(iv) $\{\xi_n\}$ にグラム・シュミットの直交化を施して得られる正規直交系を $\{e_n\}_{n\geq 1}$ とする。$\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ に注意。

数列 $\{(e_1|\xi_n)\}$ は有界であるから、$\{\xi_n\}$ の部分列 $\{\xi_n^{(1)}\}$ を取ってきて $\{(e_1|\xi_n^{(1)})\}$ が収束するようにできる。つぎに数列 $\{(e_2|\xi_n^{(1)})\}$ を考えるとこれも有界であるから, $\{\xi_n^{(1)}\}$ の部分列 $\{\xi_n^{(2)}\}$ を、$\{(e_2|\xi_n^{(2)})\}$ が収束するように選ぶ。以下、これをくり返し、部分列の系列 $\{\xi_n^{(l)}\}_{n\geq 1}$ を、

(i) $\{\xi_n^{(l+1)}\}$ は $\{\xi_n^{(l)}\}$ の部分列であり、

(ii) 数列 $\{(e_k|\xi_n^{(l)})\}_{n\geq 1}$ は $1 \leq k \leq l$ のとき収束する、

ように選ぶことがきる。そこで、対角線列 $\{\xi_n^{(n)}\}$ を考えると、全ての $l \geq 1$ に対して数列 $\{(e_k|\xi_n^{(n)})\}$ は収束するので、その極限を c_k で表す。

$$\sum_{k=1}^{l} |c_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l} |(e_k|\xi_n^{(n)})|^2 \leq \sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |(e_k|\xi_n^{(n)})|^2 = \sup_{n\geq 1} \|\xi_n^{(n)}\|^2 < \infty$$

で $l \to \infty$ とすれば $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ が分かる。そこで、

$$\xi = \sum_{k\geq 1} c_k e_k \in \mathcal{H}$$

とすると、$\lim_n (e_k|\xi_n^{(n)}) = c_k = (e_k|\xi)$ $(k \geq 1)$ である。

最後に、ξ が $\{\xi_n^{(n)}\}$ の弱極限であることを示す。$\eta \in \mathcal{H}$ を

$$\eta = \eta^\perp + \sum_{k\geq 1}(e_k|\eta)e_k$$

と表せば、

$$(\eta|\xi_n^{(n)} - \xi) = \sum_{k\geq 1}(\eta|e_k)(e_k|\xi_n^{(n)} - \xi) = \sum_{k=1}^{l}(\eta|e_k)(e_k|\xi_n^{(n)} - \xi) + \sum_{k>l}(\eta|e_k)(e_k|\xi_n^{(n)} - \xi)$$

ここで、

$$\sum_{k\geq 1}|(\eta|e_k)(e_k|\xi_n^{(n)} - \xi)| \leq \sqrt{\sum_{k\geq 1}|(\eta|e_k)|^2}\sqrt{\sum_{k\geq 1}|(e_k|\xi_n^{(n)} - \xi)|^2} = \|\eta\|\,\|\xi_n^{(n)} - \xi\|$$

に注意して l を大きく取ると、$\sum_{k>l}$ の部分を n に依らずに小さくできる。そうしておいて、有限和 $\sum_{1\leq k\leq l}$ の部分で極限 $n \to \infty$ をとると、これを 0 に近づけることができる。 □

定理 12.10. 可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素 T に対して、以下は同値。

(i) T はコンパクト。
(ii) ベクトル列 $\{\xi_n\}$ が 0 に弱収束すれば、$\|T\xi_n\| \to 0$ が成り立つ。
(iii) $\|T_n - T\| \to 0$ であるような有限ランク作用素の列 $\{T_n\}$ が取れる。

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii): 一様有界性の原理により $\{\xi_n\}$ は有界列となるので、コンパクト性の仮定より、$\{T\xi_n\}$ の部分列でノルム収束するものが取れる。その収束先を ζ とすれば、$\zeta = 0$ である。実際、

$$(\eta|\zeta) = \lim_n(\eta|T\xi_{n'}) = (T^*\eta|\xi_{n'}) = 0$$

が勝手な $\eta \in \mathcal{H}$ について成り立つから。これから $\|T\xi_n\| \to 0$ が分かる。

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 有界列 $\{\xi_n\}$ を取る。補題により、弱収束する部分列 $\{\xi_{n'}\}$ を取ってこれるので、その弱極限を ξ とすれば、(ii) の仮定から $\lim_{n\to\infty}\|T(\xi_{n'} - \xi)\| = 0$ となり、T はコンパクトである。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): $(\ker T)^\perp$ の正規直交基底 $\{e_k\}_{k\geq 1}$ を取ってきて、有限次元部分空間 $\langle e_1, \dots, e_n\rangle$ への直交射影を E_n で表し有限ランク作用素を $T_n = TE_n$ で定めると、

$$\|T - T_n\| = \sup\{\|T\xi\|; \xi \in \langle e_1, \dots, e_n\rangle^\perp, \|\xi\| = 1\}$$

となるので、これが 0 に近づくことを確かめればよい。上の表式から $\|T-T_n\|$ は単調減少列なので、その極限を $r \geq 0$ とする。そうすると、各 n に対して、$\xi_n \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle^\perp$, $\|\xi_n\| = 1$ を $\|T\xi_n\| \geq r/2$ であるように選ぶことができる。このとき、勝手な η に対して

$$
\begin{aligned}
|(\eta|\xi_n)|^2 &= \left| \sum_{k\geq 1} (\eta|e_k)(e_k|\xi_n) \right|^2 = \left| \sum_{k>n} (\eta|e_k)(e_k|\xi_n) \right|^2 \\
&\leq \sum_{k>n} |(\eta|e_k)|^2 \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

となるので (最後の不等式および極限のところで、内積の不等式と Bessel 不等式を使う)、仮定から $\|T\xi_n\| \to 0$ となり $r = 0$ が分かる。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): 列 $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ が 0 に弱収束すると、$M = \sup\{\|\xi_k\|\}$ は有限であり、

$$
\|T\xi_k\| \leq \|T-T_n\|\|\xi_k\| + \|T_n\xi_k\| \leq M\|T-T_n\| + \|T_n\xi_k\|
$$

であるから、各 n に対して、$\lim_k \|T_n\xi_k\| = 0$ が成り立てばよいが、これは T_n が有限ランクであることに注意して $T_n = \sum_{j=1}^n |\eta_j)(\zeta_j|$ と表わしてみれば分かる。 □

系 12.11.

(i) ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ におけるコンパクト作用素全体を $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で表せば、$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の閉部分空間で、$\mathcal{B}(\mathcal{H})\mathcal{C}(\mathcal{H})\mathcal{B}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

(ii) ヒルベルト・シュミット作用素はコンパクト。

Proof. (i) は、定理 (iv) の特徴付けによる。

(ii) ヒルベルト・シュミット作用素 T に対して、$(\ker T)^\perp$ の正規直交基底 $\{e_k\}_{k\geq 1}$ を用意し、有限ランク作用素を $T_n = TE_n$ (E_n は $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ への射影) で定める。$\xi \in \mathcal{H}$ を

$$
\xi = \xi^\perp + \sum_{k\geq 1} (e_k|\xi) e_k
$$

と分解して

$$
\begin{aligned}
\|(T-T_n)\xi\| &= \|\sum_{k>n} (e_k|\xi) Te_k\| \leq \sum_{k>n} |(e_k|\xi)|\,\|Te_k\| \\
&\leq \sqrt{\sum_{k>n} |(e_k|\xi)|^2} \sqrt{\sum_{k>n} \|Te_k\|^2} \leq \|\xi\| \sqrt{\sum_{k>n} \|Te_k\|^2}
\end{aligned}
$$

と評価できるので、

$$\|T - T_n\| \leq \sqrt{\sum_{k>n} \|Te_k\|^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$\square$

問 12.1. 上の定理で、ヒルベルト空間の可分性を使ったのは、(ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明のところである。ここを次のように修正して、可分性の仮定が必要でないことを確かめよ。$(\ker T)^\perp$ の正規直交基底 $\{e_k\}_{k\geq 1}$ を取ってくる。このとき $\{e_k\}$ が可算集合であることを示す。そのためには、$\epsilon > 0$ に対して, $\{k; \|Te_k\| \geq \epsilon\}$ が有限集合であることが分かれば十分。もし仮に、これが無限集合であれば、正規直交系 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ で $\|Tf_n\| \geq \epsilon$ となるものが取れる。一方で、

$$\lim_{n\to\infty} (\xi | f_n) = 0, \quad \forall \xi \mathcal{H}$$

であるので、(ii) より、$\lim_n \|Tf_n\| = 0$ となって、矛盾である。

問 12.2. ユニタリー作用素 U がコンパクトであるのは、$\mathcal{H}$ が有限次元である場合だけ。

コンパクトエルミート作用素のスペクトル分解：

補題 12.12. $\mathbb{R}$ の上で定義された射影測度 E に対して、$E(S)\mathcal{H}$ が有限次元であれば、有限集合 $F \subset S$ で $E(F) = E(S)$ となるものが存在する。

Proof. 関数 $\dim E((-\infty, t] \cap S)\mathcal{H}$ は $t \in S$ について単調増加であるから、その跳躍点全体を $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ($n \leq \dim E(S)\mathcal{H}$) とすると、$F = \{t_j; 1 \leq j \leq n\}$ が求めるものである。 $\square$

Proof. エルミート作用素 H の定める星準同型 $B(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $f \mapsto f(H)$ で表す。これは、$B(\mathbb{R})$ の有界各点収束と $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の強収束に関して連続である。また、これに付随した $\mathbb{R}$ 上の射影測度を E と書く。

さて、H にコンパクト性を仮定する。このとき、正数 $r > 0$ に対して、$E(\mathbb{R} \setminus [-r, r])\mathcal{H}$ は有限次元である。仮に無限次元とすると、正規直交系 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ をこの中から取れば、

$$\|He_n\|^2 = (e_n | H^2 e_n) = \int_{\mathbb{R}} t^2 (e_n | E(dt) e_n) = \int_{|t|>r} t^2 (e_n | E(dt) e_n) \geq r^2$$

となるので、$\| \lim_n He_n\| \to 0$ ではあり得ない。一方、$\{e_n\}_{n\geq 1}$ は 0 に弱収束するので、定理 (ii) の条件に反する。

これと、上の補題とを合わせると、0 を唯一の集積点とする実数列 $\{h_n \neq 0\}_{n\geq 1}$ および正規直交系 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ が存在し、

$$H = \sum_{n\geq 1} h_n |e_n)(e_n|$$

と書けることがわかる。これから、$\sigma(H) = \{0\} \cup \{h_n; n \geq 1\}$ も分かる。 □

例 12.13. 制限写像 $W^{1,2}(\mathbb{R}) \to L^2(-\pi,\pi)$ は、コンパクト。(flow.pdf)

問 12.3. $L^2(0,1)$ における作用素 A を

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

で定めると、Hilbert-Schmidt 作用素である。

(i) A^* を求めよ。
(ii) A^*A の固有ベクトルを求めよ。

13 閉作用素

内積空間の上では、微分作用素を始めとして有界でない作用素が普通に現れる。こういったものを扱う一般的な方法は、ソボレフ空間のようにベクトル空間の位相を通常の内積よりも強いもので補強し、ある意味有界化するというものであるが、もっとヒルベルト空間よりの調べ方もあって、それが von Neumann の創始した閉（グラフ）作用素の理論である。内積との関係で言えば、エルミート共役の存在は欠かせないため、それを温存すれば必然的に作用素はヒルベルト空間全体で定義することができない。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ からヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ への**非有界線型写像**[*31] (unbounded linear map) とは、$\mathcal{H}$ の部分空間 D から $\mathcal{K}$ への線型写像 T のことをいう。D は T に依存することを強調して $D(T)$ のように書き、$D(T)$ が密である場合を密に定義されている (densely defined) と称する。とくに $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ であるものを $\mathcal{H}$ における**非有界作用素** (unbounded operator) と呼ぶ。非有界線型写像 $T : D(T) \to \mathcal{K}$ は、直和空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ における非有界作用素の非対角成分と見なせるので、以下作用素の場合を調べる。

非有界作用素の代数演算は定義域が異なることから色々と不自由であるが、２つの非有

[*31] 有界とは限らない線型写像の意味である。

界作用素 S, T について、その和 $S+T$ と積 ST を

$$D(S+T)=D(S)\cap D(T),\quad (S+T)\xi=S\xi+T\xi,$$
$$D(ST)=\{\xi\in D(T); T\xi\in D(S)\},\quad (ST)\xi=S(T\xi)$$

で定める。S, T が密に定義されている場合でも、これらが密に定義される保証がない点に注意する。

非有界作用素のグラフとは、直和ヒルベルト空間 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{G}(T)=\{\xi\oplus T\xi;\xi\in D(T)\}$ のことである。逆に $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{G}$ がこの形であることと $\mathcal{G}\cap(0\oplus\mathcal{K})=\{0\}$ とは同値。非有界作用素 T でそのグラフが閉部分空間であるものを**閉作用素** (closed operator) という。また、グラフの閉包が再び作用素のグラフとなる作用素は**閉じられる** (closable) と称する。グラフを使わずに言い換えると次のようになる。$\xi=\lim_n\xi_n$, $\lim_n T\xi_n=\eta$ ($\xi_n\in D(T)$) とする。このとき、$\xi\in D(T)$ かつ $\eta=T\xi$ が成り立つというのが、T が閉じているということ。$\xi=0$ ならば $\eta=0$ であるというのが、閉じられるということ。閉じられる T については、作用素 $\overline{T}$ を $\overline{T}\xi=\eta$ によって定めることができて、$\overline{\mathcal{G}(T)}=\mathcal{G}(\overline{T})$ が成り立つ。$\overline{T}$ を T の閉包 (closure) という。

ここで注意すべきは、閉じられる T を $D(T)$ の密部分空間 D に制限した $T|_D$ も当然閉じられるわけであるが、$\mathcal{G}(T|_D)$ が $\mathcal{G}(T)$ で密になるとは限らないこと。これが密であるような $D\subset D(T)$ を T の**芯** (core) という

問 13.1. 有界作用素は閉作用素である。逆に $D(T)=\mathcal{H}$ である閉作用素は有界である (閉グラフ定理)。

次に 2 つの密に定義された作用素 S, T が $(S\xi|\eta)=(\xi|T\eta)$ ($\xi\in D(S), \eta\in D(T)$) を満たす状況を考えると、$\xi\in D(S)$ に対しては、線型汎関数

$$D(T)\ni\eta\mapsto(\xi|T\eta)$$

が有界であり、$D(T)$ が密であることから、$S\xi$ は、これを実現するベクトルとして特徴づけられる。そこで、この意味での有界性をもつ $\xi\in\mathcal{H}$ 全体を定義域とする作用素 T^* を $(T^*\xi|\eta)=(\xi|T\eta)$ ($\eta\in D(T)$) で定め、T の**共役作用素**[*32](adjoint operator) と呼ぶ。さらに $D(T^*)$ が密であるときには $T^{**}=(T^*)^*$ と書く。定義から T^{**} は T の拡張になっている。一般に T' が T の拡張になっているとき、$T\subset T'$ と書く。グラフを使えば $\mathcal{G}(T)\subset\mathcal{G}(T')$ ということである。T が密に定義されていれば T' もそうであり、$(T')^*\subset T^*$ が成り立つ。

[*32] 随伴作用素ともいう。

問 13.2. $\ker T^* = \{T\xi; \xi \in D(T)\}^\perp$ である。

共役作用素のグラフを記述するために、$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ におけるユニタリー作用素 J を $J(\xi \oplus \eta) = -\eta \oplus \xi$ で定めると、$J^* = -J$ と $J^2 = -I$ を満たす。

次は定義の言い換えである。

命題 13.1. 密に定義された作用素 T について、$\mathcal{G}(T^*) = (J\mathcal{G}(T))^\perp$ である。とくに T^* は閉じている。

命題 13.2. 密に定義された作用素 T について、次は同値。

(i) T は閉じられる。
(ii) $D(T^*)$ は密である。

さらにこのとき、$\overline{T} = T^{**}$ となる。

Proof. 等式

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = (\mathcal{G}(T)^\perp)^\perp = J(J\mathcal{G}(T)^\perp)^\perp = J\mathcal{G}(T^*)^\perp$$

による。(ii) でなければ、$J\mathcal{G}(T^*)^\perp \supset J(D(T^*)^\perp \oplus 0) = 0 \oplus D(T^*)^\perp$ より、$\overline{\mathcal{G}(T)}$ はグラフの形でない。一方、T^* が密に定義されていれば、$J\mathcal{G}(T^*)^\perp = \mathcal{G}(T^{**})$ であるから、$\overline{\mathcal{G}(T)}$ は T^{**} のグラフに一致する。すなわち、$\overline{T} = T^{**}$ である。 □

非有界作用素 S に対して、その二重共役 $S^{**} = (S^*)^*$ が存在するとき、$\mathcal{G}(S^{**}) = \overline{\mathcal{G}(S)}$ となり、$S \subset T$ である閉作用素 T は $S^{**} \subset T$ を満たす。すなわち S^{**} は S を拡張する最小の閉作用素である。そして $S^{***} = S^*$ となって、以降はこれと S^{**} を繰り返す。

$S \subset S^*$ となる S を**対称作用素** (symmetric operator)、$S = S^*$ となるものを**自己共役作用素** (self-adjoint operator) と呼ぶ。対称性は、$(S\xi|\eta) = (\xi|S\eta)$ $(\xi, \eta \in D(S))$ ということで代数的な性質であるが、自己共役性の方は、対称な拡大を持たないという意味で極大なものとなっている。対称作用素が下に有界であるとは、$(\xi|S\xi) \geq \mu(\xi|\xi)$ $(\xi \in D(S))$ を満たすとなる実数 μ が存在すること。この性質を $S \geq \mu$ で表す。とくに、$\mu = 0$ の場合は正と呼ぶ。

ここで、スペクトル分解でも取り上げた、有界可測関数のなす*環の*表現 $\pi : B(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の閉作用素により拡張について考えよう。π に伴う X 上の射影測度を E で表し $\mu_\xi = (\xi|E(\cdot)\xi)$ とおくと、

$$\|\pi(f)\xi\|^2 = \int_X |f(x)|^2 \, \mu_\xi(dx) \quad (f \in B(X))$$

であるから、対応 $B(X) \ni f \mapsto \pi(f)\xi \in \mathcal{H}$ は、等長写像 $L^2(X, \mu_\xi) \to \mathcal{H}$ に拡張される。これによる $f \in L^2(X, \mu_\xi)$ の移し先も $\pi(f)\xi$ で表す。

補題 13.3. $f \in L^2(X, \mu_\xi)$ に対して、$\mu_{\pi(f)\xi} = |f|^2 \mu_\xi$ である。

さて、有界とは限らない可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対して、

$$D(f) = \{\xi \in \mathcal{H}; \int_X |f(x)|^2 \, \mu_\xi(dx) < \infty\}$$

とおく。ここで f に各点収束する有界可測関数列 $f_n : X \to \mathbb{C}$ で $|f_n| \nearrow |f|$ なるものを考えると、単調収束定理により

$$\|\pi(f_n)\xi\|^2 = \int_X |f_n(x)|^2 \, \mu_\xi(dx) \nearrow \int_X |f(x)|^2 \, \mu_\xi(dx)$$

$(\xi \in \mathcal{H})$ となることから、$\xi \in D(f) \iff \sup_{n \geq 1} \|\pi(f_n)\xi\| < \infty$ であり、さらにこのとき、押さえ込み収束定理により

$$\|\pi(f)\xi - \pi(f_n)\xi\|^2 = \int_X |f(x) - f_n(x)|^2 \, \mu_\xi(dx) \to 0 \ (n \to \infty)$$

がわかる。このことから $D(f)$ は $\mathcal{H}$ の密部分空間となり、$D(f)$ を定義域とした非有界作用素 $\pi(f)$ が上の極限、すなわち、埋込み $L^2(X, \mu_\xi) \subset \mathcal{H}$ に関する $f \in L^2(X, \mu_\xi)$ の像 $\pi(f)\xi$ として定められる。$\pi(f)$ はまた、射影測度を使って

$$\pi(f) = \int_X f(x) \, E(dx)$$

のようにも書き表される。

命題 13.4.

(i) 可測関数 $f, g : X \to \mathbb{C}$ に対して、$D(\pi(g)\pi(f)) = D(f) \cap D(gf)$ および $\pi(g)\pi(f) \subset \pi(gf)$ が成り立つ。とくに、等号が成り立つ必要十分条件は $D(gf) \subset D(f)$ である。

(ii) 可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対して、$\pi(f)^* = \pi(\overline{f})$ および $\pi(f)^*\pi(f) = \pi(|f|^2)$ が成り立つ。

Proof. (i) $\xi \in D(\pi(g)\pi(f))$ という条件は、$\xi \in D(f) \iff \int_X |f(x)|^2 \, \mu_\xi(dx) < \infty$ かつ $\pi(f)\xi \in D(g) \iff \int_X |g(x)|^2 |f(x)|^2 \mu_\xi(dx) < \infty$ （上の補題を使う）であり、これは $\xi \in D(f) \cap D(gf)$ に他ならない。そしてこのとき、

$$\pi(g)\pi(f)\xi = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \pi(g_n)\pi(f_m)\xi = \lim_{m,n \to \infty} \pi(g_n f_m)\xi = \pi(gf)\xi$$

である。

(ii) の前半： $\xi, \eta \in D(\overline{f}) = D(f)$ に対して、

$$(\xi|\pi(f)\eta) = \lim_{n\to\infty}(\xi|\pi(f_n)\eta) = \lim_{n\to\infty}(\pi(\overline{f_n})\xi|\eta) = (\pi(\overline{f})\xi|\eta)$$

であることから、$\pi(\overline{f}) \subset \pi(f)^*$ が分かる。次に $\zeta \in \pi(f)^*$ とすると、$|(\zeta|\pi(f)\xi)| \leq C\|\xi|$ $(\xi \in D(f))$ となる $C > 0$ が存在する。そこで $e_m = 1_{[|f|\leq m]}$ が $\pi(e_m)D(f) \subset D(f)$ を満たすことに注意して $f_m = e_m f$ とおけば、

$$|(\pi(\overline{f_m})\zeta|\xi)| = \lim_{n\to\infty}|(\zeta|\pi(f_n)\pi(e_m)\xi)| = |(\zeta|\pi(f)\pi(e_m)\xi)| \leq C\|\pi(e_m)\xi)\|$$

$(\xi \in D(f))$ であるが、最初と最後の式が ξ について連続であることから、不等式 $|(\pi(\overline{f_m})\zeta|\xi)| \leq C\|\pi(e_m)\xi)\|$ がすべての $\xi \in \mathcal{H}$ について成り立つ。そこで $\xi = \pi(\overline{f_m})\zeta$ を代入すると $\|\pi(\overline{f_m})\zeta\| \leq C$ $(m \geq 1)$ となるので、$\zeta \in D(\overline{f})$ がわかる。

(ii) の後半：内積の不等式から $D(|f|^2) \subset D(f)$ が成り立つので (i) から従う。 □

系 13.5. 実数値可測関数 f に対して、$\pi(f)$ は自己共役であり、さらに $f \geq 0$ であれば、$\pi(f)$ は正である。

定理 13.6. 下に有界な自己共役作用素 S は、$\mathbb{R}$ における射影測度 E を使って

$$S = \int_{\mathbb{R}} s\,E(ds)$$

と表される。また、このような射影測度は一つしか無く、$\mu = \inf\{(\xi|S\xi); \xi \in D(S), \|\xi\| = 1\}$ とすれば、$[\mu, \infty)$ で支えられている。

Proof. $S - \mu I$ を改めて S と書いて S が正の場合を調べればよい。

最初に $I + S$ の像が $\mathcal{H}$ 全体であることを示す。まず、$\zeta \perp \{\xi + S\xi; \xi \in D(S)\}$ とすると、$(\zeta|\zeta) \leq (\zeta|(I+S)\zeta) = 0$ から $\zeta = 0$ となるので、$\{\xi + S\xi; \xi \in D(S)\}^\perp = \ker(I+S)^* = \ker(I+S) = \{0\}$ である。したがって、$\eta \in \mathcal{H}$ に対して、$\eta = \lim(I+S)\xi_n$ となる $\xi_n \in D(S)$ が存在する。このとき、

$$((I+S)\xi|(I+S)\xi) = (\xi|\xi) + 2(\xi|S\xi) + (S\xi|S\xi) \geq (\xi|\xi) \quad (\xi \in D(S))$$

に注意すれば、$\{\xi_n\}$ がコーシー列となり、$\xi = \lim \xi$ は $\xi \oplus \eta \in \overline{\mathcal{G}(I+S)} = \mathcal{G}(I+S)$ に入るので、$\xi \in D(S)$ および $\eta = (I+S)\xi$ がわかる。そうすると、逆作用素 $C : \mathcal{H} \ni \eta = (I+S)\xi \mapsto \xi \in \mathcal{H}$ は、$(\eta|C\eta) = (\eta|\xi) = (\xi|(I+S)\xi) \geq (\xi|\xi) = (C\eta|C\eta)$ および

$$(\eta|C\eta) = (\xi|\xi) + (\xi|S\xi) \leq (\xi|\xi) + 2(\xi|S\xi) + (S\xi|S\xi) = (\eta|\eta)$$

を満たす正有界作用素である。そこで、C のスペクトル分解を与える $\mathbb{R}$ 上の射影測度を E とすれば、$\ker C = \{0\}$ であることから、E は $\sigma(C) \setminus \{0\} \subset (0,1]$ で支えられていて、E を変数変換 $t = \frac{1}{1+s} \in (0,1]$ により、$[0,\infty)$ 上の射影測度と見なせば、

$$C = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+s}\, E(ds)$$

および

$$S = \int_{[0,\infty)} s\, E(ds)$$

という表示を得る。

もう一つの表示

$$S = \int_{\mathbb{R}} s\, F(ds)$$

があるとする。$S \geq 0$ により F も $[0,\infty)$ で支えられているので、t 変数で書き直すことで

$$\int_{(0,1]} t\, F(dt) = C = \int_{(0,1]} t\, E(dt)$$

という表示が得られる。そこで、連続関数を多項式で近似し、さらに積分を有界可測関数に拡張すれば、

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, E(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, F(dt) \quad (f \in B(\mathbb{R}))$$

が成り立ち、$(0,1]$ 上の射影測度として $E = F$ がわかる。したがって $[0,\infty)$ 上の射影測度としても一致する。 □

系 13.7. 正自己共役作用素 S に対して、$S = R^2$ をみたす正自己共役作用素がちょうど一つ存在する。R を S の平方根と呼び、$S^{1/2} = \sqrt{S}$ と書く。

Proof. S のスペクトル分解 $S = \int_{[0,\infty)} sE(ds)$ に対して、正自己共役作用素 $R = \int \sqrt{s}\, E(ds)$ は、命題により $R^2 = S$ を満たす。逆に $S = R^2$ を満たす正自己共役作用素 R に対して、そのスペクトル分解 $R = \int_{[0,\infty)} r\, F(dr)$ を考えると、$S = \int_{[0,\infty)} r^2\, F(dr)$ と表されるので、変数変換 $s = r^2$ により F を書き直したものは E に一致し、したがって、$R = \int_{[0,\infty)} \sqrt{s}\, E(ds)$ である。 □

命題 13.8. 密に定義された閉作用素 T に対して、T^*T および TT^* は自己共役である。

Proof. 直交分解 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{G}(T) + J\mathcal{G}(T^*)$ を $\xi \oplus 0 \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ に施せば、$\xi = \eta - T^*\zeta$, $0 = T\eta + \zeta$ をみたすように $\eta \in D(T)$, $\zeta \in D(T^*)$ が取れるので、これから

$$T^*T\eta + \eta = \xi$$

となる $\eta \in D(T^*T)$ がちょうど一つ存在することがわかる。そこで対応 $\xi \mapsto \eta$ の定める線型作用素を象徴的に $(I + T^*T)^{-1}$ と書くことにすれば、$(\xi|(I + T^*T)^{-1}\xi) = ((I + T^*T)\eta|\eta) = \|\eta\|^2 + \|T\eta\|^2 \geq 0$ および

$$\begin{aligned}(\xi|\xi) - (\xi|(I + T^*T)^{-1}\xi) &= ((I + T^*T)\eta|(I + T^*T)\eta) - ((I + T^*T)\eta|\eta) \\ &= ((I + T^*T)\eta|T^*T\eta) = (T\eta|T\eta) + (T^*T\eta|T^*T\eta) \geq 0\end{aligned}$$

から、$0 \leq (I + T^*T)^{-1} \leq 1$ がわかる。そこで、下の補題から $I + T^*T$ が自己共役で、したがって T^*T も自己共役である。 □

補題 13.9. S が自己共役で逆作用素 S^{-1} を持てば、S^{-1} も自己共役である。ただし、非有界作用素 T の逆作用素 T^{-1} は、$T\xi = 0$ となる $\xi \in D(T)$ が $\xi = 0$ しかないとき、$D(T^{-1}) = \{\eta = T\xi; \xi \in D(T)\}$ および $T^{-1}\eta = \xi$ *(*$\eta = T\xi$*)* で定められる。$\mathcal{G}(T^{-1}) = J\mathcal{G}(-T)$ に注意。

Proof. $D(S^{-1})^\perp = \ker S^* = \ker S = \{0\}$ に注意して、以下のようにすればわかる。

$$\mathcal{G}((S^{-1})^*) = \mathcal{G}(-S)^\perp = J\mathcal{G}((-S)^*) = J\mathcal{G}(-S) = \mathcal{G}(S^{-1}).$$

□

自己共役作用素 S の**支え**を $(\ker S)^\perp$ への射影と定め、$[S]$ と書く。次の 2 つの結果の証明は、有界な場合についてのそれを繰り返すだけである。

定理 13.10. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ において密に定義され、ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ に値を取る閉グラフ線型写像 T は、$\mathcal{H}$ における正自己共役作用素 R と部分等長写像 V の積 $T = VR$ として表され、さらに条件 $[V] = [R]$ の下で V, R は一つに定まり、$R = (T^*T)^{1/2}$ である。これを T の**極分解** *(polar decomposition)* という。以後、$|T| = (T^*T)^{1/2}$ と書く。

系 13.11 (Jordan 分解)**.** 自己共役作用素 T は、互いに直交する支えをもつ正自己作用素 $T_\pm$ の差 $T_+ - T_-$ で表すことができ、そのような表し方は一つしかない。また $|T| = T_+ + T_-$ が成り立つ。

系 13.12. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ において密に定義された共役線型閉作用素 S に対して、$\mathcal{H}$ における共役線型部分等長作用素 V と密に定義された正自己共役作用素 R で $S = VR$ かつ $[V] = [R]$ となるものがちょうど一つ存在する。

Proof. $\mathcal{H}$ の双対空間を $\mathcal{K}$ とし、非有界線型写像 $T : \mathcal{H} \ni \xi \mapsto (S\xi)^* \in \mathcal{H}^*$ に極分解を適用すればよい。 □

Jordan 分解を使えば正自己共役作用素のスペクトル分解が次のように一般化される。

定理 13.13 (von Neumann)**.** 自己共役作用素 T は、$\mathbb{R}$ における射影測度 E を使って

$$T = \int_{\mathbb{R}} t\, E(dt)$$

と表される。また、このような射影測度は一つしか無い。

Remark 21. von Neumann の証明は、Cayley 変換を経由するもので、§10 で与えた有界エルミート作用素のスペクトル分解の自然な一般化となっている。その意味で、上の証明は von Neumann のそれに依拠しているのであるが、一方で、有界エルミート作用素のスペクトル分解は、可換 C*環の表現定理を経由して示すことも可能で、それに上の議論を併せると Cayley 変換を使わない証明が得られる。これについては「量子解析のための作用素環入門」の §4.1 と付録 C に書いた。

課題 12. 自己共役作用素 S のスペクトル分解を以下の手順で示せ。

(i) $\|(iI \pm S)\xi\|^2 = \|\xi\|^2 + \|S\xi\|^2$ $(\xi \in D(S))$。
(ii) $\mathcal{H} = \{(iI \pm S)\xi; \xi \in D(S)\}$。
(iii) $U = (iI - S)(iI + S)^{-1}$ は $\ker(I + U) = \{0\}$ をみたすユニタリー作用素である。
(iv) U のスペクトル分解 $\int_{\mathbb{T}} z\, E(dz)$ において、$E(\{-1\}) = 0$ である。
(v) $E(dz)$ に変数変換 $z = \frac{i-s}{i+s}$ $(s \in \mathbb{R})$ を施して $U = \int_{\mathbb{R}} \frac{i-s}{i+s} E(ds)$ と表すとき、$S = \int_{\mathbb{R}} s\, E(ds)$ である。

対称作用素の不足指数。極分解 $S = V|S|$ による記述。S^*S と SS^* の関係。

命題 13.14. 対称作用素 S について、次が成り立つ。

(i) $\|(S \pm i)\xi\|^2 = \|\xi\|^2 + \|S\xi\|^2$ $(\xi \in D(S))$ である。とくに、$\ker(S \pm i) = \{0\}$。
(ii) S が閉であることと $\{S\xi + i\xi; \xi \in D(S)\}$ が閉であること、$\{S\xi - i\xi; \xi \in D(S)\}$ が閉であること、これらがすべて同値。

Proof. (i) は対称性に注意して計算するだけ。(i) は $\mathcal{G}(S) \ni \xi \oplus S\xi \mapsto (S \pm i)\xi \in \mathcal{H}$ が

等長であることを意味するので (ii) もわかる。 □

定理 13.15. 閉対称作用素 S について、以下は同値。

(i) S が自己共役である。
(ii) $\ker(S^* \pm i) = \{0\}$ である。
(iii) $\{S\xi \pm i\xi; \xi \in D(S)\} = \mathcal{H}$ である。

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii): 対称作用素 $S^* = S$ に上の命題 (i) を適用する。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 上の命題 (ii) により、$\{S\xi \pm i\xi; \xi \in D(S)\}$ は閉部分空間である。一方、(ii) はこれが $\mathcal{H}$ で密であることと同値なので、(iii) を得る。

(iii) $\Longrightarrow$ (i): $S \subset S^*$ であるから、$D(S^*) \subset D(S)$ を示せばよい。$\eta \in D(S^*)$ に対して、$(S^* \pm i)\eta = (S \pm i)\xi = (S^* \pm i)\xi$ となる $\xi \in D(S)$ が存在するので、$\xi - \eta \in \ker(S^* \pm i) = \{S\xi \pm i\xi; \xi \in D(S)\}^\perp = \{0\}$ から $\eta = \xi \in D(S)$ である。 □

系 13.16. 対称作用素 S について、以下は同値。

(i) S の閉包 S^{**} が自己共役である。
(ii) $\ker(S^* \pm i) = \{0\}$ である。
(iii) $\{S\xi \pm i\xi; \xi \in D(S)\}$ は $\mathcal{H}$ で密。

このような S を、本質的に自己共役 (essentially self-adjoint) であると言う。

閉対称作用素の包含関係を調べるために、命題 13.14 を利用して、閉対称作用素 S から $\mathcal{H}$ における部分等長作用素 V（S の Cayley 変換[*33]という）を

$$V(S\xi + i\xi) = S\xi - i\xi \ (\xi \in D(S)), \quad \{S\xi + i\xi; \xi \in D(S)\}^\perp \text{ の上では } V = 0$$

により定める。V の右支え V^*V が $\{S\xi + i\xi; \xi \in D(S)\} = \ker(S^* - i)^\perp$ への射影で、左支え VV^* が $\{S\xi - i\xi; \xi \in D(S)\} = \ker(S^* + i)^\perp$ への射影であることに注意。

V の定義式を

$$\begin{cases} \eta = S\xi + i\xi, \\ V\eta = S\xi - i\xi \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1+V)\eta = 2S\xi, \\ (1-V)\eta = 2i\xi \end{cases}$$

のように書き直せば、

$$\{\eta - V\eta; \eta \in V^*V\mathcal{H}\} = D(S)$$

[*33] 考案者の von Neumann が Cayley transform と呼んだことに由来する。

が $\mathcal{H}$ で密であり、 S は

$$S(\eta - V\eta) = i(\eta + V\eta), \quad \eta \in V^*V\mathcal{H}$$

によって復元されることがわかる。

一般に、$\mathcal{H}$ における部分等長作用素 U に対して、$\{\eta - U\eta; \eta \in U^*U\mathcal{H}\}$ が $\mathcal{H}$ において密であることを復元条件と呼ぶことにする。

補題 13.17. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における部分等長作用素 U に対して、$(1-U)\mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$ で密であれば、$1-U$ の $U^*U\mathcal{H}$ への制限は単射である。

Proof. $\xi = U^*U\xi$ が $U\xi = \xi$ を満たせば、

$$((1-U)\eta|\xi) = (U\eta|U\xi) - (U\eta|\xi) = 0, \quad \eta \in \mathcal{H}$$

となるので、$(1-U)\mathcal{H}$ が密であることから $\xi = 0$ でなければならない。 □

定理 13.18. Cayley 変換の下、閉対称作用素と部分等長で復元条件を満たすものとが、作用素の包含関係を保つように対応し合う。ただし、 2 つの部分等長 U, V が $U \subset V$ であるとは、$U^*U \leq V^*V$ かつ $V\xi = U\xi$ $(\xi \in U^*U\mathcal{H})$ となることを意味する。

Proof. Cayley 変換が作用その方眼関係を保つことは、その作り方からわかる。

復元条件を満たす部分等長 U から閉対称作用素が復元することを確かめよう。$D = \{\eta - U\eta; \eta \in U^*U\mathcal{H}\}$ とおく。対応 $U^*U\mathcal{H} \ni \eta \mapsto \eta - U\eta \in \mathcal{H}$ が単射であること（上の補題）に注意して、D を定義域とする作用素 S を $S(\eta - U\eta) = i(\eta + U\eta)$ $(\eta \in U^*U\mathcal{H})$ で定めると、

$$(\xi - U\xi|S(\eta - U\eta)) = i(\xi|U\eta) - i(U\xi|\eta) = (S(\xi - U\xi)|\eta - U\eta), \quad \xi, \eta \in U^*U\mathcal{H}$$

より S は対称で、さらに $\{(S-i)(\eta - U\eta) = 2iU\eta; \eta \in U^*U\mathcal{H}\} = U\mathcal{H}$ が閉部分空間であることから、命題 13.14 (ii) により S は閉作用素でもある。 □

系 13.19. 閉対称作用素 S の Cayley 変換を U とする。S が自己共役な拡張をもつための必要十分条件は、$\ker(S^* \pm i)$ の次元が一致することで、このとき、自己共役な拡張は、$\ker(S^* - i)$ から $\ker(S^* + i)$ へのユニタリー写像の選び方だけ存在する。

とくに、S が自己共役であることと U がユニタリーであることが同値である。

ここで具体例を検討しよう。ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(0, 2\pi)$ における微分作用素 $i\frac{d}{dt}$ を取り上げる。$\mathcal{H}$ の密部分空間を $D = \{\xi \in \mathcal{H}; \xi' \in \mathcal{H}\}$ で定める。この意味するところ

は、$L^2(0,2\pi)$ を周期 2π の局所二乗可積分関数全体と同一視して、$f \in \mathcal{H}$ が局所可積分であることに注意して、その不定積分 $\int f(t)\,dt$ として表される連続関数を $(0,2\pi)$ に制限したもの全体が D である。

大事な注意：フーリエ表示 $\xi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{int}$ が $\sum_n n^2|f_n|^2 < \infty$ を満たせば、$\sum |f_n| < \infty$ となって、$\xi \in D$ であるが、逆は正しくない。$\xi'(t) = 1$ のとき、$\xi(t) = t$ $(0 < t < 2\pi)$ のフーリエ級数表示

$$t = \pi + \sum_{n\neq 0} \frac{i}{n} e^{int}$$

を形式的に部分しても定数関数にはならない。

さて、$\xi, \eta \in D$ に対して、$(\xi\eta)' = \xi'\eta + \xi\eta'$ に注意すれば、

$$(\xi|i\eta') - (i\xi'|\eta) = i(\overline{\xi(2\pi)}\eta(2\pi) - \overline{\xi(0)}\eta(0))$$

となって D の上では対称にならない。一方、$D(S) = \{\xi \in D; \xi(0) = 0 = \xi(2\pi)\}$ に制限した S は対称になる。S は閉作用素で、その共役は $D(S^*) = D$, $S^*\xi = i\xi'$ となる。

$\xi, \eta \in L^2$ が $(\xi|Sf) = (\eta|f)$ $(f \in D(S))$ を満たしたとする。これを形式的に書き直せば、$i\xi' = \eta$ となるので、$i\xi_0' \in \eta$ となる $\xi_0 \in D$ を取って、$(\xi|Sf) = (\eta|f) = (i\xi_0'|f) = (\xi_0|Sf)$ と計算し、$(SD(S))^\perp = \mathbb{C}$ (定数関数) に注意すれば、$\xi \in \xi_0 + \mathbb{C} \subset D$ および $\eta = i\xi'$ がわかる。

同様の方法で、$\ker(S^* \pm i) = \mathbb{C}e^{\mp t}$ が示される。

$$\int_0^{2\pi} \overline{\xi(t)} i f'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \overline{\xi(t)} i f'(t)\,dt =$$

このとき、対応 $D \ni \xi \mapsto i\xi' \in \mathcal{H}$ は閉作用素を定め、その共役作用素が、

付録A　コンパクト距離空間

基本定理の証明。

定理 A.1. 距離空間 X において、次の３条件は同値。

(i) X はコンパクトである *(*有限被覆性をもつ)。

(ii) すべての点列が収束する部分列を含む。

(iii) X は完備かつ全有界である。

Proof. (i) ⇒ (ii): (ii) を否定すると、すべての $x \in X$ が、$\{x_n\}$ の集積点にならないことから、$\{n \geq; d(x_n, x) < r\}$ が有限集合となるような $r(x) > 0$ が存在する。そこで、開被覆 $\{B_{r(x)}(x)\}$ を得るのだが、もし有限集合 $F \subset X$ で、

$$X = \cup_{x \in F} B_{r(x)}(x)$$

となるものが存在すれば、点列 $\{x_n\}$ の目印である n は有限個しか存在しえず、矛盾である。

(ii) ⇒ (iii): 完備性はすぐわかる。もし全有界でなければな、

$$\exists \delta > 0, \forall F \subset X, X \neq \cup_{x \in F} B_\delta(x)$$

であるので、点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ で

$$x_{n+1} \notin \cup_{k=1}^n B_\delta(x_k)$$

となるものを順次選ぶことができる。このとき、$d(x_m, x_n)$ $(m < n)$ であるから、その部分列は決して収束しない。

(iii) ⇒ (ii): 与えられた点列 $\{x_n\}$ に対して、全有界性より、部分列 $\{x_{n'}\}$ で狭い範囲に集中するものをとってくることができる。さらに部分列を取って集中度が増すようにできる。以下、この操作を繰り返すと自然数からなる二重列 $\{n(j,k)\}_{j,k \geq 1}$ で、$n(j,k) < n(j,k+1)$ であり、$\{n(j,k)\}_{k \geq 1}$ は $\{n(j-1,k)\}_{k \geq 1}$ の部分列でさらに

$$d(x_{n(j,k)}, x_{n(j,k)}) \leq \frac{1}{j} \quad \text{for } k, l \geq 1$$

となるものが存在する。そうすると、対角部分列 $\{x_{n(k,k)}\}_{k \geq 1}$ は、

$$d(x_{n(k,k)}, x_{n(l,l)}) \leq \frac{1}{\min(k,l)}$$

なるコーシー列であることがわかり、完備性により、これは収束する。

(ii) ⇒ (i): X の開被覆 $\{U_i\}$ を用意する。まず、$\{U_i\}$ に対するルベーグ数の存在を示す。もし、それが存在しなければ、

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X, \forall i, B_\epsilon(x) \not\subset U_i$$

であるから、$\epsilon = 1/n$ に対応する $x_n \in X$ を考えると、すべての i について $B_{1/n}(x_n) \not\subset U_i$ である。一方、仮定より、収束する部分列 $\{x_{n'}\}$ が存在するのであるが、$x = \lim_n x_{n'}$ を

含む U_i を考え、$B_r(x) \subset U_i$ とすると、$n' \geq 2/r$ かつ $d(x_{n'}, x) < r/2$ である n に対して、$y \in B_{1/n'}(x_{n'})$ であれば、

$$d(x,y) \leq d(x, x_{n'}) + d(x_{n'}, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

となるので、$B_{1/n'}(x_{n'}) \subset U_i$ となって矛盾である。

さて、開被覆に対して存在が示されたルベーグ数を $\delta > 0$ とすると、

$$\forall x \in X, \exists i, B_\delta(x) \subset U_i.$$

一方、(ii) $\Longrightarrow$ (iii) で示された全有界性により、有限集合 $F \subset X$ で、

$$\cup_{x \in F} B_\delta(x) = X$$

となるものが存在するので, 各 $x \in F$ に対して、上のルベーグ数の性質を反映する $i = i_x$ をとれば、

$$X = \cup_{x \in F} B_\delta(x) \subset \cup_{x \in F} U_{i_x}$$

が分かる。 □

付録B　可測関数の近似定理

$\mathbb{R}^d$ 上の可測関数 f, g でその積 fg が可積分であるものに対して、

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x)\, dx$$

とおく。定義から、$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ であることに注意。

補題 B.1. *$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ $(1/p + 1/q = 1)$ のとき、$fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ であり、Hölder 不等式*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

が成り立つ。さらに、$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $M > 0$ に対して, 不等式

$$|\langle f, g \rangle| \leq M \|g\|_q$$

がすべての $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ で成り立てば、$\|f\|_p \leq M$ である。

Proof. $p \neq \infty$ とする。

$$g(x) = \begin{cases} \overline{f(x)}|f(x)|^{p-2} & \text{if } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおけば、$|g(x)|^q = |f(x)|^p$ より、$g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ となるので、$\langle f, g \rangle = \|f\|_p^p$ と $\|g\|_q = \|f\|_p^{p/q}$ との比から、$\|f\|_p = \|f\|_p^{p-p/q} \leq M$ を得る。 □

問 B.1. $p = \infty$ の場合の証明を与えよ。

次の結果は、ルベーグ測度の位相的な性格を反映するものである。ルベーグ積分の導入方法によっては「明らか」ともなるのであるが、測度主体の定義からは議論が必要であるので、ここで補っておく。

定理 B.2. 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ に対して、$C_c(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ *($p \neq \infty$)* で密である。

Proof. Ω が有界である場合に示そう。一般の場合は、有界なもので下から近似すればよい。さて、$C_c(\Omega)$ の $L^p(\Omega)$ での閉包を $\overline{C_c(\Omega)}$ で表し、$\mathcal{B} = \{S \subset \Omega; 1_S \in \overline{C_c(\Omega)}\}$ とおく。

(0) $S \in \mathcal{B}$ に対して、1_S を近似する関数 $f \in C_c(\Omega)$ として $0 \leq f \leq 1$ であるものが取れる。実際、$\|1_S - f\|_p \leq \epsilon$ であるとすると、$\|1_S - \Re f\|_p \leq \|1_S - f\|_p$ より、f は実数値関数としてよい。さて、連続関数 $\chi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ を

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 1, \\ t & \text{if } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{if } t \leq 0 \end{cases}$$

で定めると、$|\chi(s) - \chi(t)| \leq |s - t|$ であるから、$|\chi(f_n) - \chi(1_S)| \leq |f_n - 1_S|$ を p 乗積分して、

$$\|\chi(f_n) - \chi(1_S)\|_p \leq \|f_n - 1_S\|_p \leq \epsilon.$$

ここで、$\chi(f_n) \in C_c(\Omega)$ は、$0 \leq \chi(f) \leq 1$ を満たし、$\chi(1_S) = 1_S$ である。

(i) $\mathcal{B}$ は交叉と和と差で閉じている。$A,\ B \in \mathcal{B}$ に対して、近似関数 $f, g \in C_c(\Omega)$ を $0 \leq f, g \leq 1$ であるように選べば、

$$\|fg - 1_A 1_B\|_p \leq \|fg - f1_B\|_p + \|f1_B - 1_A 1_B\|_p \leq \|g - 1_B\|_p + \|f - 1_A\|_p$$

であるから、$1_{A \cap B}$ は、$fg \in C_c(\Omega)$ で近似される。一方、$1_{B \setminus A} = 1_B - 1_A 1_B$ は $g - fg \in C_c(\Omega)$ で、$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$ は、$f + g - fg \in C_c(\Omega)$ でそれぞれ近似される。

(ii) $\mathcal{B}$ は可算和で閉じている。(i) より、$A = \sqcup_{n\geq 1} A_n$ $(A_n \in \mathcal{B})$ のとき、$A \in \mathcal{B}$ がわかればよい。近似関数 $0 \leq f_n \leq 1$ を $\|f_n - 1_{A_n}\|_p \leq \epsilon/2^n$ と取れば、

$$\begin{aligned}\sum_n \|f_n\|_p &\leq \sum_n (\|f_n - 1_{A_n}\|_p + \|1_{A_n}\|_p) \leq \sum_n \frac{\epsilon}{2^n} + \sum_n |A_n| \\ &= \epsilon + |A| \leq \epsilon + |\Omega| < \infty\end{aligned}$$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は $L^p(\Omega)$ で絶対収束し、$\overline{C_c(\Omega)}$ に入ることがわかる。一方

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n - 1_A \right\|_p = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - 1_{A_n}) \right\|_p \leq \epsilon$$

であるので、ϵ を 0 に近づけることで、$A \in \mathcal{B}$ がわかる。

(iii) $\mathcal{B}$ は、Ω のすべての開集合を含む。各 $a \in \Omega$ を中心とした開球で Ω に含まれるものは、$0 \leq f \leq 1$ である関数 $f \in C_c(\Omega)$ で下から L^p 近似できるので $(p \neq \infty$ に注意)、$\mathcal{B}$ に含まれる。すべての Ω に含まれる開集合は、このようなものの可算和で書けるので (Lindelöf の性質)、やはり $\mathcal{B}$ に属する。

(iv) 以上のことから、$\mathcal{B}$ はボレル集合を含む。すべての可積分関数は、ボレル単純関数の一様極限で書けるので、$|\Omega| < \infty$ に注意すれば、$\overline{C_c(\Omega)}$ に属することがわかり、めでたい。(やはり、鬱陶しい証明だ。) □

Remark 22. 上の証明をなぞることで、次もわかる。コンパクト距離空間 X 上の有界ボレル測度 μ に対して、$C(X)$ は $L^p(X, \mu)$ $(p \neq \infty)$ で密である。

付録C　球の表面積

S. P. Thompson: "Once when lecturing in class he [the Lord Kelvin] used the word 'mathematician' and then interrupting himself asked his class: 'Do you know what a mathematician is?' Stepping to his blackboard he wrote upon it:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Then putting his finger on what he had written, he turned to his class and said, 'a mathematician is one to whom that is as obvious as that twice two makes four is to you.' " (http://zapatopi.net/kelvin/quotes/)

球面 $S^{d-1} = \{(x_1, \ldots, x_d); (x_1)^2 + \cdots + (x_d)^2 = 1\}$ の「表面積」を $|S^{d-1}|$ で表す。

ガウス積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|x|^2}\,dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\,dx\right)^n = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2}$$

を

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|x|^2}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-tr^2} r^{n-1}|S^{n-1}|\,dr = \frac{\Gamma(n/2)}{2t^{n/2}}|S^{n-1}|$$

と計算して比較すると、

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

これを積分すると、単位球体 $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$ の体積は、

$$|B^n| = \int_0^1 r^{n-1}|S^{n-1}|\,dr = \frac{|S^{n-1}|}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)}.$$

近似デルタ関数の例に関わる積分として

$$\int_{|x|\leq 1} |x|^{2a}(1-|x|^2)^b\,dx = \pi^{n/2}\frac{\Gamma(a+n/2)\Gamma(b+1)}{\Gamma(n/2)\Gamma(a+b+1+n/2)}.$$

実際、

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq 1} |x|^{2a}(1-|x|^2)^b\,dx &= |S^{n-1}|\int_0^1 dr\, r^{n-1}r^{2a}(1-r^2)^b \\ &= \frac{1}{2}|S^{n-1}|\int_0^1 dt\, t^{a+n/2-a}(1-t)^b \\ &= \frac{1}{2}|S^{n-1}|\, B(a+n/2, b+1) \\ &= \frac{1}{2}|S^{n-1}|\,\frac{\Gamma(a+n/2)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1+n/2)}.\end{aligned}$$

とくに、

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{I_{0,k}}\int_{|x|\leq 1} |x|^2(1-|x|^2)^k\,dx = \frac{n}{2k+n+2}$$

である。これとチェビシェフ不等式から、

$$\int_{|x|\geq r} \delta_k(x)\,dx \leq \frac{\sigma_k^2}{r^2}$$

付録D　Tietze extension a la Riesz

準備として、X, Y を距離空間で Y はコンパクトとし、$X \times Y$ 上の実数値連続関数 $f(x,y)$ に対して

$$F(x) = \max\{f(x,y); y \in Y\}$$

は、X 上の連続関数を定める。

仮に $x = a$ で連続でないとすると、$\delta > 0$ と点列 $a_n \to a$ で, $|F(a_n) - F(a)| \geq \delta$ となるものが存在する。そこで、$y_n \in Y$ を $F(a_n) = f(a_n, y_n)$ であるように選んでおいて、必要ならば部分列を取って、$y_n \to y_\infty$ であるとしておく。また、$F(a) = f(a,y)$ となる $y \in Y$ も選んでおく。

$$f(a_n, y) \leq F(a_n) = f(a_n, y_n)$$

から極限で移行すると

$$f(a,y) \leq f(a, y_\infty) \leq F(a) = f(a,y)$$

であることから

$$F(a) = f(a,y) = f(a,y_\infty) = \lim_{n\to\infty} f(a_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} F(a_n)$$

となって、これは、前提に反する。

リースの結果の証明に戻って、$Y = K$, $h(x,y) = h(y)/d(x,y)$ に上を適用し、$|d(x,K) - d(x',K)| \leq d(x,x')$ に注意すれば[*34] 関数 g が $X \setminus K$ で連続であることがわかる。また、定義から K の内点でも連続である。そこで、$a \in \partial K$ での連続性であるが、a に近づく点列 $\{x_n\}$ を K に属する部分と $X \setminus K$ に属する部分に分けることで、$x_n \notin K$ である場合に $g(x_n) \to g(a)$ がわかればよい。点列 $a_n \in K$, $y_n \in K$ を

$$d(x_n, K) = d(x_n, a_n), \quad \frac{h(y_n)}{d(x_n, y_n)} = \max\left\{\frac{h(y)}{d(x_n, y)}; y \in K\right\}$$

であるように選んでおく。$\{a_n\}$ の集積点 a_∞ に対して、部分列を $a_{n'} \to a_\infty$ と選んでおくと、不等式 $0 \leq d(x_{n'}, a_{n'}) \leq d(x_{n'}, a)$ から、$d(a, a_\infty) = 0$ が得られる。すなわち、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ がわかる。つぎに、$f(a) > 0$ であれば、$\lim_{n\to\infty} y_n = a$ を示す。まず、

$$h(a_n) \leq \frac{d(x_n, a_n)}{d(x_n, y_n)} h(y_n) \leq h(y_n)$$

[*34] $d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y)$ で、まず左辺で y について下限をとり、その後、右辺の y について下限をとる。

が成り立つ。左の不等式を $d(x_n, y_n)h(a_n) \leq d(x_n, a_n)h(y_n)$ と書き直して極限に移行すれば、$\{y_n\}$ の任意の集積点 y_∞ が $0 \leq d(a, y_\infty)h(a) \leq 0$ をみたすことからわかる。そこで、上の不等式を極限に移行させると、

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, a_n)}{d(x_n, y_n)} h(y_n) = h(a)$$

となる。

最後に $h(a) = 0$ の場合であるが，かりに、$\{y_n\}$ の集積点 y_∞ で a に一致しないものがあったとしても、

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, a_n)}{d(x_n, y_n)} h(y_n) = \frac{d(a, a)}{d(a, y_\infty)} h(y_\infty) = 0 = h(a) = g(a)$$

となって、めでたい。

なお、リースの拡張について、$\|g\|_X \leq \|h\|_K$ であることを注意しておく。

付録E　Kuratowski-Zorn の定理

集合 X の部分集合に関する性質 $P \subset 2^X$ が、次の条件を満たすものとする（帰納的性質という)。性質 P をみたす X の部分集合族 $\{T_i\}_{i\in I}$ が

$$T_i \subset T_j \text{ or } T_j \subset T_i, \quad \forall i, j \in I$$

をみたせば、$\bigcup_{i\in I} T_i \in P$ である。

このとき、$T \in P$ で

$$T' \in P,\ T \subset T' \Longrightarrow T = T'$$

となるもの（極大元）が存在することを選択公理から示すことができる (Kuratowski の定理)。

集合の集合の集合を扱うのを避けるために、少しだけ状況を一般化しておく。（証明の本質は変わらない。）

Let S be a poset (partially ordered set). A subset $T \subset S$ is said to be totally ordered (or linear) if $x, y \in T$ implies $x \leq y$ or $y \leq x$. Let $\mathcal{T}$ be the set of totally ordered subsets (simply tosets) of S, which is a poset by set-inclusion. Choose $T_0 \in \mathcal{T}$ and set $\mathcal{T}_0 = \{T \in \mathcal{T}; T_0 \subset T\}$. A poset S is said to be T_0-inductive if every $T \in \mathcal{T}_0$ has an upper bound in S. We shall show that any T_0-inductive poset S admits a maximal element majorizing T_0, i.e., we can find an upper bound $x \in S$ of T_0 such that $x \leq y$ with $y \in S$ implies $x = y$.

Proof. Let $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}$ be linear. Then $\overline{\mathcal{L}} = \bigcup_{T \in \mathcal{L}} T \subset S$ is in $\mathcal{T}$. In fact, $x, y \in \cup T$ implies $x \in T_x$, $y \in T_y$ with T_x, $T_y \in \mathcal{L}$. Since $\mathcal{L}$ is linear, either $T_x \subset T_y$ or $T_y \subset T_x$ happens, whence $x, y \in T$ with $T \in \mathcal{L}$ and then either $x \leq y$ or $y \leq x$ because T is a toset of S.

Let $T \in \mathcal{T}_0$ and U be the set of upper bounds of T. By assumption, U is not empty. If $U \subset T$, then U consists of one element, say u, which is a maximal element in S.

Now assume that $\partial T = U \setminus T$ is not empty for any $T \in \mathcal{T}_0$ and select $u(T) \in \partial T$ for each $T \in \mathcal{T}_0$, from which we shall extract a contradiction.

Let $\varphi(T) = T \cup \{u(T)\} \in \mathcal{T}_0$ be a one-point extension of T and $\mathcal{M}$ be the minimal family among subsets of $\mathcal{T}_0$ satisfying the following conditions: (i) $T_0 \in \mathcal{M}$, (ii) $\overline{\mathcal{L}} \in \mathcal{M}$ if $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ is linear and (iii) $\varphi(T) \in \mathcal{M}$ for every $T \in \mathcal{M}$. The minimal family exists because these properties are fulfilled by $\mathcal{T}_0$ and preserved under taking intersections; just identify $\mathcal{M}$ with the intersection of all such families.

We claim that $\mathcal{M}$ is linear. This follows if

$$\mathcal{M}' = \{M' \in \mathcal{M}; M \subset M' \text{ or } M' \subset M \text{ for any } M \in \mathcal{M}\}$$

satisfies the properties (i), (ii) and (iii) because it then implies $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ by the minimality of $\mathcal{M}$.

(i) Clearly $T_0 \in \mathcal{M}'$. (ii) Let $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}'$ be linear and let $M \in \mathcal{M}$. Then either $L \subset M$ or $M \subset L$ holds for any $L \in \mathcal{L}$. If $M \subset L$ for some $L \in \mathcal{L}$, then $M \subset \overline{\mathcal{L}}$. Otherwise, $L \subset M$ for any $L \in \mathcal{L}$, which implies $\overline{\mathcal{L}} \subset M$. (iii) Let $M' \in \mathcal{M}'$ and consider

$$\mathcal{M}_{M'} = \{M \in \mathcal{M}; M \subset M' \text{ or } \varphi(M') \subset M\}.$$

If one can show that $\mathcal{M}_{M'} = \mathcal{M}$, then $\varphi(M') \subset M$ or $M \subset M' \subset \varphi(M')$ for any $M \in \mathcal{M}$, which means that $\varphi(B')$ is comparable with every element in $\mathcal{M}$.

To see $\mathcal{M}_{M'} = \mathcal{M}$, it suffices to check three properties for $\mathcal{M}_{M'}$ by the minimality of $\mathcal{M}$: $T_0 \in \mathcal{M}_{M'}$ is obvious. Let $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}_{M'}$ be linear. Then, for $L \in \mathcal{L}$, $L \subset M'$ or $\varphi(M') \subset L$. If $\varphi(M') \subset L$ for some $L \in \mathcal{L}$, then $\varphi(M') \subset \overline{\mathcal{L}}$. Otherwise, $L \subset M'$ for all $L \in \mathcal{L}$, which means $\overline{\mathcal{L}} \subset M'$. In either case, we have $\overline{\mathcal{L}} \in \mathcal{M}_{M'}$. Now let $M \in \mathcal{M}_{M'}$ and we shall show $\varphi(M) \in \mathcal{M}_{M'}$. Since $M \subset M'$ or $\varphi(M') \subset M$ and since $\varphi(M') \subset M$ implies $\varphi(M') \subset \varphi(M)$, we need to focus on the case $M \subset M'$. Since $M \in \mathcal{M}$, the property (ii) of $\mathcal{M}$ is used to see $\varphi(M) \in \mathcal{M}$ and then it is comparable with $M' \in \mathcal{M}'$, i.e., $M' \subset \varphi(M)$ or $\varphi(M) \subset M'$. The latter implies $\varphi(M) \in \mathcal{M}_{M'}$, whereas the former gives $M' = M$ or $M' = \varphi(M)$ in view of $\varphi(M) = M \cup \{u(M)\}$. If

$M' = M$, $\varphi(M') \subset \varphi(M)$ and therefore $\varphi(M) \in \mathcal{M}_{M'}$. Otherwise, $\varphi(M) \subset M'$ and hence $\varphi(M) \in \mathcal{M}_{M'}$.

Finally the linearity of $\mathcal{M}$ gives a contradiction. In fact, if we apply the property (ii) for the choice $\mathcal{L} = \mathcal{M}$, then $T = \overline{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$, whereas the property (iii) shows that $\varphi(T) \in \mathcal{M}$ and therefore $\varphi(T) \subset \overline{\mathcal{M}} = T$ contradicts with $T \neq \varphi(T)$. □

定理 E.1 (Zorn lemma)**.** 順序集合 S の線型な部分集合 T_0 が与えられたとき、T_0 を含む線型な部分集合の中で極大なものが存在する。

Proof. 集合族 $\mathcal{T}_0 \subset 2^X$ は、帰納的であるので、Kuratowski の定理が適用できる。 □

定理 E.2 (Tychonoff)**.** コンパクト位相空間の族 X_j $(j \in I)$ から作られる直積空間 $X = \prod_{j\in I} X_j$ はコンパクト。

証明の前に、定理の背景など。有限直積の場合は選択公理なしで証明できるが、関数解析で必要となる状況を賄えない。一方、すべてが距離空間的な場合、具体的には I が可算集合で各 X_i がコンパクト距離空間である場合には、対角線論法による集積点の存在から、直積空間のコンパクト性が導かれる。この特殊な場合でも十分実用的であり、例えばコンパクト距離空間 $\prod_1^\infty \mathbb{Z}_2$ がカントール集合と同相であるといったことを論じることができる。確率論でいえば、確率変数列できまる確率分布を記述するための見本空間の構成に使える。一方でまた、時刻に依存する確率変数を扱おうとすると、非可算個の直積を避けることができず、それは同時に距離空間の範疇外のものを考えるということでもある。バナッハ空間論では、双対空間に対する弱位相などが該当する。そういった状況では、点列を使ったコンパクト性の定義ではだめで、開集合ないしは閉集合を全面に出した位相空間としてのコンパクト性の定式化が避けられない。コンパクト性に対する正しい認識が得られて初めて Tychonoff の定理に到達することができた、ということができる。逆に、Tychonoff の定理成立要件を模索する過程で、コンパクト性の正しい定式化が得られたと見ることもできよう。定義がまずあって、それに基づいての定理ではないということである。

Proof. 次は、Loomis にある「Bourbaki の証明」である。フィルターを表に出さないところが憎いというべきか。

被覆を使ったコンパクト性の対偶である有限交叉性を示す。X の閉集合の族 $\mathcal{C}$ で有限交叉性をもつものを考える。有限交叉性は帰納的な性質であるので、$\mathcal{C}$ を含む（閉集合には限定しない）有限交叉族で極大なもの $\mathcal{D}$ が存在する。このとき、$\mathcal{D}$ の極大性により、

$A, B \in \mathcal{D}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{D}$ であることに注意する。標準射影 $p_j : X \to X_j$ から得られる族 $p_j(\mathcal{D}) = \{\pi_j(D); D \in \mathcal{D}\}$ も有限交叉性をもつので、X_j がコンパクトであることから、$\bigcap_{D\in\mathcal{D}} \overline{p_j(D)}$ は空集合でない。そこで、各 $j \in I$ に対して $x_j \in \bigcap_{D\in\mathcal{D}} \overline{p_j(D)}$ を選び（ここで、二度目の選択公理を使う）、$x = (x_j)_{j\in I}$ とおく。そして、勝手な $D \in \mathcal{D}$ に対して、$x \in \overline{D}$ を示す。（とくに、$C \in \mathcal{C}$ のとき $x \in C$ である。）そのためには、有限集合 $F \subset I$ と各 $j \in F$ ごとに選んだ x_j の開近傍 U_j に対して、$\bigcap_{j\in F} p_j^{-1}(U_j)$ が $D \in \mathcal{D}$ と交叉すればよい。これは、$p_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{D}$ であり $\mathcal{D}$ が有限交叉に関して閉じていることからわかる。 □

付録F　Baire 測度

ここの内容については、「ルベーグ積分と測度」（裳華房、2022）に書いた。

Urysohn の補題：正則空間と連続関数。Tietze の拡張定理。

正則空間と G_δ 集合、Baire 集合。Baire 集合族上の測度。

命題 F.1. 正則空間上の *Baire* 測度は、正則 *Borel* 測度に一意的に拡張できる。

命題 F.2. コンパクト・ハウスドルフ空間 K 上の有限 *Baire* 測度 μ に対して、$C(K)$ は、$L^1(K, \mu)$ で密である。

定理 F.3. コンパクト・ハウスドルフ空間 K 上の有限 *Baire* 測度と $C(K)$ の正汎関数とは一対一に対応する。

付録G　テンソル積

授業では習わないが、いつのまにか常識として扱われる数学の概念にリー群とかいくつかあって、ベクトル空間のテンソル積もその一つかも知れない。もともとは、連続体物理での応力を表す用語のようであるが、座標変換の下で特殊な変換性をもつ量であるという代数的構造が抽出され数学でいうテンソル積に連なったものである。その辺の経緯とか歴史とかにも興味深いものがあって、「テンソルあれこれ」といった話をどこかでしてみたい気もするが、ここでは、ベクトル空間に対する操作としてのテンソル積についてまとめておこう。

ベクトル空間 V, W に対して（係数体は何でも良いが、ここでは複素数体としておく)、

V と W のテンソル積とは、ベクトル空間 U と双線型写像

$$V \times W \ni (v, w) \mapsto v \otimes w \in U$$

の組で、次の条件をみたすものをいう。

(i) ベクトル空間 U は、$\{v \otimes w; v \in V, w \in W\}$ から生成される。

(ii) $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset V$, $\{w_\beta\}_{\beta \in B} \subset W$ が一次独立であれば、$\{v_\alpha \otimes w_\beta; \alpha \in A, \beta \in B\} \subset U$ も一次独立。

存在と唯一性：まず唯一性から。他に $(U', \otimes')$ という組があったとすると、$v \otimes w \mapsto v \otimes' w$ は、U から U' への同型に拡張される。実際、$\{e_j\} \subset V$, $\{f_k\} \subset W$ を基底とするとき、$\{e_j \otimes f_k\} \subset U$ と $\{e_j \otimes' f_k\} \subset U'$ も基底となるので、同型写像 $\phi : U \to U'$ を $e_j \otimes f_k \mapsto e_j \otimes' f_k$ で定めると、$\phi(v \otimes w) = v \otimes' w$ である。

存在は、$\{(j, k) \in J \times K\}$ を基底とするベクトル空間を U とし、

$$v \otimes w = \sum_{j,k} v_j w_k (j, k)$$

とすればよい。

基底を経由することに不満があれば、つぎのような作り方もある。V, W の双対空間を V^*, W^* とし、$V^* \times W^*$ 上の双線型汎関数の作るベクトル空間を B で表す。$v \in V$, $w \in W$ に対して、双線型汎関数 $v \otimes w : V^* \times W^* \to \mathbb{C}$ を

$$(v \otimes w)(\varphi, \psi) = \varphi(v)\psi(w)$$

で定め、これらで生成された B の部分空間を U とする。この場合には、(ii) の性質を確かめる必要があるが、それは容易である。

テンソル積空間は、通常、$V \otimes W$ という記号で表される。V, W が有限次元であれば、$\dim(V \otimes W) = \dim V \, \dim W$ であることに注意。

ベクトル空間のテンソル積は、3 個以上の場合にも即座に定義できて、$(X \otimes V) \otimes W \cong X \otimes V \otimes W \cong X \otimes (V \otimes W)$ という自然な同型が存在する。

線型写像のテンソル積。線型写像 $S : V \to V'$, $T : W \to W'$ に対して、$V \otimes W$ から $V' \otimes W'$ への線型写像 $S \otimes T$ を

$$(S \otimes T)(v \otimes w) = (Sv) \otimes (Tw)$$

という関係で定めることができる。これを S と T のテンソル積という。こちらも 3 個以上のテンソル積の場合の定義が即座に可能で、結合法則をはじめとした自然な同一視が可能である。

テンソル積と集合の直積の関係：集合 X に対して、X の元を基底とするベクトル空間を $\mathbb{C}X$ で表せば、

$$\mathbb{C}(X \times Y) \cong \mathbb{C}X \otimes \mathbb{C}Y.$$

問 G.1. 自然な埋め込み $V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ が存在することを示せ。これが同型になるのはどのような場合か。

参考文献

[1] J. Dieudonne, Foundations of Modern Analysis, Hesperides Press, 2006.

[2] 日合・柳「ヒルベルト空間と線型作用素」（牧野書店）, 1995.

[3] T. Bühler and D.A. Salamon, Functional Analysis, AMS, 2018.

[4] Avner Friedman, Foundations of Modern Analysis, Dover Publications.

[5] M. Reed and B. Simon, *Functional Analysis*, Academic Press, 1980.

[6] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory, American Mathematical Society, 2005.

[7] W. Rudin, *Functional Analysis*, MacGraw-Hill, 1991.

[8] 山上「量子解析のための作用素環入門」（共立出版）, 2019.

[9] 山上「ルベーグ積分と測度」（裳華房）, 2022.

[10] 吉田耕作「近代解析」（共立出版）, 1956.

索引

Hölder 不等式, 13

Minkowski 不等式, 13

ラドン・ニコディム定理, 44
Riesz-Fisher, 15

ソボレフ空間 Sobolev space, 18

Weierstrass 近似定理, 26

移動作用素 translation, 55

エルミート共役 hermitian conjugate, 67
エルミート形式 hermitian form, 29
エルミート作用素 hermitian operator, 68

開写像定理 open mapping theorem, 62
解析的 analytic, 81
可逆 invertible, 82
掛け算作用素 multiplication operator, 55
可分 separable, 17
関数算 functional calculus, 91
完備 complete, 9
完備化 completion, 11, 17

強収束 strong convergence, 61
極分解 polar decomposition, 70, 73, 110
近似デルタ関数 approximate delta function, 22

グラム・シュミットの直交化 Gram-Schmidt orthogonalization, 32

ケイリー変換 Cayley transform, 94

コーシー列 Cauchy sequence, 9
固有値 eigenvalue, 66
コンパクト compact, 99

支え support, 19, 72, 110

次元 dimension, 31
シフト作用素 shift operator, 69
射影, 68
射影定理, 35
弱収束 weak convergence, 61, 99
収縮 contraction, 5, 74
シュワルツ空間 Schwartz space, 76

随伴 adjoint, 67
*演算 *-operation, 68

*代数 *-algebra, 68
スペクトル spectrum, 66, 82
スペクトル半径 spectral radius, 82
スペクトル分解 spectral decomposition, 93

正規作用素 normal operator, 68
正規直交基底 orthonormal basis, 31
正規直交系 orthonormal system, 30
正作用素 popsitive operator, 68
正値形式 positive semidefinite form, 29
正定値関数 positive definite function, 88
正定値形式 positive definite form, 29
積分作用素 integral operator, 55
線型汎関数 linear functional, 38

双対空間 dual space, 39
総和可能 summable, 71

たたみ込み convolution, 20

中線定理, 36
直交 orthogonal, 30
直交多項式 orthogonal polynomial, 32
直交分解定理, 37

同型写像 isomorphism, 9
等長写像 isometry, 68
凸集合 convex set, 35, 52
凸錐 convex cone, 52

内積 inner product, 29
内積空間 inner product space, 29
内積等式 Parseval's equality, 32

ノルム norm, 8
ノルム空間 normed space, 8
ノルム収束 norm convergence, 61

バナッハ空間 Banach space, 9

左支え left support, 72
微分作用素 differential operator, 55
非有界作用素 unbounded operator, 104
ヒルベルト空間 Hilbert space, 30
ヒルベルト・シュミット作用素 Hilbert-Schmidt operator, 98

フーリエ展開 Fourier expansion, 34
フーリエ変換 Fourier transform, 74
不動点 fixed point, 6
部分等長 partial isometry, 72

不変部分空間 invariant subspace, 66

閉グラフ定理 closed graph theorem, 64
閉作用素 closed operator, 38
ベッセル不等式 Bessel's inequality, 33

右支え right support, 72
密 dense, 17

ヤコビ行列 Jacobi matrix, 54
meager set, 59

有界 bounded, 40, 56
有界作用素 bounded linear operator, 66
ユークリッド空間 Euclidean space, 3
有限ランク作用素 finite rank operator, 99
ユニタリー作用素 unitary operator, 68
ユニタリー表現 unitary representation, 87

両線型形式 sesquilinear form, 29

連続 continuous, 39