フーリエ解析とヒルベルト空間

山上　滋

2024 年 10 月 5 日

目次

1 振動現象とオイラーの公式 5
2 内積の幾何学 6
3 フーリエ級数 9
4 微分とフーリエ級数 15
5 微分方程式三題 19
6 フーリエ級数からフーリエ変換へ 23
7 フーリエ逆変換 28
8 フーリエ変換と内積 31
9 フーリエ変換と超関数 37
10 フーリエ変換で解く微分方程式 42
11 線型汎関数と直交分解 44
A 関数列の収束と連続性 50
B フーリエ変換の諸公式と双対性 51
C Plancherel formula 53
D 正則関数の正値性と積分表示 54

フーリエ解析は、常微分方程式・複素関数とともに応用解析学の「御三家」を成し、またその利用のされかたの違いから、大まかに言って数学・物理学・工学の三様の立場からのアプローチがあるようです。この授業のように、入門レベルにおいても、どの辺りに力点を置くかによって、随分印象の違ったものになります。基礎の部分の理論には、積分論を始めとした深い数学が関与しており、それはそれで、趣のある内容ではあるの

ですが、第一歩を踏み出す方向としては、躊躇せざるを得ません。この講義ノートでは、もともとのフーリエの立場がそうだったように、基本のアイデアが様々な形に展開されていく様子を提供してみたいと思っております。一方でまた、フーリエ解析学は応用数学の交差点でもあります。微積分・複素数・線型代数・微分方程式などなど、基礎数学の習得度を試すための良い題材にもなっています。これまで勉強してきた教科書を読み返すよい機会にもなるでしょう。
　参考書をいくつか挙げておきましょう。

「フーリエ解析とその応用」（洲之内源一郎）、サイエンス社。
１９７７年発行の古い本であるが、初等解析学の範囲内で論理性を確保しつつ偏微分方程式への応用の基礎が解説してあり、簡潔明快な良い本である。ただし、小冊子ということもあり、扱っている応用の範囲は広くはない。

「フーリエ解析入門」（吉川）、森北出版。

これも、数学的論理性および題材に配慮がなされた教科書である。応用として、不確定性原理（不等式）や高速フーリエ変換に触れている点が特徴的。

「フーリエ解析大全」（ケルナー）、朝倉書店。
これは、まさに「大全」というにふさわしいだけの内容と著者の見識が感じられる。ただし、それでも、まだ漏れる題材もあり、フーリエ解析の奥深さを表していると見るべきか。こういう、「文化」を感じさせてくれる本が、近年、とくに日本語の本で少ないように感じてしまうのだが、底の見える浅い池だけを奨励するという最近の風潮を反映しているのかも知れない。

　というようなことを書いてから、はや１１年。今回は、少しだけ積分論的な部分を取り入れ、フーリエ解析を減らし、題して、フーリエ解析とヒルベルト空間。当初は、双対性の視点から、という大胆な副題を掲げていたのだが、それは早々と下ろし、身の丈にあった泥縄式（必要になったところで、必要なことだけする）に徹してやってみるとしよう。

参考書の追加：

「新・フーリエ解析と関数解析学」（新井仁之）、培風館。
フーリエ解析を通じた関数解析入門といった内容の本。これを教科書にしても良かったのであるが、フーリエ変換が超関数論仕様であるとか、扱っている話題の濃淡とかが泥縄式と噛み合わず、断念。

「フーリエ解析」（江沢洋）、朝倉書店。
物理学者の視点からのフーリエ解析といった内容だが、計算を通じた理論の追求といった趣もあり、とかく眼高手低になりがちな数学の学生が読んでも得るところ大なるかな。数学の本でもよく取り上げられる微分方程式が、その導出についても触れてあるなど、当然のことが欠けがちな解析学の本と比べて、さすがは物理学者といったところ。

John K. Hunter and B. Nachtergaele, Applied Analysis, World Scientific, 2001.
Wine cellar の問題を調べていて偶然見つけた本。Applied Analysis という題が災いしたか、数学の図書室であまり見かけないのであるが、どうしてどうして、実解析学の入門としてよくまとまっているように思う。５節の熱方程式の説明では、この本の７章のお世話になったこともあり、多少贔屓目で。

M. Reed and B. Simon, Functional Analysis, Academic Press, 1980.

「現代数理物理学の方法」シリーズの１冊目で、測度論の復習から始まって関数解析のことがいろいろ書いてある宝箱のような本。

昔のノート (fourier2002, integral2007) と関数解析入門 (hilbert2012) も挙げておこう。
http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/fourier/fourier.pdf
http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/integral/integral2007.pdf
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/functional/hilbert2012.pdf

予備知識：１変数・多変数の微積分。内積の線型代数。複素関数の初歩、微分方程式の初歩。位相 (収束) の初歩とルベーグ積分の基本。

目次

1　振動現象とオイラーの公式

すべての振動現象の背後には、三角関数が潜んでいる。また、三角関数には、複素指数関数としての実体を認めることができる。オイラーの関係式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

をまず思い出そう。これは周期現象の数学的表現であり、円周上の運動という幾何学的意味をもつとともに、単振動の微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0,$$

の解 $f(t) = ce^{i\omega t}$ を通じての解析的解釈も可能。

問 1. $\sin^3\theta$ を $\sin\theta, \sin(3\theta)$ の一次結合で表せ。

以下では、関数といえば複素数を値に取るものを考える。**周期関数** (periodic function）と**周期** (period) T の関係

$$f(t+T) = f(t).$$

角振動数 $\omega = 2\pi/T$ と振動数=周波数 (frequency) $1/T$。

関数 $e^{i\omega t}$ は、周期 $T = 2\pi/\omega$ の周期関数。

問 2. 関数 $e^{i\omega t}$ が、与えられた周期 $T > 0$ をもつための ω に対する条件は何か。

周期関数と周期窓 $[a, T+a]$ への制限の対応。関数 x $(-\pi < x < \pi)$ は周期 2π の周期関数としては連続にはならない一方で、$|x|$ $(-\pi < x < \pi)$ は連続な周期関数を定める。

周期関数と 1 次元トーラス。角パラメータ $\theta = 2\pi t/T$ を通じての同一視 $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \longleftrightarrow t + T\mathbb{Z}$ 。

問 3. 変数を増やした場合の多重周期性について考察し、多重周期関数を多次元トーラス $\mathbb{R}^d/\sum_j T_j\mathbb{Z} \cong \prod_j \mathbb{R}/T_j\mathbb{Z}$ 上の関数と同定せよ。

周期関数の**周期積分** (periodical integration) ：周期窓にわたっての積分は、周期窓の選び方によらない。

$$\oint_T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt.$$

ここで、複素数値関数の積分について復習：実数 t を変数に持つ関数 $f(t)$ を $f(t) = g(t) + ih(t)$ と二つの実数値関数を使って表すとき、

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt$$

と

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(\tau_j)(t_j - t_{j-1})$$

の二つの表示がある。前者から、微分積分の公式

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a), \quad F'(t) = f(t)$$

が、後者からは基本不等式

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \qquad (a \leq b)$$

がただちに従う。

微分の公式 $(e^{i\omega t})' = i\omega e^{i\omega t}$ から、周期積分の例として、$n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\oint_{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を得る。

問 4. * 関数 $e^{(a+ib)t}$ の原始関数を利用して、不定積分

$$\int e^{at}\cos(bt)\,dt, \qquad \int e^{at}\sin(bt)\,dt$$

を求めよ。

2　内積の幾何学

条件

$$\oint_T |f(t)|^2 dt < +\infty$$

をみたす（周期）関数を**二乗可積分** (square integrable) 関数と呼ぶ。ここでの積分の種類としてはルベーグ積分を採るのが最も一般的であるが、区分的に連続な関数に対するリーマン積分を考えても十分意味がある。

与えられた周期 T をもつ二乗可積分な関数全体を記号 $\mathcal{H}_T$ で表すことにする。集合 $\mathcal{H}_T$ はまた、周期窓である区間 $[a, T+a]$ 上の二乗可積分関数全体の集合 $L^2(a, T+a)$ と自然に同一視される。

不等式

$$|f(t) + g(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$$

を使うと、

$$f, g \in \mathcal{H}_T \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{H}_T$$

がわかる（$\mathcal{H}_T$ はいわゆるベクトル空間になっている）。

さらに、不等式

$$2|f(t)g(t)| \leq |f(t)|^2 + |g(t)|^2$$

を使えば、

$$(f|g) \equiv \oint_T \overline{f(t)}g(t)\,dt = \int_a^{T+a} \overline{f(t)}g(t)\,dt$$

によって有限の積分値（複素数）が定まる。

問 5. 複素数 z, w に対して、不等式

$$|z+w|^2 \leq 2(|z|^2 + |w|^2), \quad 2|zw| \leq |z|^2 + |w|^2$$

を確かめよ。

上の積分値に関して、以下のことが成り立つ。

(i) $(f|g_1+g_2)=(f|g_1)+(f|g_2)$, $(f|\beta g)=\beta(f|g)$.
(ii) $(f_1+f_2|g)=(f_1|g)+(f|g_2)$, $(\alpha f|g)=\overline{\alpha}(f|g)$.
(iii) $\overline{(f|g)}=(g|f)$.
(iv) $(f|f)\geq 0$.

問 6. これを確かめよ。

上の４つの性質に加えて $(f|f)=0 \Longrightarrow f=0$ を要求したものが、いわゆる内積 (inner product) であるが、この非退化性 (non-degeneracy) がなくても、いわゆるシュワルツ[*1](Schwarz' inequality) 不等式、

$$|(f|g)|^2 \leq (f|f)\,(g|g)$$

すなわち、

$$\left|\oint_T \overline{f(t)}g(t)\,dt\right|^2 \leq \oint_T |f(t)|^2 dt \oint_T |g(t)|^2 dt$$

が成り立つ。

そこで、$(f|f)=0$ となる f を 0 と同一視すれば[*2]、$\mathcal{H}_T$ は $(f|g)$ を内積とする内積空間となる。

問 7. * 連続関数 f に対しては、$(f|f)=0$ から $f(t)=0$ $(\forall t)$ が従うことを示せ。

二乗可積分な関数 f に対しては、シュワルツ不等式

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \leq \sqrt{\int_a^b 1\,dt}\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}$$

より、定積分が意味をもつことに注意する。

問 8. 有限閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 f で、

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < +\infty, \quad \int_a^b |f(t)|^2 dt = +\infty$$

となる例を挙げよ。

より一般的に、内積が用意された複素ベクトル空間を**内積空間** (inner product space) と呼ぶ。内積空間の位相としては、ノルム $\|v\|=\sqrt{(v|v)}$ によるものがもっとも自然である。内積の不等式 $|(v|w)|\leq\|v\|\,\|w\|$ から、

$$\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$$

が導かれる（実は同等）ので、内積空間における距離関数を $d(v,w)=\|v-w\|$ で定めることができる。こうして得られた距離空間が完備であるとき、すなわち、勝手なコーシー列が収束先を有するとき、内積空間は**ヒルベルト空間** (Hilbert space [*3]) と呼ばれる。

[*1] Hermann Schwarz に因む。シュヴァルツ不等式というべきか。他にも Cauchy とか Bunyakovski とかが関係するので、内積の不等式と呼びたい気もする。
[*2] 言い換えると、$\oint_T |f(t)-g(t)|^2\,dt=0$ である２つの関数 f, g を区別しない。
[*3] David Hilbert (1862–1943) に因む。

問 9. 内積は、ノルム位相に関して連続である。

問 10. 周期関数 $e^{-a|t|}$ ($|t| \leq \pi, T = 2\pi$) の長さを求めよ。また、$a \to +\infty$ としたとき、グラフの様子と長さの変化の関係について調べよ。

例 2.1. ヒルベルト空間の例。

(i) 有限次元内積空間。

(ii) 測度空間 (X, μ) に付随した内積空間 $L^2(X, \mu)$. とくに、数列空間 $\ell^2(\mathbb{Z})$ ($X = \mathbb{Z}$, $\mu =$ counting measure)、ユークリッド空間の開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対する $L^2(\Omega)$ ($X = \Omega$, $\mu =$ Lebesgue measure).

(iii) 周期関数の作るヒルベルト空間 $\mathcal{H}_T$.

なお、これら内積空間の完備性は当面使わないので、その証明は後の方にまわす。

問 11. 数列空間 $\ell^2(\mathbb{N})$ の完備性を直接確かめよ。

内積空間におけるベクトルの集まり $\{e_i\}_{i \in I}$ で

$$(e_i|e_j) = \delta_{i,j}, \qquad i, j \in I$$

という性質をもつものを**正規直交系** (orthonormal system) という。

例 2.2. 関数の集まり $\{e^{int}/\sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $\mathcal{H}_{2\pi} = L^2(0, 2\pi)$ における正規直交系を成す。

また、三角関数系 $\{\cos(nt)/\sqrt{\pi}, \sin(nt)/\sqrt{\pi}\}_{n=1,2,\ldots}$ と定数関数 $1/\sqrt{2\pi}$ を併せたものも $\mathcal{H}_{2\pi} = L^2(0, 2\pi)$ における正規直交系である。

問 12. 自然数 n が大きくなるとき、

$$\int_0^\pi \sin^{2n}(x)\, dx$$

が 0 に近づくスピードを見積もれ。

問 13. 上で与えた正規直交系を周期が T の場合に合うように書き直せ。

定理 2.3 (最小二乗近似)**.** 内積空間 V 内に正規直交系 $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$ が与えられているとする。ベクトル $v \in V$ に対して、

$$v_\perp = v - \sum_{k=1}^n (e_k|v) e_k$$

とおくと、$(v_\perp|e_k) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) であり、複素数列 $\{z_k\}_{1 \leq k \leq n}$ に対して、

$$\|v - \sum_{k=1}^n z_k e_k\|^2 = \|v_\perp\|^2 + \sum_{k=1}^n |z_k - (e_k|v)|^2$$

が成り立つ。

系 2.4. 内積空間 V における正規直交系 $\{e_i\}_{i \in I}$ とベクトル $v \in V$ に対して、

$$\sum_{i \in I} |(e_i|v)|^2 \leq (v|v) = \|v\|^2.$$

これを **Bessel 不等式** (Bessel's inequality) という。

問 14. * 関数列 $x, x^2, x^3, \cdots$ $(|x| \le \pi)$ に Gram-Schmidt の直交化を適用して得られる正規直交系の最初の３つ f_1, f_2, f_3 を求め、$\sin x$ $(-\pi \le x \le \pi)$ に対して、

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - ax - bx^2 - cx^3|^2 \, dx$$

が最小になるように定数 a, b, c を定めよ。

命題 2.5 (高周波平均の公式)**.** 有界閉区間 $[a, b]$ で定義された二乗可積分関数 $f(t)$ に対して、

$$\lim_{n\to\pm\infty} \int_a^b f(t) e^{-int} \, dt = 0.$$

Proof. $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ の場合には、f を $t \in [-\pi, \pi] \setminus [a, b]$ では 0 であるように拡張して、

$$\int_a^b f(t) e^{-int} \, dt = \sqrt{2\pi}(e_n|f) \to 0 \quad (n \to \pm\infty)$$

に注意すれば良い。

$[a, b] \not\subset [-\pi, \pi]$ の場合には、$[a, b]$ を $[-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k]$ $(k \in \mathbb{Z})$ で分割して、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} f(t) e^{-int} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s + 2\pi k) e^{-in(s+2\pi k)} ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s + 2\pi k) e^{-ins} ds\end{aligned}$$

に上の場合を適用すれば良い。 □

問 15. $f(t) = 1$, $f(t) = t$ に対して、上の性質を直接確かめよ。

Remark 1. 上の結果は次のような直感的な意味付けが可能である。まず、オイラーの公式より、主張は

$$\lim_{n\to\infty} \oint f(t) \cos(nt) \, dt = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \oint f(t) \sin(nt) \, dt = 0$$

と同じ内容である。この積分に対する解釈としては、高周波関数 $\cos(nt)$ または $\sin(nt)$ で f を振幅変調 (amplitude modulation) して、それを f の周期にわたって積分するというもので、もし、関数 f の変化の仕方が $\cos(nt), \sin(nt)$ の周期 $2\pi/n$ に比べてゆっくりであれば、プラス成分とマイナス成分の積分値が打ち消し合って、全体の積分値は 0 に近づく。

3 フーリエ級数

周期 2π の周期関数 $f(x)$ で

$$\oint_{2\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

となるものを

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}, \quad f_n \in \mathbb{C}$$

という形の級数 (**Fourier series**) で表示する問題（$f(x)$ の**フーリエ展開**）について考える。フーリエ級数の各項が周期 2π の周期関数であることに注意。

フーリエ展開を認めて形式的に計算すると、

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \oint_{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

を得る。このように定めた複素数 f_n は、関数 f の**フーリエ係数** (Fourier coefficient) と呼ばれる。内積の不等式

$$\int_0^{2\pi} |f(t)e^{int}|\, dt \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} 1 dt} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt} < \infty$$

から、フーリエ係数を与える積分は絶対収束することに注意。

さらに、このフーリエ級数は、正規直交系 $\{e_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$ を使って、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e_n|f) e_n(x)$$

と表すことができる。

問題は、これを $f(x)$ と同定する際の意味である。最も素朴な各点収束

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} (e_k|f) e_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

は、連続関数でも一般には正しくないことが知られている。実際に極限を取る前の右辺を計算してみると

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-ik(x-y)}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x-y) f(y)\, dy, \quad D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

であるが、D_n (Dirichlet kernel という) の $n \to \infty$ のときの様子からわかるように、これの極限を調べることは、手強い問題である。

問 16.

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikx}$$

を示し、$n \to \infty$ のときの関数 D_n の振る舞いを実感せよ。また、D_n の Cesaro 平均 (Fejer kernel という) が

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

であることを確かめ、これについてもその振る舞いを調べよ。ヒント：$(e^{ix} - 1) D_n(x) = e^{(n+1)x} - e^{-inx}$.

例 3.1. ステップ関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x < \pi, \\ 0 & \text{if } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

のフーリエ係数は、

$$f_0 = \frac{1}{2}, \quad f_n = \frac{1 - (-1)^n}{2\pi i n}$$

であるから、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$$

は絶対収束しない。

問 17. フーリエ級数が絶対収束すれば、得られる関数は連続関数である。また、そのような２つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して、$(f|g)$ をフーリエ係数 f_k, g_k を用いて表せ。

問 18. 三角関数 $\cos(mx)$, $\sin(mx)$ のフーリエ係数を求めよ。

問 19. 関数 f が実数を値に取るとき、フーリエ係数がみたすべき条件を求め、フーリエ展開を三角関数系により書き直せ。

問 20. 自然数 m に対して、関数

$$x_+^m = \begin{cases} x^m & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

の区間 $[-\pi, \pi]$ でのフーリエ係数を求めよ。

small

Remark 2. フーリエ級数論の歴史的な流れについては、「江沢」の１章を勧める。

フーリエ展開の妥当性について調べよう。まず、絶対（値）収束するとは限らないので、その正則化 (regularization) を考える。これには、Fejer の方法を始めとしていくつかのアプローチがあるが、ここでは Poisson の方法について説明しよう。

高周波平均の公式（あるいはベッセル不等式）により、

$$\lim_{n\to\pm\infty} f_n = 0$$

が成り立つので、$0 < r < 1$ に対して、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{inx}$$

は絶対収束する。そして、$r \to 1$ のとき、フーリエ級数に近づくと考えられる。この級数に、f_n を f の積分で表したものを代入すると、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) P_r(x-y)\,dy$$

という表式を得る。ここで、$P_r(x)$ は、

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty} (re^{ix})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (re^{-ix})^n \\ &= \frac{1}{1-re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \end{aligned}$$

なる周期 2π の周期関数を表し、**Poisson 核** (Poisson kernel) と呼ばれる。

二倍角の公式を使って、Poisson 核の表式を書きなおせば、

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{x}{2}}$$

が得られる。この形から、P_r の概形がわかる。

命題 3.2 (Poisson 核の性質)**.**

(i) $P_r(x)$ は x の解析関数であり、不等式 $\frac{1+r}{1-r} \geq P_r(x) \geq \frac{1-r}{1+r}$ を満たす。

(ii)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx = 1,$$

(iii)
$$\lim_{r\to 1-0} P_r(x) = 0$$
for $x \neq 0$. More precisely, $\forall\delta > 0$, $\forall\epsilon > 0$, $\exists r' < 1$, $P_r(x) \leq \epsilon$ for $\delta \leq |x| \leq \pi$ and $r' \leq r < 1$.

問 21. * $P_r(x)$ の概形を描き、上の諸性質を確かめよ。

定理 3.3. 周期 2π の連続関数 $f(x)$ のフーリエ係数を $\{f_n\}$ とすれば、

$$f(x) = \lim_{r\to 1-0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{inx}$$

が x について一様に成り立つ。すなわち、

$$\lim_{r\to 1-0}\sup\{|f(x) - \sum_n f_n r^{|n|} e^{inx}|; x\in\mathbb{R}\} = 0.$$

Proof. 与えられた $\epsilon > 0$ に対して、

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon \qquad \text{for } |x-y| \leq \delta$$

が成り立つように $\delta > 0$ を十分小さく取って（連続関数の一様連続性)、さらに

$$P_r(x-y) \leq \epsilon \qquad \text{if } |x-y| \geq \delta$$

であるように $r < 1$ を十分 1 に近く取っておけば、

$$\begin{aligned}
&\left|2\pi f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(y)P_r(x-y)\,dy\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(y))P_r(x-y)\,dy\right|\\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(y)|P_r(x-y)\,dy\\
&= \int_{|x-y|\leq\delta}|f(x)-f(y)|P_r(x-y)\,dy + \int_{|x-y|\geq\delta}|f(x)-f(y)|P_r(x-y)\,dy\\
&\leq \epsilon\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x-y)\,dy + \epsilon\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(y)|\,dy\\
&\leq 2\pi\epsilon + 4M\pi\epsilon
\end{aligned}$$

となる。ただし、$M = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x\in\mathbb{R}\}$ とおいた。 □

系 3.4 (一様近似定理)**.** $\forall\epsilon > 0$, $\exists N$, $\exists\{a_n\}_{n=-N}^{N}$

$$\left\|f - \sum_{-N}^{N} a_n e_n\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x) - \sum_{n=-N}^{N}\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right| \leq \epsilon.$$

ここで、関数 $h(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ に対して、$\|h\|_\infty = \sup\{|h(x)|; x\in\mathbb{R}\}$ である。

定理 3.5. 周期 2π の二乗可積分な周期関数 $f(x)$ に対し、内積空間 $\mathcal{H}_{2\pi} = L^2(0, 2\pi)$ の位相に関して、

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (e_n|f)e_n$$

が総和収束[*4] (summable) の意味で成り立つ。すなわち、どのように小さな $\epsilon > 0$ をとってきても, 有限集合 $F \subset \mathbb{Z}$ を大きく取りさえすれば、F を含む勝手な有限集合 $F' \subset \mathbb{Z}$ に対して

$$\left\| f - \sum_{n\in F'} (e_n f)e_n \right\| \leq \epsilon$$

が成り立つ。とくに、

$$\lim_{M,N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=-M}^{N} (e_n|f)e_n \right\| = 0$$

である。

Proof. 最小二乗近似と一様近似定理により、連続関数 f について、

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} (e_n|f)e_n \right\|^2 \leq \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n \right\|^2 \leq 2\pi \left\| f - \sum a_n e_n \right\|_\infty^2 \to 0$$

であるから、

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} (e_n|f)e_n \right\|^2 = 0$$

を得る。

次に、二乗可積分な周期関数 f に対しては、連続関数 g で $\|f - g\|$ がいくらでも小さいものが取れるので (付録参照)、

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} (e_n|f)e_n \right\| &\leq \|f - g - \sum (e_n|f-g)e_n\| + \|g - \sum (e_n|g)e_n\| \\ &\leq \|f-g\| + \|g - \sum (e_n|g)e_n\|\end{aligned}$$

もいくらでも小さくすることができる。 □

問 22. 上の証明を総和収束の形に書きなおせ。

問 23. * 有限個の不連続点を許す区分的に連続な周期関数 f に対して、連続な周期関数 g で、$\|f - g\|$ がいくらでも小さいものが存在することをリーマン積分の範囲で示せ。

系 3.6. 周期 2π の二乗可積分な周期関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して、

$$(f|g) = \sum (f|e_n)(e_n|g)$$

すなわち、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f_n} g_n, \qquad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx.$$

[*4] 総和可能ともいう。

とくに、

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f_n|^2, \quad (f|f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|(e_n|f)|^2$$

である。

Proof. 内積のノルムに関する連続性による。 □

Remark 3. 内積の位相に関する関数列の収束は、平均収束 (convergenc in mean) とも呼ばれる。元々は、確率変数の収束についての用語であろう。個々の点における関数の値の収束性（各点収束, pointwise convergence）と比べて、関数全体についての収束性を表している。

一般に、内積空間 $\mathcal{H}$ の正規直交系 $\{e_n\}$ が、すべてのベクトル v に対して

$$(v|v) = \sum_n |(e_n|v)|^2$$

を満たすとき、完全 (complete) であるという言い方をする。上の最後の関係は、**Parseval の等式** (Parseval's equality) と称され、三角関数系の完全性を表している。完全正規直交系に対しては、一般フーリエ展開

$$f = \sum_n (e_n|f)e_n$$

が総和収束の意味で成り立つので、完全正規直交系というかわりに**正規直交基底** (orthonormal basis) という言い方もする。またこのとき、内積の連続性から

$$(f|g) = \sum_n (f|e_n)(e_n|g)$$

が一般的に従う。量子力学では、この関係式を

$$I = \sum_n |e_n)(e_n|$$

と簡潔に書き表す (Dirac の記法)。この記号のためには、内積は第二変数について線型であるように取っておく必要がある。

問 24. 周期が $T > 0$ のときに、上の系の公式を書きなおしてみよ。

問 25. 完全性から一般フーリエ展開を導け。

多項式で表される関数のフーリエ係数を計算するために、$y \in \mathbb{R}$ をパラメータとした不定積分

$$\int x^k e^{-iyx}dx$$

を求めてみよう。部分積分を使って「循環的」に計算することもできるが、ここでは、

$$\int e^{-iyx}dx = \frac{i}{y}e^{-iyx}$$

を y で次々に偏微分して、

$$\int xe^{-iyx}dx = \frac{ix}{y}e^{-iyx} + \frac{1}{y^2}e^{-iyx}$$

$$\int x^2e^{-iyx}dx = i\frac{x^2}{y}e^{-iyx} + \frac{2x}{y^2}e^{-iyx} - \frac{2i}{y^3}e^{-iyx}$$

などと計算してみる。

これを使って、x, x^2 $(-\pi < x < \pi)$ のフーリエ係数を求めると、それぞれ

$$\frac{i}{n}(-1)^n(n \neq 0), \qquad \frac{2}{n^2}(-1)^n(n \neq 0)$$

となる。さらに Parseval の等式を書き下せば、ゼータ関数の特殊値が得られる。

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

問 26. x^2 の場合を確かめる。また x^3 の計算から何が出て来るか？

4 微分とフーリエ級数

二乗可積分である周期関数 $F(x + 2\pi) = F(x)$ を用意する。有限区間に制限した F が積分可能であることから、

$$f(x) = \int_{[0,x]} F(t)\,dt + C$$

は、半区間 $[0, \infty)$ 上の連続関数を定める。また F の周期性の結果である

$$f(x + 2\pi n) = n \oint_{2\pi} F(t)\,dt + f(x), \quad x \geq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

に注意すれば、f が周期 2π の周期関数に拡張できるための必要十分条件は、

$$\oint F(t)\,dt = 0.$$

このような形で表わされる連続関数 $f(x)$ を F の不定積分と呼ぶことにする。すぐあとで見るように、F は f で決まるので、導関数の記号を流用して $F = f'$ と書く。

例 4.1. 周期関数 $g(x) = |x|$ $(|x| \leq \pi)$ は、周期関数 $G(x) = x/|x|$ $(-\pi < x \leq \pi)$ を積分したものになっている。一方で、周期関数 $F(x) = 1$ $(|x| \leq \pi)$ の不定積分である $f(x) = x + C$ は、周期関数にならない。

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = 2\pi.$$

Remark 4. x $(-\pi < x \leq \pi)$ を周期関数に拡張したものを $h(x)$ と書けば、デルタ関数 $\delta(x)$ を使った

$$H(x) = 1 - 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n - \pi)$$

という周期「関数」が h の導関数に相当し、これを不定積分すればもとの h が復元する。

補題 4.2. 連続関数 f が局所可積分関数 F の不定積分で表わされるとき、有限閉区間 $[a, b]$ の上で定義された C^1 関数 $g(x)$ に対して、

$$\int_a^b g'(x) f(x)\,dx = -\int_a^b g(x) F(x)\,dx + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Proof.

$$\begin{aligned}\int_a^b g'(x)f(x)\,dx &= \int_a^b g'(x)\left(\int_a^x F(y)\,dy + C\right)\,dx \\ &= \int_a^b F(y)\left(\int_y^b g'(x)\,dx\right)\,dy + C\int_a^b g'(x)\,dx \\ &= \int_a^b F(y)(g(b)-g(y))\,dy + C(g(b)-g(a)) \\ &= -\int_a^b F(y)g(y)\,dy + f(b)g(b) - f(a)g(a).\end{aligned}$$

□

系 4.3. 連続関数 f の逆積分 F は、存在すれば一つしかない。とくに、f が C^1 であれば、F は f の導関数に一致する。

Proof. さて、F がその不定積分 f で決まることを見よう。もし、E の不定積分も f に一致したとすると、この部分積分の関係式から、

$$\int_a^b (E(x)-F(x))g(x)\,dx = 0$$

がすべての C^1 関数 g について成り立つ。ここで、ルベーグ積分における近似の議論を使えば、全ての有界可測関数 $g(x)$ に対しても上の等式が成り立つことがわかるので、

$$g(x) = \begin{cases} |E(x)-F(x)|/(E(x)-F(x)) & \text{if } E(x) \neq F(x), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおけば、$\int_a^b |E(x)-F(x)|\,dx = 0$ を得る。すなわち、積分論的に $E = F$ である。

なお、$E, F \in \mathcal{H}_{2\pi}$ の場合に限定すれば、$g(x) = e^{-inx}$ に対する等式から、$E_n = F_n$ となるので、$\mathcal{H}$ 元として $E = F$ であることが即座にわかる。 □

定理 4.4 (一様収束定理)**.** 連続な周期関数 f が $f' \in \mathcal{H}_{2\pi} \cong L^2(0, 2\pi)$ の不定積分であるとき、次が成り立つ。

(i) f' のフーリエ係数を f'_n で表せば、$f'_n = inf_n$ である。すなわち

$$f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} inf_n e^{inx}.$$

(ii)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n| < +\infty.$$

(iii)

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$$

が x について一様に成り立つ。

Proof. (i) 部分積分の式で、$g(x) = e^{-inx}$ とおけばよい。

(ii) f' のフーリエ係数を f'_n で表せば、f' が二乗積分可能であることから、

$$\sum_n |f'_n|^2 < +\infty$$

である。一方、先に確かめた部分積分の公式を $g(x) = e^{-inx}$ に対して適用すれば、$f'_n = inf_n$ となるので、

$$\sum_{n\neq 0} |f_n| = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}|f'_n| \le \left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n\neq 0}|f'_n|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

である。

(iii) ポアソン核を使った一様近似定理

$$f(x) = \lim_{r\to 1-0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{inx}$$

および上の補題から、

$$\left| f(x) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx} \right| \le \left| f(x) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{inx} \right| + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|(1 - r^{|n|})$$

と評価すればよい。 □

例 4.5. $f(x) = |x|$ $(-\pi \le x \le \pi)$. 　不定積分

$$\int xe^{-inx}\,dx = \frac{i}{n}xe^{-inx} + \frac{1}{n^2}e^{-inx}$$

を使って、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-inx}dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \quad (n \neq 0)$$

と $f_0 = \pi/2$ より、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n:\mathrm{odd}} \frac{1}{n^2}e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \cdots\right)$$

が $|x| \le \pi$ について一様に成り立つ。この右辺の見かけからは、$x \in \pi\mathbb{Z}$ で折れている様子が明らかでないことに注意。

問 27. * 周期 2π の周期関数 $f(x)$ を $f(x) = x$ $(-\pi < x \le \pi)$ で定めるとき、上の定理 (ii) の結論が成り立たない。証明のどの部分が破綻しているのか確認。

問 28. 区分的になめらかな周期関数は、上の定理の仮定をみたす。

問 29. 周期 $4/\pi$ の周期的連続関数 f を $f(x) = x\sin(1/x)$ $(-2/\pi \le x \le 2/\pi)$ で定めるとき、f が、局所可積分関数の不定積分として表示できるかどうか調べよ。

問 30. * 連続な周期関数 $f(x) = |x|^\alpha$ $(-\pi \le x \le \pi)$ 、ただし $\alpha > 0$、に対して、

$$\oint |f'(x)|^2dx = \begin{cases} \frac{2\alpha^2\pi^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} & \text{if } 2\alpha - 1 > 0, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

上の定理と部分積分を組み合わせると、フーリエ係数の減少のスピードと関数の滑らかさの関係がわかる。

命題 4.6. 周期関数 $f(x+2\pi)=f(x)$ のフーリエ係数を $\{f_n\}$ で表すとき、f が m 回微分可能であり、$f^{(m)}$ が二乗可積分関数の不定積分となるための必要十分条件は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2m+2}|f_n|^2 < +\infty$$

となることで、このとき、$0 \le k \le m$ について、

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^k f_n e^{inx}$$

が x について一様に成り立つ。

Proof. 部分積分を繰り返せば、$(f^{(k)})_n = (in)^k f_n$ $(k=1,2,\cdots,m)$ が得られるので、$m=0$ のときに、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|f_n|^2 < \infty$$

から $f' \in \mathcal{H}_{2\pi}$ がわかればよい。$\mathcal{H}_{2\pi}$ の完備性により、

$$G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} inf_n e^{inx}$$

は $\mathcal{H}_{2\pi}$ に属する関数を定めるので、その不定積分を $g(x)$ で表せば、$ing_n = inf_n$ すなわち $g_n = f_n$ $(n \ne 0)$ である。さらに不定積分の定数を調整することで $g_0 = f_0$ とできるので、

$$\int_0^{2\pi} (f(x)-g(x))e^{-inx}\,dx = 0 \ (\forall n \in \mathbb{Z})$$

となり、周期的連続関数 $f-g$ をフーリエ多項式 $h(x) = \sum_{k=-N}^{N} h_k e^{ikx}$ で一様近似することで、

$$\int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|^2\,dx = \int_0^{2\pi} (f(x)-g(x))\overline{(f(x)-g(x)-h(x))}\,dx \le \|f-g-h\|_\infty \int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|\,dx \to 0$$

から $f=g$ がわかる。 □

系 4.7. (i) f が m 回微分可能で $f^{(m)}$ が連続であれば、

$$f_n = o\left(\frac{1}{|n|^m}\right)$$

である。

(ii) f のフーリエ係数 f_n が

$$f_n = O\left(\frac{1}{|n|^{m+2}}\right)$$

をみたせば、f は m 階微分可能であり $f^{(m)}$ が連続である。

問 31. 上の系の意味を、数式を使わずに言葉だけで説明してみよ。

一様収束についての定理は、多くの具体的な連続関数に対するフーリエ展開を保証する。これをさらに洗練させることで、具体的な不連続関数の不連続点におけるフーリエ級数ともとの関数の値との関係を明らかにすることもできる（fourier2002 参照)。

連続関数が、$x = a$ の付近で自乗可積分関数の不定積分として表わされるとき、$x = a$ を f の穏やかな連続点と呼ぶ。このことを象徴的に

$$\exists \epsilon > 0, \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} |f'(x)|^2 < \infty$$

と表す。同様に、$x = a$ で不連続な関数 $f(x)$ が $(a-\epsilon, a)$, $(a, a+\epsilon)$ それぞれの区間で二乗可積分な関数の不定積分で表わされるとき、$x = a$ を f の穏やかな不連続点と呼ぶ。

定理 4.8 (Dirichlet)**.** 有界な可測周期関数 $f(x)$ の穏やかな不連続点 $x = a$ において、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ika} = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2}$$

が成り立つ。

とくに、穏やかな連続点においてフーリエ級数は収束し、その値は $f(a)$ に等しい。

Remark 5. 穏やかな連続点の付近で収束は一様であるが、不連続点ではそうならない（Gibbs 現象)。

5 微分方程式三題

円板におけるディリクレ問題

適当な滑らかさの境界をもった平面内の連結開集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して、D におけるディリクレ問題 (Dirichlet problem) とは、境界 ∂D 上の連続関数 f を指定した上で、2 次元の調和関数 $u(x, y)$ $((x, y) \in D)$ で、$(x, y) \in D$ が境界点 $p \in \partial D$ に近づくとき、

$$\lim_{(x,y)\to p} u(x, y) = f(p)$$

となるものを見出す問題である。ここで、$u(x, y)$ が調和関数であるとは、ラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in D),$$

をみたす関数のことをいう。

調和関数を特徴付ける重要な性質として平均値性 (mean value property) がある。点 $(a, b) \in D$ を中心とした半径 $r > 0$ の円 C とその内部 B が D に含まれるとすると、$u(a, b)$ は、円周上に制限した u の平均値に一致する：

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\, d\theta.$$

このためには、右辺の積分値が r に依らないことを言えばよく、実際、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} u(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr}u(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(u_x\cos\theta + u_y\sin\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{r}\oint_C (u_x dy - u_y dx) \\ &= \frac{1}{r}\int_B (u_{xx}+u_{yy})\,dxdy = 0.\end{aligned}$$

最後の行でグリーンの定理を使った。

この平均値性の重要な結論として、最大値原理「実調和関数は、定義域の内部で最大値も最小値も取らない」が導かれる。とくに、D が有界領域であれば、実調和関数の最大値・最小値は、境界点において実現することがわかり、ディリクレ問題の解の一意性が成り立つ。

問 32. 最大値原理を導け。

解の存在については、境界 ∂D がある種のなめらかさを持てば成り立つことが知られている。

ここでは、円板 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < 1\}$ の場合に、f のフーリエ係数を使った解の表示式を与えよう。再度、Poisson 核が現れることになる。

まず、変数の対応 $(x,y) \longleftrightarrow z = x+iy$ により、複素 1 変数の関数の問題に読み替える。よく知られた関係式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

により、正則関数、反正則関数およびそれらの一次結合は調和関数であることがわかる。関数 $f(e^{i\theta})$ を θ の周期関数とみなし、そのフーリエ係数を f_n で表し、$|z|<1$ における調和関数を

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|}e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}\overline{z}^n$$

で定めると（右辺は絶対収束することに注意)、

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} u(re^{i\theta})$$

が θ について一様に成り立つ (定理 3.3) ことから、これが求める解である。

問 33. * $f_n = 1$ $(n \in \mathbb{Z})$ である場合に、円板内の u の様子を極座標を用いて表せ。

熱方程式（初期値問題）

2つめの応用として、熱方程式を取り上げよう。1次元物体であれば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

ここで、$u(t,x)$ は、の時刻 t における温度を、$D>0$ は熱の拡散の程度を表す定数である。物質が拡散していく様子を記述すつものでもあることから、拡散方程式とも呼ばれる。熱方程式も熱エネルギーの拡散ということで。

この微分方程式は、２つの物理法則から導かれる。熱伝導に関するフーリエの法則：物体のある点での単位時間あたりの熱エネルギーの流量は、その点における温度変化の勾配に比例する。１次元の物体の場合であれば、ある点 x において、左から右に移動する単位時間あたりの熱エネルギー量は、

$$q(t,x) = -K\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

で与えられる（$K > 0$ は物体の熱伝導度を表す定数）。

エネルギーの局所保存則：有限の境界をもった物体のエネルギーの変化量は、物体の表面を通じて流れ込んだエネルギー量に一致する。１次元の物体であれば、時刻 t における、x の地点での単位長さあたりの熱エネルギー量を $E(t,x)$ とするとき

$$E(t+\Delta t, x)\Delta x - E(t,x)\Delta x = q(t,x)\Delta t - q(t, x+\Delta x)\Delta t, \text{i.e.},$$

物体のもつ熱エネルギーと温度の時間変化は関数関係にあり、温度変化が大きくない範囲で成り立つ１次近似式 $\Delta E = c\Delta u = c(u(t+\Delta t,x) - u(t,x))$ （$c > 0$ は、単位長さあたりの熱容量で、ここでは定数と思う）を使うと、

$$c\frac{u(t+\Delta t,x) - u(t,x))}{\Delta t} = K\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)/\Delta x$$

となるので、極限 $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ を取れば、$D = K/c$ とおいた熱方程式を得る。

さて、周期関数として処理する都合上、半径 R のリング状の物体上の温度 u について考える。物体に沿った座標を使えば、$u(t, x+2\pi R) = u(t,x)$ となるので、x への依存性をフーリエ級数を使って、

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t)e^{inx/R}$$

ここで、

$$u_n(t) = \frac{1}{2\pi R}\int u(t,x)e^{-inx/R}\,dx$$

は、u になめらかさ（例えば C^1 関数）を要求すれば、微分と積分の順序を交換できて、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n'(t)e^{inx/R}$$

となり、さらに C^2 までの滑らかさを仮定すれば、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t)\left(\frac{in}{R}\right)^2 e^{inx/R}$$

より、熱方程式は、u_n に対する微分方程式

$$\frac{du_n}{dt} = -\frac{D}{R}n^2 u_n$$

に帰着する。これを解くと、$u_n(t) = e^{-tDn^2/R}u_n(0)$ となるので、初期値 $f(x)$ に対する解として、次を得る。

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tDn^2/R + inx/R} f_n, \quad f_n = \frac{1}{2\pi R}\int f(x)e^{-inx/R}\,dx$$

温度の空間分布の平均値が時間によらずに一定であることに注意。

一点 $x = 0$ を瞬間的に温めた場合 ($f_n = \text{constant}$, $n \in \mathbb{Z}$ に相当) の解は、楕円関数論に現れるテータ関数 (theta function) という興味深いものになっている。

問 34. * 解のゼロフーリエ成分 f_0 以外は、時間経過とともに急速に 0 に近づくこと、$t > 0$ における解の解析性を確かめよ。

熱方程式（境界値問題）

時間について周期的な場合の境界値問題。ワインセラーの数理。フーリエが最も関心を寄せた問題であるという噂もある。はたして、彼はビンテージにありつけたのか。

今度は、地球の表面に近い地中の温度の経年変化について調べよう。近似的に地球の表面は平面であるとし、地表から深さ x の地中点における温度を $u(t, x)$ で表す。大まかに言って、地表面では、１年を周期とする周期的な変化をするであろう。問題は、その地球表面での温度変化 $f(t)$ がわかっているときに、地中の温度変化がどのようになるかを調べることにある。ここでは、地中においても、１年を周期とした周期的変化をすると考えて、こんどは時間変数について、

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(x) e^{int}$$

のようにフーリエ展開する。ただし、時間の単位は、１年を 2π とするものを採用した。実際は、深さはいくらでも大きく取れるわけではないが、温度変化を問題にする範囲よりはずっと深くまで有効であるとし、さらに、もうひとつの境界条件として、どのように深くなっても温度は有界であるという仮定をおく。

$$\limsup_{x \to \infty} |u(t, x)| \leq M.$$

このとき、

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, x)| \, dt \leq M$$

に注意。

初期値問題のときと同様に、熱方程式および境界条件 $u(t, 0) = f(t)$ をフーリエ係数を使った形で書き直すと

$$inu_n(x) = Du_n''(x), \quad u_n(0) = f_n.$$

これをとけば、

$$u_n(x) = a_n e^{\sqrt{in/D}x} + b_n e^{-\sqrt{in/D}x} \ (n \neq 0, a_n + b_n = f_n), \quad u_0(x) = f_0 + cx.$$

有界性の条件から、$c = 0$ であり、複素数の平方根のうち適切なものは、

$$\sqrt{in/D} = \begin{cases} -(1+i)\sqrt{n/2D} & \text{if } n \geq 1, \\ -(1-i)\sqrt{|n|/2D} & \text{if } n \leq -1 \end{cases}$$

となるので、

$$u(t, x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-x\sqrt{n/2D}} e^{i(nt - x\sqrt{n/2D})} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} e^{-x\sqrt{n/2D}} e^{-i(nt - x\sqrt{n/2D})}.$$

最も単純なモデルとして $f(t) = a + b \sin t$ を採用すれば、

$$u(t, x) = a + be^{-x/\sqrt{2D}} \sin(t - x/\sqrt{2D}).$$

これは、$x \to \infty$ のとき一定温度 a に近づき、地中の温度変化は、地表のそれに比べて、$x/\sqrt{2D}$ だけ位相 (phase [*5]) が遅れて変化する。位相が最大限ずれる最初の深さ $x = \pi\sqrt{2D}$ では、経年変化の振幅は、地表に比べて、$e^{-\pi} \approx 0.04$ 倍の大きさにまで減じる。仮に夏冬の温度差が $30°C$ であれば、この深さの地中では $1.2°C$ の温度差となり、ほぼ一定と見て良い。しかも、冬暖かく、夏涼しい。

実際のデータに基づいて $\pi\sqrt{2D}$ を計算すると約 4 mになり、Wine cellar が地下 4 mあたりに置かれる合理的な理由が明らかになったと言えようか。

6　フーリエ級数からフーリエ変換へ

周期的でない関数は、周期が無限大であると思えば、そのフーリエ係数は、振動数 ξ の関数として、

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

なるものを考えることに相当する[*6]。これを関数 f の**フーリエ変換** (Fourier transform) と称する。「無限大の周期」に相当して、振動数はすべての実数値を取り得るようになる。もう少し詳しく述べると、いま十分大きな周期 $2L$ を考え、関数 $f(x)$ は、$[-L, L]$ 以外では 0 の値を取るものとする。(f の**支え** (support) が $[-L, L]$ に含まれる、といった言い方をする。) さて周期 2π の関数 F を

$$F(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right), \qquad -\pi \le x \le \pi$$

であるように定めて、そのフーリエ係数を求めると、

$$F_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\pi nx/L}\,dx$$

となる。

そこで、$L \to \infty$ での情報を得るために、F_n の代わりに $2LF_n$ を考え、係数を表すパラメータを n から $\xi = \pi n/L$ に変更すれば、上で与えた f のフーリエ変換の表示式にたどり着くことになる。

そして、$F(y) = \sum_n F_n e^{iny}$ を f と $\widehat{f}$ を使って書きなおした式

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{2L}\widehat{f}\left(\frac{\pi n}{L}\right)e^{ix\pi n/L}$$

において、形式的な極限 $L \to \infty$ を取ると、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi$$

という逆変換の関係式[*7]に移行する。

さらにまた、Parseval 等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2\,dx = 2\pi\sum_n |F_n|^2$$

[*5] 数学的には、複素数の偏角のことであるが、周期現象のある局面を表すという意味合いで、phase という用語がその訳語である「位相」とともによく使われる。数学用語である位相 (topology) とは別物であるので、注意する。

[*6] 定数因子の $1/2\pi$ は省いた。

[*7] フーリエ変換の定義で省いた $1/2\pi$ の因子がここで復活している。

を書きなおした

$$\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_n \frac{\pi}{L}|\widehat{f}(\pi n/L)|^2$$

において、極限 $L \to \infty$ を取ると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi$$

なる関係式にたどり着く。

以上の議論の厳密化はそれなりに手間がかかるので、ここでは結果を推測するための手段にとどめ、その証明には別の工夫を施すことにしよう。

フーリエ変換の定義に現れる広義積分の意味を確定させるために、関数空間を 2 つ導入する。$\mathbb{R}$ の上で定義され、複素数を値に取る可積分関数全体を $L^1(\mathbb{R})$ で表す。ただし、測度 0 の集合の上でのみ値が異なる 2 つの関数は区別しない。$f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、f の「大きさ」を表す量として

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$$

を導入すると、(i) $\|f\|_1 \geq 0$ で $\|f\|_1 = 0$ となるのは $f = 0$ に限り, (ii) $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$, (iii) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ を満たす。ベクトル空間上のこのような関数を**ノルム** (norm) という。ノルムが指定されたベクトル空間を**ノルム空間** (normed space) と呼ぶ。この意味で、$L^1(\mathbb{R})$ は、ノルム空間である。ノルムから距離が、したがって位相が定まる。

例 6.1. f, g が実数値関数の時は、$\|f-g\|_1$ は、f のグラフと g のグラフの間にある図形の面積である。したがって、$L^1(\mathbb{R})$ において f が g に近づくとは、この面積が 0 に近づくことである。

このことに注意して、有限区間の支持関数 $1_{[a,b]}$ が、$[a-\epsilon, b+\epsilon]$ で支えられた C^∞ 関数によって L^1 近似される様子を実感する。

問 35. 連続可積分関数 $f(x)$ で、極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} |f(x)|$ が存在しないものを具体的に与えよ。

さて、$f \in L^1(\mathbb{R})$ に対しては、

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\,dx$$

に現れる積分が絶対収束し、ξ の有界連続関数を定める。実際、有界性は積分の不等式 $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ であるし、連続性は、押え込み収束定理により、$\xi_n \to \xi$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi_n}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f(x)e^{-ix\xi_n}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

であることからわかる（関数の連続性の点列による特徴づけを使った）。

フーリエ変換の以上の性質をまとめるために、ノルム空間をもうひとつ導入する。$\mathbb{R}$ の上で定義された連続かつ有界な複素数値関数全体を $C_b(\mathbb{R})$ という記号で表すと、$C_b(\mathbb{R})$ は、新たなノルム

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}$$

によりノルム空間である。関数列 $\{f_n\} \subset C_b(\mathbb{R})$ が関数 $f \in C_b(\mathbb{R})$ にこのノルム位相の意味で収束する、すなわち、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ ということは、$f_n(x)$ が $f(x)$ に $x \in \mathbb{R}$ について一様に収束することに他ならない。

命題 6.2. フーリエ変換 $f \mapsto \widehat{f}$ は、$L^1(\mathbb{R})$ から $C_b(\mathbb{R})$ への線型写像を与え、$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ を満たす。

これまでの範囲で、フーリエ変換をいろいろ計算してみよう。

例 6.3. 衝撃信号を表す関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

($\lambda > 0$ は衝撃の鋭さを表すパラメータ) のフーリエ変換を求めて見ると、

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x - ix\xi} dx = \frac{1}{\lambda + i\xi}.$$

これは、解析関数ではあるものの、可積分でないため、逆変換の公式に現れる積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + i\xi} \, d\xi$$

も可積分にならず、その意味が問題となる。何らかの広義積分を考えるべきであろうか。これについて調べることは一端保留にして、内積に関する等式の方を調べてみると、

$$\int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda^2 + \xi^2} \, d\xi = \frac{\pi}{\lambda} = 2\pi \int_0^\infty e^{-2\lambda x} \, dx = 2\pi \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 \, dx$$

より、成り立っていることがわかる。

例 6.4. $f = 1_{[a,b]}$ のとき、

$$\widehat{f}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi} \, dx = \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_a^b = \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi} = O(1/|\xi|).$$

これも、$\widehat{f}$ が可積分でない例である。

問 36. 上の例の $\widehat{f}$ が可積分でないことを確かめよ。

例 6.5.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2 - ix\xi} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}.$$

この積分公式は、**ガウス積分** (Gaussian integral) として有名である。

この等式を確かめるには、左辺を $F(\xi)$ とおいて、微分方程式 $\frac{dF}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a} F$ を導く。あるいは、複素積分に書き直して Cauchy の積分定理を使ってもよい。いずれの場合も最後は $\xi = 0$ の場合に帰着させる。

さて、$f(x) = e^{-ax^2}$ とすれば、上の式は $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi/a} e^{-\xi^2/4a}$ を意味する。そこで、逆変換の式と内積を計算すれば、

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi = e^{-ax^2} = f(x), \quad \int |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \pi \sqrt{\frac{2\pi}{a}} = 2\pi \int |f(x)|^2 \, dx$$

となって、この場合も正しいことがわかる。

問 37. （広義）重積分の応用として、ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

を導け。さらに、左辺の積分において、$y = x + \xi$ という変数変換を行うことで得られる公式と上記例題の公式とを比較せよ。

問 38. 正定数 $a > 0$ に対して、$f(x) = (x \text{ の多項式})e^{-ax^2}$ は何度微分しても同じ形で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < +\infty.$$

命題 6.6 (平行移動と掛け算)**.**　移動について：$g(x) = f(x - a)$ とすると、

$$\widehat{g}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x - a)\, dx = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi)$$

$h(x) = e^{ix\eta} f(x)$ とすると、

$$\widehat{h}(\xi) = \int e^{-ix(\xi - \eta)} f(x)\, dx = \widehat{f}(\xi - \eta).$$

逆変換の公式が成り立つ関数が一つ見つかれば、それを平行移動したり、$e^{ix\eta}$ という関数を掛けたり、さらにはそれらの一次結合をとることで、逆変換が成り立つ関数を沢山作ることができる。

微分とフーリエ変換の関係の前に、連続とは限らない関数の不定積分について少々。関数 $F(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ が局所可積分 (locally integrable) であるとは、すべての有限区間 $[a, b]$ で、

$$\int_{[a,b]} |F(t)|\, dt < \infty$$

となること。

問 39. 二乗可積分関数は、局所可積分である。逆は成り立つか。

連続関数 $f(x)$ が、ある局所可積分関数 F と

$$f(x) = \int_{[a,x]} F(t)\, dt + f(a), \quad x \geq a$$

という関係で結ばれている場合を考えよう。右辺が $x \geq a$ の連続関数を与えることに注意。また、周期関数の場合と同様に、有限区間 $[a, b]$ を含む開区間で定義されたで C^1 関数 $g(t)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\int_a^b g'(x) f(x)\, dx &= \int_a^b g'(x) \left(\int_{[a,x]} F(y)\, dy + f(a) \right) dx \\
&= \int_{[a,b]} F(y) \left(\int_y^b g'(x)\, dx \right) dy \quad + f(a)(g(b) - g(a)) \\
&= -\int_{[a,b]} F(y) g(y)\, dy + g(b) \int_{[a,b]} F(y) + f(a)(g(b) - g(a)) \\
&= -\int_{[a,b]} F(y) g(y)\, dy + f(b) g(b) - f(a) g(a)
\end{aligned}$$

という等式（部分積分の関係式）が成り立つ。とくに、F は f で決まるので、$F = f'$ と書くことにする。また、f は F の不定積分であるという言い方をする。

問 40. * 関数 $F(x) = \frac{1}{x+i}$ が二乗可積分であることを確かめ、その不定積分を求めよ。

命題 6.7. すべての局所可積分関数は不定積分をもつ。与えられた局所可積分関数 F に対して、その不定積分として表わされる連続関数は、定数の差を除いて定まる。

また、$F \in L^1(\mathbb{R})$ であれば、その不定積分 f に対して、極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

が存在する。

Proof.

$$f(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} F(t)\,dt & \text{if } x \geq 0, \\ -\int_{[-x,0]} F(t)\,dt & \text{if } x \leq 0, \end{cases}$$

は、F の不定積分となる。

g を F の不定積分とすると、$a \leq b$ のとき、

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} F(t)\,dt = g(b) - g(a)$$

であるから、$f(x) - g(x)$ の値は一定である。 □

問 41. 局所可積分関数の不定積分 f が極限 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ をもつとき、$f' \in L^1(\mathbb{R})$ と言えるか。

命題 6.8. $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ であれば、それらのフーリエ変換の間に次の関係が成り立つ。

$$i\xi\widehat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Proof. $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ とする。このとき、f は連続で、極限 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ をもつから、f が可積分であるためには

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

でなければならない。部分積分の式

$$i\xi \int_a^b e^{-ix\xi} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} e^{-iy\xi} f'(y)\,dy + e^{-ia\xi} f(a) - e^{-ib\xi} f(b)$$

で、極限 $a \to -\infty, b \to \infty$ をとれば、

$$i\xi\widehat{f}(\xi) = i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} f'(y)\,dy = \widehat{f'}(\xi).$$

□

系 6.9. $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ であれば、$\widehat{f}$ は可積分である。

問 42. * $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ の証明を詳しく述べよ。

例 6.10. 区間 $[-a, a]$ で支えられた連続関数 f でそのグラフが、3 点 $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(a, 0)$ をこの順番で結んだ折れ線で与えられるものに対して、$\widehat{f}$ を直接計算するよりも、

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{b}{a}\int_{-a}^{0} e^{-ix\xi}\,dx - \frac{b}{a}\int_0^a e^{-ix\xi}\,dx = \frac{2b}{a}\frac{\cos(a\xi) - 1}{i\xi}$$

から、

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{f'}(\xi)}{i\xi} = \frac{2b}{a}\frac{(1-\cos(a\xi)}{\xi^2}$$

と計算する方が楽である。

問 43. 上で求めた $\widehat{f}(\xi)$ の $\xi = 0$ における連続性を確かめよ。

7 フーリエ逆変換

さて、逆変換の式に現れる積分も絶対収束可能な場合、すなわち $\|\widehat{f}\|_1 < \infty$ である場合[*8]を考える。逆変換の等式を認めるならば、関数 f は連続かつ有界でなければならないことに注意。

定理 7.1. 有界な連続関数 $f(x)$ が、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$

を満たし、さらに、そのフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ も

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|\, d\xi < \infty$$

であるならば、逆変換の式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

が成り立つ。

Proof. $\widehat{f}$ が連続かつ有界であることに注意し、右辺の積分の正則化 (regularization) として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\, d\xi = \lim_{a\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - a\xi^2}\widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

を採用すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2+ix\xi}\widehat{f}(\xi)\, d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-a\xi^2+i(x-y)\xi} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-(x-y)^2/4a}\, dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)e^{-y^2/4a}\, dy.\end{aligned}$$

あとは、次の補題を $h(y) = f(x+y)$ に対して適用すればよい。 □

補題 7.2. 有界かつ連続な関数 $h(y)$ に対して、

$$\lim_{a\to+0}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_{-\infty}^{\infty} h(y)e^{-y^2/4a}\, dy = 2\pi h(0).$$

[*8] 例えば、C^2 関数 f で、f, f', f'' が全て可積分であれば、この条件が満たされる (系 6.9)。そのような関数は沢山ある。

Proof. h を $h-h(0)$ で置き換えることで、$h(0)=0$ の場合を示せば十分。このとき、$h(y)$ の $y=0$ での連続性から、

$$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, |y|\le\delta \Longrightarrow |f(y)|\le\epsilon.$$

そこで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y)e^{-y^2/4a}\,dy = \int_{|y|\le\delta} h(y)e^{-y^2/4a}\,dy + \int_{|y|\ge\delta} h(y)e^{-y^2/4a}\,dy$$

と分けて、最初の項は、

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left|\int_{-\delta}^{\delta} h(y)e^{-y^2/4a}\,dy\right| \le \sqrt{\frac{\pi}{a}}\epsilon\int_{-\delta}^{\delta} e^{-y^2/4a}\,dy \le \sqrt{\frac{\pi}{a}}\epsilon\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4a}\,dy = 2\pi\epsilon$$

と評価し、２つ目の項は、

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left|\int_{|y|\ge\delta} h(y)e^{-y^2/4a}\,dy\right| \le \sqrt{\frac{\pi}{a}}\|h\|_\infty\int_{|y|\ge\delta} e^{-y^2/4a}\,dy = 4\sqrt{\pi}\|h\|_\infty\int_{\delta/2\sqrt{a}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

で、最後の積分は、

$$\int_{\delta/2\sqrt{a}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx - \int_0^{\delta/2\sqrt{a}} e^{-x^2}\,dx \longrightarrow 0 \quad (a\to+0)$$

より、$a\to+0$ のとき、0 に近づく。以上から、

$$\lim_{a\to+0}\sqrt{\frac{\pi}{a}}h(y)e^{-y^2/4a}=0$$

がわかる。 □

問 44. * 可積分関数 $\varphi(\xi)$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\,d\xi = \lim_{a\to+0}\int_{\mathbb{R}} e^{-a\xi^2}\varphi(\xi)\,d\xi$$

を示せ。

例 7.3. $a<b$ と $\lambda>0$ に対して、連続な可積分関数を

$$f_\lambda(x)=\begin{cases} e^{-\lambda(x-b)} & \text{if } x\ge b,\\ 1 & \text{if } a\le x\le b,\\ e^{\lambda(x-a)} & \text{if } x\le a\end{cases}$$

で定めると、

$$\widehat{f_\lambda}(\xi)=\frac{\lambda}{\xi^2-i\lambda\xi}e^{-ib\xi}+\frac{\lambda}{\xi^2+i\lambda\xi}e^{-ia\xi}=O(1/\xi^2)$$

も可積分である。

問 45. 上で求めた $\widehat{f}$ の表式の $\xi=0$ での連続性を確かめよ。

もう一つの重要な関数空間 $L^2(\mathbb{R})$ を導入しよう。これは、$\mathbb{R}$ 上の複素数値可測関数で、

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx<\infty$$

となるもの全体。周期関数のときに導入した内積空間と同様、$L^2(\mathbb{R})$ も内積

$$(f|g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x)\, dx$$

により内積空間である。他の様々なノルムと区別するときは、$\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$ という記号を用いる。

f が実数値関数のとき、

$$\pi(f|f) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx$$

は、f のグラフと x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を表す。したがって、$L^2(\mathbb{R})$ において f が 0 に近づくとは、この回転体の体積が 0 に近づくということである。

例 7.4. 幅が $2/n$ で高さが h_n の（したがって面積が h_n/n の）山形関数 $\lambda_n(x)$ を考えると、$\|\lambda_n\|_1 = h_n/n$ である一方で、

$$\pi(\lambda_n|\lambda_n) = \pi \frac{2h_n^2}{3n}$$

は、そろばん玉の体積を表し、したがって、

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n\|_1 = 0 \iff h_n = o(n), \quad \lim_{n\to\infty} \|\lambda_n\|_2 = 0 \iff h_n = o(n^{1/2}).$$

Remark 6. 変数が有限の範囲では L^2 の位相が L^1 の位相よりも強く、遠方で消える部分に関しては、L^1 の位相が L^2 のそれよりも支配的である。

問 46. $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ が、無限遠方で、$f(x) = O(1/x)$ のように振る舞えば、$f \in L^2(\mathbb{R})$ であり、$f(x) = O(1/x^2)$ のように振る舞えば、$f \in L^1(\mathbb{R})$ である。とくに、$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ は、沢山の連続関数を含む。

問 47. * $L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ に属する連続関数をそれぞれ具体的に作れ。ヒント：$L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$ の方は意外に面倒。

ここで、ノルム空間における近似可能性を表す用語を導入しておこう。

定義 7.5. ノルム空間 $(V, \|\ \|)$ の部分集合 $D \subset V$ は、そのノルム位相に関する閉包 $\overline{D}$ が V に一致するとき、**密** (dense) であるという。言いかえると、D が V で密であるとは、どのような $v \in V$ と $\epsilon > 0$ に対しても、$\|v - v'\| \leq \epsilon$ となる $v' \in D$ を見いだせること。

例 7.6.

(i) 有限区間の支持関数 $1_{[a,b]}$ の一次結合全体を $\mathcal{E}$ で表せば、$\mathcal{E} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ であり、$\mathcal{E}$ は $L^1(\mathbb{R})$、$L^2(\mathbb{R})$ いずれのノルム空間においても密になっている。

(ii) 同様に、有限区間で支えられた連続関数全体 $C_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ も、$L^1(\mathbb{R})$、$L^2(\mathbb{R})$ いずれのノルム空間においても密になっている。

8　フーリエ変換と内積

次に、Parseval 等式に由来するフーリエ変換の L^2 ノルムに関する等式について調べよう。逆変換の公式の際に仮定したように、f および $\widehat{f}$ が可積分であるとすると、くり返し積分の公式が使えて、

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int \overline{f(x)} \int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi dx = \frac{1}{2\pi} \int \int \overline{f(x) e^{-ix\xi}}\, dx \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi$$

のように成り立つ。途中の二重積分が絶対収束することから、必然的に $f \in L^2(\mathbb{R})$ であることに注意。ここでは、この仮定を弱めることを考える。

定義 8.1. 内積空間 V から内積空間 W への同型写像 $T : V \to W$ で内積を保つものを**ユニタリー写像** (unitary map) という。とくに、$V = W$ の場合には、**ユニタリー変換** (unitary transformation) あるいは**ユニタリー作用素** (unitary operator) ともいう。ユニタリー写像の逆写像もユニタリーで、2つのユニタリー写像から作られた合成写像もユニタリーである。

命題 8.2 (Polarization Identity)**.** 内積空間において、次の等式が成り立つ。

$$(v|w) = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - i\|v+iw\|^2 + i\|v-iw\|^2).$$

とくに、内積空間から内積空間への線型写像でノルムを保つものは、内積も保つ。

定理 8.3. 関数 $f(x)$ が、$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ に属するとき、すなわち、

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty, \qquad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

を満たすとき、そのフーリエ変換 $\widehat{f}$ は連続かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < +\infty$$

をみたす。さらに、対応 $f \mapsto \widehat{f}/\sqrt{2\pi}$ は、$L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ へのユニタリー変換に拡張され、逆変換の公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

が

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{ix\xi}\, dx \right) d\xi, \quad \forall g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

の意味で成り立つ。

Proof. 再び Gaussian regularization

$$\lim_{a \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - a\xi^2} \widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

の利用を想定して、

$$
\begin{aligned}
\int e^{-a\xi^2}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi &= \int dxd\xi\,\overline{f(x)}e^{ix\xi-a\xi^2}\widehat{f}(\xi)\\
&= \int dxdy\,\overline{f(x)}f(y)\int d\xi\,e^{-a\xi^2+i(x-y)\xi}\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\int dxdy\,\overline{f(x)}f(y)e^{-(x-y)^2/4a}\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\int dxdy\,\overline{f(x)}f(x-y)e^{-y^2/4a}\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_{\mathbb{R}} h(y)e^{-y^2/4a}\,dy.
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
h(y) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}f(x-y)\,dx
$$

は次の補題から連続かつ有界であるので、補題 7.2 が適用できて、

$$
\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \lim_{a\to+0}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_{-\infty}^{\infty}h(y)e^{-y^2/4a}\,dy = 2\pi h(0) = 2\pi\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx.
$$

とくに、$\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R})$ であり、上の等式を分極させることで、

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{g}(\xi)\,d\xi = 2\pi\int_{\mathbb{R}}\overline{f(x)}g(x)\,dx
$$

を得る。さらに、この等式を書き直すことで、逆変換の公式の弱い意味での成立がわかる。

フーリエ変換がユニタリー変換に拡張されることを見るには、もう少し準備が必要である。 □

補題 8.4. $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$
(f*g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)\,dx
$$

とおくと、$f*g$ は連続かつ有界であり、

$$
\|f*g\|_\infty \le \|f\|_2\,\|g\|_2.
$$

Proof. シュワルツの不等式を使って

$$
\int|f(x-y)g(y)|\,dy \le \left(\int|f(x-y)|^2\,dy\right)^{1/2}\left(\int|g(y)|\,dy\right)^{1/2} = \|f\|_2\,\|g\|_2
$$

である。$f*g$ が連続かつ有界であることは、有限区間で支えられた連続関数 $f_\epsilon, g_\epsilon\in C_c(\mathbb{R})$ を $\|f-f_\epsilon\|_2\le\epsilon$, $\|g-g_\epsilon\|_2\le\epsilon$ のように取って、

$$
\|f*g-f_\epsilon*g_\epsilon\|_\infty \le \|f-f_\epsilon\|_2\,\|g\|_2 + \|f_\epsilon\|_2\,\|g-g_\epsilon\|_2 \le \|g\|_2\epsilon + (\|f\|_2+\epsilon)\epsilon
$$

と評価してやる。一様連続性から $f_\epsilon*g_\epsilon\in C_c(\mathbb{R})$ がわかるので、それの一様極限として、$f*g$ も連続かつ有界[*9]である。 □

[*9] 実は、$\lim_{x\to\pm\infty}(f*g)(x)=0$ である。

問 48 (Riemann-Lebesgue)**.** $f \in L^1(\mathbb{R})$ のとき、$\lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ である。ヒント：$g, g' \in L^1(\mathbb{R})$ のとき、$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$ に注意して、f をそのような関数で L^1 近似する。

問 49. $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ であるとき、$f * g \in C_c(\mathbb{R})$ および $[f * g] \subset [f] + [g]$ を示せ。

問 50. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ のとき、$(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ は、$\mathbb{R}^2$ 上の可積分関数を定め、

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} f(t)g(s-t)\, dsdt.$$

とくに、ほとんど全ての $s \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)||g(s-t)|\, dt < \infty$$

であり、

$$(f * g)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(s-t)\, dt$$

は、可積分関数を定め、

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \int_{\mathbb{R}} g(y)\, dy$$

である。

問 51. 関数 f が実数値関数であるための必要十分条件は、

$$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi).$$

とくに、実数値関数 f に対して、$\widehat{f}$ は、$\widehat{f}(\xi)$ $(\xi \geq 0)$ で決まる。これをさらに情報を落として、$|\widehat{f}(\xi)|^2$ を $\xi > 0$ の関数として表示したものを工学方面では power spectrum という。

定義 8.5. ノルム空間 V は、ノルムに関して完備であるとき、すなわち、V におけるすべてのコーシー列が V の中で収束先をもつとき、**バナッハ空間** (Banach space) と呼ばれる。内積空間 V は、内積のノルム $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$ に関して完備であるとき、ヒルベルト空間と呼ばれるのであった。

命題 8.6. バナッハ空間 V の密部分空間 D からバナッハ空間 W への線型写像 $\Phi : D \to W$ でノルムを保つものがあるとする。このとき、Φ の V への拡張 $\widetilde{\Phi} : V \to W$ でノルムを保つものが丁度一つ存在する。

さらに、Φ の像 $E = \{\Phi(v); v \in D\}$ が W で密であるならば、$\widetilde{\Phi}$ は、バナッハ空間の同型を与える。

Proof. 仮に、そのような拡張 $\widetilde{\Phi}$ があったとすると、$v \in V$ に対して、v に収束する列 $v_n \in D$ を取ってくれば、

$$\|\widetilde{\Phi}(v) - \Phi(v_n)\| = \|\widetilde{\Phi}(v - v_n)\| = \|v - v_n\| \longrightarrow 0 (n \to \infty)$$

であるから、

$$\widetilde{\Phi}(v) = \lim_{n \to \infty} \Phi(v_n)$$

でなければならない。

そこで、上の式を $\widetilde{\Phi}$ の定義に採用しよう。右辺の極限が存在し、近似列の選び方に依らないことは、Φ がコーシー列をコーシー列に写すことからわかる。$\widetilde{\Phi} : V \to W$ がノルムを保つ線型写像であることもすぐわかる。例えば、

$$\|\widetilde{\Phi}(v)\| = \lim_n \|\Phi(v_n)\| = \lim_n \|v_n\| = \|v\|.$$

最後に、$\Phi : D \to E$ が等距離同型であることから、その逆写像 $\Psi : E \to D$ も等距離同型写像である。そこで、E が W で密であれば、その拡張 $\widetilde{\Psi} : W \to V$ が存在し、

$$\widetilde{\Psi}\widetilde{\Phi}(v) = v, \quad \widetilde{\Phi}\widetilde{\Psi}(w) = w, \quad v \in D, w \in E$$

であることから、これらは V, W における恒等写像に一致する。したがって、$\widetilde{\Phi}$ は同型写像である。 □

ということで、先の定理の証明を完成させるには、$L^2(\mathbb{R})$ が完備かどうか、フーリエ変換の像が $L^2(\mathbb{R})$ で密かどうかが問題となる。

定理 8.7 (Riesz-Fischer)**.** 測度空間 (X, μ) から作られた内積空間 $L^2(X, \mu)$ は完備である。さらに $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ $(f_n, f \in L^2(X, \mu))$ ならば、部分列 n' を取ることで、、

$$\lim_{n\to\infty} f_{n'}(x) = f(x) \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } x \in X$$

とできる。

Proof. $L^2(X, \mu)$ におけるコーシー列 $\{f_n\}$ が収束する部分列を持てばよい。部分列を十分まばらに取ることで[*10]、$\|f_{n+1} - f_n\|_2 \le 1/2^n$ としてよい。このとき、

$$\left(\int_X \left(\sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \right)^2 \mu(dx) \right)^{1/2} \le \sum_{k=1}^n \|f_{k+1} - f_k\|_2 \le 1$$

で $n \to \infty$ とすると、

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^\infty |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \right)^2 \mu(dx) \le 1$$

となり、とくに

$$\sum_{k=1}^\infty |f_{k+1}(x) - f_k(x)| < \infty \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } x.$$

そこで、

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^\infty (f_{k+1}(x) - f_k(x))$$

は、ほとんど全ての $x \in X$ で絶対収束し、

$$\sum_{k=1}^\infty (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \in L^2(X, \mu)$$

より、$f \in L^2(X, \mu)$ である。最後に、

$$|f(x) - f_n(x)| \le \sum_{k=n}^\infty |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

[*10] 部分列 $\{N_k\}_{k\ge1}$ を

$$m, n \ge N_k \Longrightarrow \|f_m - f_n\|_2 \le 1/2^k$$

であるように選ぶ。

を二乗積分して、ノルム不等式を使えば、

$$\|f - f_n\|_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

□

問 52. * $L^1(X, \mu)$ は、ノルム $\|\cdot\|_1$ に関して完備である。

補題 8.8. フーリエ変換による $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ の像 $E = \{\widehat{f}; f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\}$ は、$L^2(\mathbb{R})$ で密である。

Proof. 例 7.3 で計算した関数 f_λ のフーリエ変換の形から、$\widehat{f_\lambda} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ がわかるので、逆変換の公式（定理 7.1）

$$2\pi f_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{f_\lambda}(\xi)$$

より、$f_\lambda(-x)$ は E に属する。一方、$\lim_{\lambda \to \infty} f_\lambda = 1_{[a,b]}$ in $L^2(\mathbb{R})$ から $1_{[-b,-a]}$ は E の閉包 $\overline{E}$ に属すので、$\overline{E}$ は箱型関数の一次結合全体 $\mathcal{E}$ を含み、したがって $L^2(\mathbb{R})$ に一致する。 □

上の定理により、フーリエ変換 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ は、$L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ への同型写像に拡張される。その拡張した結果を L^2 フーリエ変換と呼び、同じ記号 $\widehat{f}$ で表そう。上で与えた証明の方法から、$f \in L^2(\mathbb{R})$ の L^2 フーリエ変換 $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ が、等式

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g}(\xi)} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} f(x)\, dx, \quad \forall g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

によって特徴づけられることがわかる。すなわち、$h \in L^2(\mathbb{R})$ で、

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g}(\xi)} h(\xi)\, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} f(x)\, dx, \quad \forall g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

となるものがあれば、$h = \widehat{f}$ である。

問 53. このことを確かめよ。

衝撃信号を表す関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

($\lambda > 0$ は衝撃の鋭さを表すパラメータ) を再度取り上げよう。そのフーリエ変換は

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x - ix\xi} dx = \frac{1}{\lambda + i\xi}$$

であった。したがって、逆変換の形式的な積分表示

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + i\xi}\, d\xi = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

は絶対収束しないのであるが、上の式は弱い意味で成立する。すなわち、$g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + i\xi} g(x)\, dx \right) d\xi = \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} g(x)\, dx.$$

L^2 フーリエ変換の一般論から、左辺の繰り返し積分は、g に依らない $h \in L^2(\mathbb{R})$ を使って、

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)g(x)\,dx$$

とかけるはずで、その $h(x)$ の具体的な形が右辺で与えた関数ということになる。

上では、逆変換の公式ということで、$h(x)$ は既に知っていたのであるが、もし、逆変換であることを使わずに h を求めようと思ったら次のようにするとよい。h の具体的な形を知りたいのであるから、g としては、それを探る probe であると考えて、ある点の付近に局在した関数を取って繰り返し積分の計算を実行する。具体的に $a > 0$ とし、$[a, \infty)$ で支えられた関数 g を考えると、左辺の繰り返し積分は、

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} d\xi \int_{x\geq a} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + i\xi} g(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{x\geq a} dx\, g(x) \int_{-r}^{r} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + i\xi}\,d\xi$$

である[*11]が、留数計算を使うと、

$$\int_{-r}^{r} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + i\xi}\,d\xi = 2\pi e^{-\lambda x} + \int_0^{\pi} d\theta \frac{r}{r - i\lambda e^{-i\theta}} e^{ixr\cos\theta - xr\sin\theta}$$

となる。そこで、$x \geq a$ のとき、

$$\int_0^{\pi} d\theta\, \frac{r}{|r - i\lambda e^{-i\theta}|} e^{-rx\sin\theta} \leq 2\int_0^{\pi/2} d\theta\, \frac{r}{r-\lambda} e^{-rx2\theta/\pi} = \frac{\pi}{(r-\lambda)x}(1 - e^{-rx}) \leq \frac{\pi}{(r-\lambda)x} \leq \frac{\pi}{a(r-\lambda)}$$

と評価してやると、

$$\lim_{r\to\infty} \int_{x\geq a} dx\, g(x) \int_{-r}^{r} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + i\xi}\,d\xi = 2\pi \int_{x\geq a} e^{-\lambda x} g(x)\,dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} g(x)\,dx$$

となって、求める表式 $e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ にたどり着く。

問 54. * 上で説明した逆変換の計算例について、$x < 0$ の場合を調べよ。

上の問題からもわかるように、フーリエ変換の計算においても複素積分の方法は、しばしば役に立つ。ここでは、衝撃信号の一般化として、次の関数について考えてみよう。

$$f(x) = \begin{cases} x^{\lambda} e^{-ax} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで、$a >$ であり、λ は複素数とし、

$$x^{\lambda} = e^{\lambda \log x}, \qquad x > 0.$$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} x^{\lambda} e^{-ax - ix\xi}\,dx$$

において、積分変数を x から $z = (a + i\xi)x$ に変えると、

$$\widehat{f}(\xi) = (a + i\xi)^{-\lambda - 1} \int_L z^{\lambda} e^{-z}\,dz$$

[*11] 二重積分として可積分であることに注意して、くり返し積分の公式 (Fubini の定理) を使う。

となる。ここで、L は原点から $a+i\xi$ 方向に延びる半直線を表す。このとき、この半直線と正実直線と十分大きな円で囲まれた扇形閉曲線に積分定理を適用すれば、右半平面で、関数 e^{-z} が急減少していることに注意して、この複素積分を正実積分で置き換えると、

$$\widehat{f}(\xi)=(a+i\xi)^{-\lambda-1}\int_0^{+\infty}x^{\lambda}e^{-x}\,dx=(a+i\xi)^{-\lambda-1}\Gamma(\lambda+1)$$

と計算される。したがって、逆変換により、

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a+i\xi)^{-\lambda-1}e^{ix\xi}\,d\xi=\begin{cases}2\pi x^{\lambda}e^{-ax}/\Gamma(\lambda+1) & \text{if } x>0,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

であることがわかる。

問 55. 以上の細部について研究してみよ。

上の定理で述べた弱い意味での逆変換の公式というのは、フーリエ変換版 Parseval の等式を言い換えただけなので、個々の点で成立するかどうかについては明確ではない。これについては、フーリエ級数のところで紹介した Dirichlet の定理のフーリエ変換版を述べるに留めよう。詳しくは、fourier2002 参照。

定理 8.9 (Dirichlet)**.** 関数 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ の穏やかな不連続点 $x=a$ において、逆変換の公式が

$$\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\widehat{f}(\xi)e^{ia\xi}\,d\xi$$

という形で成り立つ。

9 フーリエ変換と超関数

逆変換の公式にフーリエ変換の定義式を代入した等式

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}dy\,g(y)e^{i(x-y)\xi}$$

で、x と ξ の積分の順序を形式的に入れ替えると、

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\delta(x-y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}g(x-y)\delta(y)\,dy,$$

なる関係式を得る。ここで、

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}\,d\xi$$

と形式的に置いた。上の式は、$f(y)=g(-y)$ と置くと、

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\delta(y)\,dy=f(0)$$

を意味することになる。

このような関数 $\delta(y)$ は、非常に奇妙なものである。というのは、$f(y)$ として $y=a\neq 0$ の付近で支えられたものを取ると、

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon}f(y)\delta(y)\,dy=f(0)=0$$

となることから、$\delta(a)=0$ $(a\neq 0)$ でないといけないが、一方で、$f(y)=1$ $(|y|\leq\epsilon)$ ととると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\delta(y)\,dy=f(0)=1$$

であることから、$\delta(y)$ は 1 に相当する面積が $y=0$ の一点に集中していないといけない。

このように、数学の常識では理解し難いものではあるが、一方で、物理学に目を転じると、質点とか点電荷というものが $\delta(x)$ の実体に相当し、見かけほど奇異なものではないことがわかる。

そこで、こういったデルタ関数の数学的意味であるが、通常の関数の「極限」として解釈するのが、素朴ではあるが有用である。具体的には、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\xi^2+ix\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-x^2/4a}$$

で $a\to +0$ とする。あるいは、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}d\xi e^{ix\xi}=\frac{\sin(ax)}{\pi x}$$

で $a\to+\infty$ とすると wild な近似デルタ関数の例となる。

いずれにしても、$\delta(x)$ は、近似デルタ関数 $\varphi_a(x)$ の極限

$$\delta(x)=\lim_{a\to 0}\varphi_a(x)$$

として解釈される。ここで、近似デルタ関数 $\{\varphi_a\}$ の満たすべき要件としては、

(i) $\varphi_a(x)$ は通常の（それも何回でも微分できる）関数であり、

(ii) 有界な支えをもつ滑らかな関数 $f(x)$ に対して、

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi_a(x)\,dx=f(0)$$

が成り立つことである。

デルタ関数を、近似デルタ関数（列）の極限として解釈することは実用的ではあるが、理論的取扱いという観点からは難点がある。数学的に厳密な解釈（の一つ）は、次のようなものである。

超関数としての解釈

まず、通常の関数でもそうであるが、関数の個々の点での値を直接決定するのは、それほど現実的ではない。大事な情報は、関数 φ の個々の値 $\varphi(x)$ よりも、適当ななめらかさをもつ関数 f （測定装置のセンサーの感度分布を表現していることもあり、試験関数と呼ばれる）に対して、積分値

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx$$

がどのような値を取るかである。その意味で、関数 φ を

$$f\mapsto\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(y)dx$$

なる線型汎関数 (linear functional) と見なそうというアイデアが浮かぶ。

すなわち、デルタ関数 δ とは、

$$f\mapsto f(0)$$

なる線型汎関数を象徴的に積分表示したものと捉える。そのような立場に立てば、近似デルタ関数 φ_a の定める（積分による）線型汎関数を同一の記号で表して、極限によるデルタ関数の解釈 $\delta = \lim\limits_{a\to+0} \varphi_a$ を

$$\lim_{a\to+0} \int \varphi_a(x) f(x)\, dx = f(0)$$

なる線型汎関数の極限式として正当化することができる。ただし、数学的な厳密化のためには、汎関数の解析学が必要となり結構な準備を要する。

汎関数という解釈からは、線型性を始めとしたした通常の関数に対する多くの代数的操作が超関数に対しても適用可能であることがわかる。例えば、超関数 φ と通常の関数 g の積は、

$$(g\varphi)(f) = \int g(x)\varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(gf)$$

で定めればよく、超関数 $\varphi(x)$ の平行移動 $\psi(x) = \varphi(x-a)$ は、

$$\psi(f) = \int \varphi(x-a) f(x)\, dx = \int \varphi(x) f(x+a)\, dx = \varphi(f_a), \quad f_a(x) = f(x+a)$$

とおけばよい。

以上の定義が意味を持つためには、汎関数の定義域である関数空間が、それぞれ関数の積あるいは平行移動の操作に関して閉じている必要があることに注意する。

次に、通常関数に対する上の記号に合わせて、$\psi = \varphi_{-a}$ と書くと、φ の微分 φ' は、

$$\varphi'(f) = \lim_{a\to 0} \frac{\varphi_a(f) - \varphi(f)}{a} = \lim_{a\to 0} \varphi\left(\frac{f_{-a} - f}{a}\right) = \varphi\left(\lim_{a\to 0} \frac{f_{-a} - f}{a}\right) = -\varphi(f')$$

とするのが合理的である。ただし、汎関数 φ の「連続性」を使い、試験関数 f が導関数 f' をもつことを仮定した。

以上のことから、超関数といえども大事なのは通常の関数に対する演算であり、通常関数の極限操作に関する位相の性質である、ということが読み取れよう。試験関数の空間の選び方が重要ということでもある。よく使われる試験関数の空間として

$$\mathcal{D} = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}); f \text{ は有界区間以外では } 0 \text{ の値をとる } \}$$

と

$$\mathcal{S} = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}); \forall m, n \geq 0, x^m f^{(n)}(x) \text{ は有界 } \}$$

の２つを挙げておこう。前者は、局在化に適しているのに対して、後者はフーリエ変換の操作が可能という特徴をもつ。$\mathcal{D}$ 上の線型汎関数 φ で次の条件をみたすものを超関数 (distribution) と呼び、その全体を $\mathcal{D}'$ という記号で表す。

$$\forall a < b, \exists C > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{D}, \quad [f] \subset [a,b] \Longrightarrow |\varphi(f)| \leq C \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty$$

また、$\mathcal{S}$ 上の線型汎関数で次の条件をみたすものを緩超関数 (tempered distribution) と呼び、その全体を $\mathcal{S}'$ で表す。[*12]

$$\exists C > 0, \exists m, n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{S}, \quad |\varphi(f)| \leq C \sum_{k\leq m, l\leq n} \max\{|x^k f^{(l)}(x)|; x \in \mathbb{R}\}.$$

[*12] ベクトル空間の双対空間を prime 記号で表すのが、解析方面の約束事であるが、導関数の記号とも紛らわしく、良い習慣とは言いがたい。代数方面の慣例である star 記号を使えば、ヒルベルト空間の自己双対性などとも整合性が取れるのであるが、ここでは大勢にしたがっておく。

緩超関数は、$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ に制限することで、$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ と見なすことができ、超関数としては、$\mathcal{D}$ 上の線型汎関数の方が広いクラスを定める。

Remark 7. 埋め込み $\mathcal{D} \to \mathcal{S}$ が連続になるような自然な位相が $\mathcal{D}$ と $\mathcal{S}$ に定義でき、$\mathcal{D}'$ および $\mathcal{S}'$ は、その位相に関する連続線型汎関数全体に一致するのであるが、[Reed-Simon] の 5 章を引用するに留める。

さて、通常の関数を超関数として見る方法であるが、さすがに勝手な関数というわけにいかない。ただ、大抵の関数は、超関数と見ることができる。例えば、局所可積分関数 φ であれば、それを

$$T_\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx, \quad f \in \mathcal{D}$$

という線型汎関数 $T_\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ と見なすことができる。

補題 9.1. 局所可積分関数 φ, ψ に対して、$T_\varphi = T_\psi$ であるための必要十分条件は、$\varphi(x) = \psi(x)$ for a.e. $x \in R$ となることである。

Proof. 対応 $\varphi \mapsto T_\varphi$ の線型性により $\psi = 0$ としてよい。十分性は積分の性質であるから、必要性を導く。$a > 0$ と $b > 0$ に対して、

$$h = \begin{cases} \varphi(x) & \text{if } |x| \leq a \text{ and } |\varphi(x)| \leq b, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とカットしたものを、$[f] \subset [-a, a]$ かつ $\|f\|_\infty \leq b$ であるような $f \in \mathcal{D}$ で近似し、押さえ込み収束定理を適用すれば、$T_\varphi(\overline{f}) = 0$ から

$$\int_{[-a,a] \cap [|\varphi| \leq b]} |\varphi(x)|^2\, dx = 0$$

を得るので $a, b \to \infty$ とすればよい。 □

この結果により、φ は T_φ としばしば同一視される。

例 9.2. ステップ関数または Heaviside function h を

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定め、$f \in \mathcal{D}$ に対して、

$$-\int h(x) f'(x)\, dx = -\int_0^\infty f'(x)\, dx = f(0)$$

と計算すると、$h' = \delta$ がわかる。

問 56. 例 4.1 のあとの注意で述べたことを確認。

問 57. * C^∞ 関数 $h(x)$ で、$h(x) = 0$ $(x \leq 0)$ かつ $h(x) = 1$ $(x \geq 1)$ であるものを用意する。(i) $C_c^\infty(\mathbb{R}) = \mathbb{C}h' + (C_c^\infty(\mathbb{R}))'$ を示せ。(ii) $\varphi' = 0$ となる超関数 $\varphi : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ は、定数関数 $\varphi(h')$ に一致する。すなわち、

$$\varphi(f) = \varphi(h') \int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

超関数の微分は、形式的には部分積分の公式で無限遠点での値が消える場合に相当する。

定義 9.3. 局所可積分関数 f が緩やかである (tempered) とは、

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^n}\, dx < \infty$$

となる自然数 n が存在すること。

例 9.4. 可積分関数、二乗可積分関数、有界可測関数は、すべて緩やかである。

命題 9.5. 緩やかな関数 f に対して、fg $(g \in \mathcal{S})$ は可積分であり、汎関数

$$\mathcal{S} \ni g \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\, dx$$

は、緩やかな超関数 T_f を与える。

Remark 8. 上の逆は成り立たない。緩やかでない局所可積分関数 f の与える超関数 $T_f \in \mathcal{D}'$ で $\mathcal{S}'$ に入るものは沢山ある。例えば、微分可能関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して、$e^{if(x)}$ は緩やかであり、したがって緩やかな超関数 T_f を与えるのであるが、部分積分から $T'_{e^{if}} = iT_{f'e^{if}}$ が成り立つので、 $T_{f'e^{if}} \in \mathcal{S}'$ である。導関数 f' の増大度はいくらでも大きくできるので、$f'e^{if}$ は緩やかとは限らない。

Remark 9. 偶関数 $h \in \mathcal{D}$ で $0 \leq h \leq 1$, $h(x) = 1$ for $|x| \leq 1$ となるものを用意して、$h_n \in \mathcal{D}$ $(n = 1, 2, \dots)$ を

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq n, \\ h(|x-n+1|) & \text{otherwise} \end{cases}$$

のように定めると、$\mathcal{S}$ の位相に関して、$h_n g \to g$ $(g \in \mathcal{S})$ が成り立つ。そこで、緩超関数の列完備性を使えば、次の特徴づけを得る。

局所可積分関数 f に対して、$T_f \in \mathcal{D}'$ が緩超関数であるあるための必要十分条件は、

$$\forall g \in \mathcal{S}, \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)h_n(x)\, dx$$

が存在すること。

さて、緩超関数 $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ のフーリエ変換 $\widehat{T} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ を、

$$(\widehat{T})(f) = T(\widehat{f}), \quad f \in \mathcal{S}$$

によって定める。

問 58. 試験関数空間 $\mathcal{S}$ は、フーリエ変換の操作に関して閉じていることを示せ。

命題 9.6. (i) $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、$\widehat{T_f}$ は、$T_{\widehat{f}}$ に一致する。
(ii) $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、f の L^2 フーリエ変換を $\widehat{f}$ で表せば、$\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$ である。

例 9.7. 定数関数 1 のフーリエ変換は $2\pi\delta(x)$ に一致する。

命題 9.8. 緩超関数 $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ に対して、

$$\widehat{\widehat{T}} = 2\pi\widetilde{T}.$$

ここで、$\widetilde{T}$ は、

$$\widetilde{T}(g) = \int_{\mathbb{R}} T(x)g(-x)\, dx$$

で与えられる緩超関数である。

ちょっとした応用として、可積分関数 f のフーリエ変換が可積分である $(f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}))$ という条件から、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}$$

を導いてみよう。$2\pi g = \widehat{\widehat{f}} \in C_b(\mathbb{R})$ とおくと、

$$2\pi T_g = \widehat{T_{\widehat{f}}} = \widehat{\widehat{T_f}} = 2\pi \widetilde{T_f} = 2\pi T_{\widetilde{f}}.$$

これから、$f(x) = g(-x)$ for a.e. $x \in \mathbb{R}$ がわかる。

問 59. $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ならば、$f \in L^2(\mathbb{R})$ である。

10 フーリエ変換で解く微分方程式

波動方程式 (wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を初期条件

$$u(0,x) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$$

の下で解いてみよう。

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t,\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

と表せば、初期条件より、

$$v(0,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx,$$
$$\dot{v}(0,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi}dx,$$

波動方程式に代入すれば、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,\xi) = -\xi^2 v(t,\xi)$$

となって、これを初期条件に注意して解けば、

$$v(t,\xi) = \frac{i\xi\widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)}{2i\xi}e^{it\xi} + \frac{i\xi\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)}{2i\xi}e^{-it\xi}$$

$$u(t,x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy.$$

最後の式で、g の原始関数を h で表せば、

$$u(t,x) = \frac{f(x+t) + h(x+t)}{2} + \frac{f(x-t) - h(x-t)}{2}$$

となって、d'Alembert の一般解 $F(x+t) + G(x-t)$ が出現する。

問 60. 新たな変数 $y = x + t$, $z = x - t$ を使って波動方程式を書き表したものを解くことで、d'Alembert の一般解を導け。

熱方程式 (heat equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (D > 0)$$

を初期条件

$$\lim_{t \to +0} u(t,x) = f(x)$$

の下で解いてみよう。

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}G(t,\xi)d\xi$$

と表せば、初期条件より、

$$G(0,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy.$$

また、上の $u(t,x)$ の表式を熱方程式に代入すると、

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,\xi) = -D\xi^2 G(t,\xi)$$

となるので、これを解くと、

$$G(t,\xi) = e^{-D\xi^2 t}G(0,\xi) = e^{-D\xi^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy.$$

従って、

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-Dt\xi^2 + i(x-y)\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)}f(y)\,dy \end{aligned}$$

と求まる。

とくに、$f(x) = \delta(x)$ の場合（原点 $x = 0$ を瞬間的に強く熱した場合）は、

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-x^2/(4Dt)}$$

となる。

問 61. 時間の経過とともに、上の特殊解がどのように変化（拡散）していくか、グラフにプロットせよ。

問 62. * 中心が a で幅が $\sigma > 0$ のガウス分布

$$f(x) = e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

を初期条件とする解 $u(t,x)$ を具体的に求め、熱が広がっていく際の速さについて調べよ。

半平面での Dirichlet 問題。

半平面 $y > 0$ における**ラプラス方程式** (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を境界条件

$$\lim_{y\to+0} u(x,y) = f(x), \qquad \lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0$$

の下で解いてみよう。

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,y)e^{ix\xi}d\xi$$

を代入すると、

$$(i\xi)^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

となるので、

$$F(\xi,y) = A(\xi)e^{\xi y} + B(\xi)e^{-\xi y}$$

と解くことができる。ここでさらに境界条件を考慮に入れると、

$$F(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)e^{-y|\xi|}$$

を得るので、

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\iint dtd\xi\, f(t)e^{-y|\xi|}e^{i(x-t)\xi} \\ &= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt \end{aligned}$$

と求められる。

問 63. $f(x)$ が定数関数であるときに、$u(x,y)$ を具体的に求めよ。

11 線型汎関数と直交分解

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V を考える。V 上の関数 $\varphi : V \to \mathbb{C}$ で、

$$\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w), \quad \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v), \quad v, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$$

となるものを**線型汎関数**[*13] (linear functional) という。

例 11.1.

(i) $V = \mathbb{C}^n$ （縦ベクトルの空間）のときは、線型汎関数 $\varphi : V \to \mathbb{C}$ は、

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j v_j$$

の形。ただし、$\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{C}$.

(ii) V が内積空間のとき、$v \in V$ に対して、線型汎関数 v^* を

$$v^*(v') = (v|v'), \quad v' \in V$$

で定めることができる。

[*13] 線型形式 (linear form) ともいう。

ノルム空間 V 上の線型汎関数 $\varphi : V \to \mathbb{C}$ が**連続** (continuous) であるとは、

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(v_n) = \varphi(v)$$

が成り立つこと。ノルム空間 V 上の連続な汎関数全体を V^* で表すと、V^* は、演算

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v)$$

によりベクトル空間になる。これを V の**双対空間** (dual space) と呼ぶ。

問 64. $\mathbb{R}$ 上の連続関数で有界集合によって支えられたもの全体を $C_c(\mathbb{R})$ で表し、ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ の部分空間として内積空間とみなす。このとき、線型汎関数 $C_c(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{C}$ が連続かどうか調べよ。

定義 11.2. ノルム空間 V 上の線型汎関数 φ が**有界** (bounded) [*14]であるとは、

$$\{|\varphi(v)|; v \in V, \|v\| \leq 1\}$$

が有界集合であること、すなわち、ある正数 $M > 0$ があって

$$\|v\| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(v)| \leq M$$

となること。

命題 11.3. ノルム空間 V の線型汎関数 φ に対して、次は全て同値である。

(i) φ が連続である。
(ii) φ が単位球の上で有界である。
(iii) $\varphi^{-1}(0) = \{v \in V; \varphi(v) = 0\}$ が閉集合である。

Proof. (ii) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (iii) は、すぐ分かる。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): $p(v) = \inf\{\|v + x\|; x \in \varphi^{-1}(0)\}$ とおくと、

$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v), \quad p(v) \leq \|v\|, \quad p(v + x) = p(v), \quad \lambda \in \mathbb{C}, v \in V, x \in \varphi^{-1}(0)$$

である。さらに、$\varphi^{-1}(0)$ が閉集合であることから、$p(v) = 0 \iff v \in \varphi^{-1}(0)$ となる。

そこで、$w \in V$ を $\varphi(w) = 1$ と取ると、

$$V = \varphi^{-1}(0) + \mathbb{C}w$$

であるから、$v = x + \lambda w$ と表して $p(w) > 0$ に注意すれば、

$$|\varphi(v)| = |\lambda| = \frac{|\lambda| p(w)}{p(w)} = \frac{p(\lambda w)}{p(w)} = \frac{p(v)}{p(w)} \leq \frac{1}{p(w)} \|v\|.$$

□

有界な線型汎関数 φ に対して、

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(v)|; v \in V, \|v\| \leq 1\}$$

とおく。記号が示唆するように、$\|\varphi\|$ は、双対空間 V^* のノルムになる。

[*14] 正しくは、単位球上有界というべきところを、単に有界というのが関数解析分野での慣習である。

補題 11.4.

$$\|\varphi\| = \inf\{M > 0; |\varphi(v)| \leq M\|v\| \text{ for any } v \in V\}.$$

問 65. これを確かめよ。

命題 11.5. 双対空間 V^* は、ノルム $\|\varphi\|$ によりバナッハ空間になる。

Proof. $\|\varphi\|$ がノルムであることは、上の補題からすぐわかる。これが完備であることも、よくある完備性の証明のパターンで処理できる。

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\varphi_m - \varphi_n\| = 0$$

とすると、かってな $v \in V$ に対して、$\{\varphi_n(v)\}_{n\geq 1}$ が (複素) コーシー列になり、複素数の完備性から、

$$\varphi(v) = \lim_n \varphi_n(v)$$

が存在する。極限をとるまえの関数 φ_n が線型であることから、極限関数 φ も線型。

φ の有界性は、$\forall\epsilon > 0$, 十分大きい $m, n \geq N$ に対しては、

$$\|\varphi_m(v) - \varphi_n(v)\| \leq \|\varphi_m - \varphi_n\|\|v\| \leq \epsilon\|v\|$$

がかってな v について成り立つので、$m \to \infty$ とすれば、

$$\|\varphi(v) - \varphi_n(v)\| \leq \epsilon\|v\|$$

なる不等式を得る。。これは線型汎関数 $\varphi - \varphi_n$ が有界で、

$$\forall n \geq N, \|\varphi - \varphi_n\| \leq \epsilon$$

を意味するから、$\varphi = (\varphi - \varphi_n) + \varphi_n$ も有界で、さらに

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$$

となる。 □

問 66. * 証明の細部を確かめよ。

例 11.6. 内積空間 V 上の線型汎関数 w^* $(w \in V)$ について、$\|w^*\| = \|w\|$.

実際、シュワルツの不等式から、

$$|(w|v)| \leq \|w\|\,\|v\| = \|w\| \quad \text{if } \|v\| \leq 1,$$

すなわち $\|w^*\| \leq \|w\|$ である。$w = 0$ のときは自明であるから、$w \neq 0$ と仮定して、単位ベクトル $v = w/\|w\|$ を考えると、

$$|w^*(v)| = |(w|v)| = \|w\|$$

より $\|w^*\| \geq \|w\|$ となる。以上を合わせると、求める等式が得られる。

問 67. * 有界連続関数 $h \in C_b(\mathbb{R})$ を使って、$L^1(\mathbb{R})$ 上の線型汎関数 φ を

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} h(x)f(x)\,dx \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

で定めるとき、$\|\varphi\|$ を求めよ。

つぎは、Riesz の補題あるいは表現定理[*15]と呼ばれるものである。

定理 11.7 (F. Riesz)**.** ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の連続な線型汎関数 $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は、あるベクトル $w \in \mathcal{H}$ を使って $\varphi(v) = (w|v)$, $v \in \mathcal{H}$ と書ける（以前の記号で書くと、$\varphi = w^*$）。さらに、φ を与える w は一つしかなく、$\|\varphi\| = \|w\|$ をみたす。

Proof. $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{e_i\}_{i\in I}$ を用意し、$\varphi_j = \varphi(e_j)$ とおく。このとき、有限集合 $F \subset I$ と複素数列 $\{z_j\}_{j\in F}$ に対して成り立つ不等式

$$\left|\sum_{j\in F} \varphi_j z_j\right| = |\varphi(\sum_{j\in F} z_j e_j)| \leq \|\varphi\| \left\|\sum_{j\in F} z_j e_j\right\| = \|\varphi\| \sqrt{\sum_{j\in F} |z_j|^2}$$

において、$z_j = \overline{\varphi_j}$ と取れば、$\sum_{j\in F} |\varphi_j|^2 \leq \|\varphi\|^2$, すなわち

$$\sum_{j\in I} |\varphi_j|^2 \leq \|\varphi\|^2$$

がわかる。そこで、ベクトル $w \in \mathcal{H}$ を総和により、

$$w = \sum_{j\in I} \overline{\varphi_j} e_j$$

で定めると、

$$\varphi(e_j) = \varphi_j = (w|e_j) = w^*(e_j), \quad \forall j \in I.$$

線型汎関数 φ, w^* はともに連続であり、密部分空間 $\sum_{j\in I} \mathbb{C}e_j$ の上で一位するので、$\varphi = w^*$ である。

唯一性は、$w' \in \mathcal{H}$ も w と同じ性質をもつとすると、$(w - w'|v) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$ で $v = w - w'$ とおけば $w - w' = 0$ がわかる。 □

系 11.8. 内積空間 V の完全正規直交系 $\{e_j\}_{j\in I}$ に対して、$V^* \cong \ell^2(I)$ である。

この定理の意味は、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対しては、その双対空間を $\mathcal{H}^*$ とすると、

$$\mathcal{H} \ni v \mapsto v^* \in \mathcal{H}^*$$

なる全単射で、(i) 共役線型であり、(ii) ノルムを保存するものがあるということ。従って、内積

$$(v^*|w^*) = (w|v), \quad v, w \in \mathcal{H}$$

により、 $\mathcal{H}^*$ もヒルベルト空間になる。

さらに、$\mathcal{H}^{**}$ を考えると、

$$v \mapsto v^* \mapsto v^{**}$$

なる対応が考えられる。その具体的な定義は、

$$v^{**}(w^*) = (v^*|w^*) = (w|v) = w^*(v)$$

[*15] Riesz の名を冠して呼ばれる測度に対する表現定理との混同を避ける意味でも、証明が簡単明瞭という点でも、Riesz' lemma と呼びたいところである。

で与えられる。対応 $v \mapsto v^{**}$ は線型同型かつ内積を保つので、v と v^{**} を同一視することにより、通常、$\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$ とみなす。

有限次元の数ベクトル空間においては、V を縦ベクトル空間とすると、V^* は横ベクトル空間となり、V^{**} は再び縦ベクトル空間に戻る。これが上で述べた $\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$ に相当する。

問 68. 完備とは限らない内積空間 V に対しても、その双対空間 V^* のノルムが内積を使って表わされることを確かめよ。

例 11.9. リースの表現定理を利用して、$f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ であるとき、$f * g \in L^2(\mathbb{R})$ であり、不等式

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \, \|g\|_1$$

が成り立つことを示そう。実際、$h \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
\int |f * g(x) h(x)| \, dx &\leq \iint |f(x-y) g(y) h(x)| \, dx dy \\
&\leq \int dy |g(y)| \left(\int |f(x-y)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int |h(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&= \|f\|_2 \, \|h\|_2 \, \|g\|_1
\end{aligned}$$

であるから、$f * g \in L^2(\mathbb{R})$ および $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \, \|g\|_1$ がわかる。

リースの定理の応用としては、von Neumann による Radon-Nikodym 定理の elegant な証明というのも有名であるが、それについては hilbert2012 などを参照してもらうことにして、ここでは省略する。

命題 11.10. 2 つのノルム空間の間の線型写像 $T : V \to W$ に対して、次の条件は同値である。

(i) T はノルム位相に関して連続である。
(ii) T は、単位球 $\{v \in V; \|v\| = 1\}$ の上で有界である。
(iii) T は、ある開球 $\{v \in V; \|v - v_0\| < r\}$ の上で有界である。

この同値な条件をみたす線型写像全体は、$\|T\| = \sup\{\|T(v)\|; v \in V, \|v\| = 1\}$ をノルムとするバナッハ空間を成す。

問 69. 線型汎関数の場合の議論を参考に、上の命題の証明を与えよ。

定義 11.11. 2 つのヒルベルト空間の間の線型写像 $T : V \to W$ に対して、線型写像 $S : W \to V$ で、$(w|Tv) = (Sw|v)$ $(\forall v \in V, \forall w \in W)$ となるものを、T の**エルミート共役** (hermitian conjugate) といい、$S = T^*$ という記号で表す。

問 70. エルミート共役は、存在すれば一つしかない。

定理 11.12. ヒルベルト空間からヒルベルト空間への線型写像 $T : V \to W$ に対して、次の条件は同値である。

(i) T はエルミート共役をもつ。
(ii) T はノルム連続である。

Proof. 最初に、(ii) $\Longrightarrow$ (i) を Riesz lemma の応用として示そう。不等式 $|(w|Tv)| \leq \|w\| \|Tv\| \leq \|w\| \|T\| \|v\|$ に注意すれば、与えられた $w \in W$ に対して、線型汎関数 $v \mapsto (w|Tv)$ は、連続であることがわかる。したがって、Riesz lemma により、$v' \in V$ で、$(w|Tv) = (v'|v)$ $(v \in V)$ となるものが丁度一つ存在する。v' は、w で決まるので、$v' = S(w)$ と書けば、表現ベクトルの唯一性と、$(w|Tv)$ の両線型性により、対応 $w \mapsto S(w)$ は、線型であることがわかる。

次に (i) $\Longrightarrow$ (ii) であるが、これは少し面倒である。(i) を仮定すると、

$$\|Tv\| = \sup\{|(w'|Tv)|; w' \in W, \|w'\| = 1\} = \sup\{|(Sw'|v)|; w' \in W, \|w'\| = 1\}$$

は、連続関数 $v \mapsto |(Sw'|v)|$ の上限関数として、v について下半連続であることに注意する。すなわち、

$$\forall v \in V, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|v' - v\| \leq \delta \Longrightarrow \|Tv'\| \geq \|Tv\| - \epsilon.$$

さて、T がノルム連続でない、すなわち、全ての開球の上で $\|T(\cdot)\|$ が有界でないと仮定して矛盾を導こう。Bolzano の絞り出し論法による。状況を見やすくするために、開球と閉球の記号

$$B_r(v) = \{v' \in V; \|v' - v\| < r\}, \quad \overline{B}_r(v) = \{v' \in V; \|v' - v\| \leq r\}$$

を使う。最初に、$v_1 \in B_1(0)$ を $\|Tv_1\| > 1$ であるように選ぶ。$\|T(\cdot)\|$ の下半連続性により、$0 < r_1 \leq 1/2$ を $\overline{B}_{r_1}(v_1) \subset B_1(0)$ かつ

$$\|v - v_1\| \leq r_1 \Longrightarrow \|Tv\| \geq 1$$

であるように選ぶことができる。次に、$v_2 \in B_{r_1}(v_1)$ を、$\|Tv_2\| > 2$ であるように取り、$0 < r_2 \leq 1/2^2$ を $\overline{B}_{r_2}(v_2) \subset B_{r_1}(v_1)$ かつ

$$\|v - v_2\| \leq r_2 \Longrightarrow \|Tv\| \geq 2$$

であるように選ぶ。以下、帰納的に球の減少列 $\overline{B}_{r_n}(v_n) \subset B_{r_{n-1}}(v_{n-1})$ を、$r_n \leq 1/2^n$ かつ

$$\|v - v_n\| \leq r_n \Longrightarrow \|Tv\| \geq n$$

であるように取ってくる。このとき、作り方から、$\{v_n\}_{n \geq 1}$ はコーシー列であり、V の完備性により、$v_\infty = \lim_n v_n$ が存在する。一方、$\{v_n\}_{n \geq m} \subset \overline{B}_{r_m}(v_m)$ の極限として、$v_\infty \in \overline{B}_{r_m}(v_m)$ であるから、$\|Tv_\infty\| \geq m$ がすべての $m \geq 1$ で成り立つことになり、$\|Tv_\infty\| < \infty$ に逆らう。 □

問 71. * フーリエ変換のエルミート共役をフーリエ逆変換を用いて表せ。

定理 11.13 (直交分解定理)**.** ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 E に対して、任意の元 $v \in \mathcal{H}$ は、

$$v = w + w', \quad w \in E,\ w' \in E^\perp$$

と一意的に分解される。

Proof. 一意性は、$E \cap E^\perp = \{0\}$ からわかる。

E の正規直交基底 $\{e_j\}$ を用意すると、$v \in \mathcal{H}$ に対して

$$w = \sum_{j \in I} (e_j|v)e_j$$

は E における総和収束の意味で存在する。そして、

$$(v - w|e_k) = (v|e_k) - \sum_j (v|e_j)(e_j|e_k) = 0, \quad \forall k \in I$$

であるから、 $v - w \in E^\perp$ がわかる。 □

系 11.14. ヒルベルト空間の線型部分空間 E に対して、

$$(E^{\perp})^{\perp} = \overline{E}.$$

Proof. $E^{\perp} = (\overline{E})^{\perp}$ に注意して、分解 $\mathcal{H} = \overline{E} + E^{\perp}$ を使う。 □

Dirichlet 問題の L^2 解の存在。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の有界開集合 Ω に対して、Ω の上で定義された C^∞ 関数でその支えが有界閉集合であるもの全体を $C_c^\infty(\Omega)$ という記号で表す。$\Delta C_c^\infty(\Omega)$ の $L^2(\Omega)$ における閉包を K で表せば、ラプラス方程式 $\Delta u = 0$ の L^2 解は、$K^\perp$ で与えられる。定数関数を含むことから、$K^\perp \neq \{0\}$ である。境界 $\partial\Omega$ の上で予め与えられた連続関数 $f(x)$ に「一致する」L^2 解を得ようと思えば、次のようにする。まず、f を Ω 上の連続関数 F に拡張しておく。そうして、F の直交分解 $K^\perp + K$ に関する $K^\perp$ 成分を u で表せば、u はラプラス方程式の L^2 解であるのみならず、K の元は、Ω の境界値での値に寄与しないと考えられるので、u が求めるものであると期待される。このことは、実際に正しく、弱い解が本来の意味での解であることを示すことができる。

付録A　関数列の収束と連続性

関数列の収束には各種様々なものがあって、本文で扱うものとして、各点収束、一様収束、L^1 収束、L^2 収束。各点収束の一種に、ルベーグ積分論で重宝する「ほとんどいたるところ収束」がある。関数解析とは、こういった諸々の位相を使い分けることで、関数の集団の性質を調べるところにその特徴の一つがある。押え込み収束定理は、この各点収束ないし「ほとんどいたるところ収束」に関するものである。本文で必要となる関連事項をまとめておくと、

(i) 有限区間の支持関数の一次結合全体を $\mathcal{E}$ で表せば、$\mathcal{E}$ は、$L^1(\mathbb{R})$ でも $L^2(\mathbb{R})$ でも密である (hilbert2012 Appendix B)。ここで、関数の定義域 X の部分集合 A の支持関数 (indicator function) 1_A とは、$1_A(x) = 1\ (x \in A)$, $1_A(x) = 0\ (x \notin A)$ で与えられるものをいう。

(ii) 有界集合によって支えられた C^n 級関数全体を $C_c^n(\mathbb{R})$ で表せば、$L^1(\mathbb{R}) = \overline{C_c^n(\mathbb{R})}^{L^1}$, $L^2(\mathbb{R}) = \overline{C_c^n(\mathbb{R})}^{L^2}$ であることが、有限区間の支持関数が $C_c^n(\mathbb{R})$ に含まれる関数で近似できることからわかる。

(iii) ルベーグ積分論では、零集合の上でのみ値が異なる 2 つの関数は区別しない。（測度論的同一視。）

(iv) 押え込み収束定理：測度空間 (X, μ) 上の可測関数列 $f_n(x)$ が、可積分関数 $g(x)$ によって、$|f_n(x)| \leq g(x)$ $(x \in X, n \geq 1)$ のように押さえられている状況で、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \mu\text{-a.e.}x \in X$$

であれば、

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx) = \int_X f(x)\,\mu(dx).$$

ついでに、Fubini の定理（くり返し積分の公式）についても思い出しておこう。

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dxdy < \infty$$

であれば、

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dy \right) dx$$

および
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx$$
が成り立つ。

付録B　フーリエ変換の諸公式と双対性

移動と掛け算作用素、合成積。実数値関数のフーリエ変換。双対性。関数の滑らかさ vs. 無限遠での振る舞い。

関数 $f(x)$ にその平行移動 $f(x-a)$ を対応させる操作を記号 T_a で表し、**移動作用素** (translation) と呼ぶ。

移動作用素は、等距離かつ移動パラメータに関して連続である。
$$\lim_{y\to a} \|T_y f - T_a f\| = 0.$$

関数 $f(x)$, $g(x)$ の**たたみ込み** (convolution) は、
$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$
で定義される。たたみ込みを積の演算を思うと、交換法則と結合法則が成り立つ。
$$f*g = g*f, \qquad (f*g)*h = f*(g*h).$$

関数 $f(x)$ のスケール変換を $f(rx)$ $(0 \neq r \in \mathbb{R})$ で定める。

$f(x)$	$\widehat{f}(\xi)$
$rf(rx)$	$\widehat{f}(\xi/r)$
$f(x+a)$	$e^{ia\xi}\widehat{f}(\xi)$
$f^{(n)}(x)$	$(i\xi)^n\widehat{f}(\xi)$
$e^{-i\alpha x}f(x)$	$\widehat{f}(\xi+\alpha)$
$2\pi f(x)g(x)$	$\widehat{f}*\widehat{g}$
$f*g$	$\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

平行移動の公式で、parameter a についての微分を計算すると、微分の公式が得られる。逆に、微分を使って、形式的な Taylor 展開を実行すれば、平行移動の関係式が復元する。

フーリエ変換によって上記のような代数関係の双対性が成り立つ。

問 72. たたみ込みの公式と上の対応表の関係をすべて確かめよ。

問 73. 支持関数 $1_{[-a/2,a/2]}$ $(a>0)$ のそれ自身とのたたみ込みは $0 \vee (a-|x|)$ である。

次に関数の解析的な性質についての双対性を調べよう。

補題 B.1 (Riemann-Lebesgue)**.** 関数 $f(x)$ が $\int |f(x)|dx < +\infty$ を満たせば、そのフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ は、ξ の連続関数で、
$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Proof. 関数 f に対して、2 回連続微分可能で支えが有界である関数 g で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx$$

が小さいものを用意して、

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)|$$

と評価すれば、部分積分から分かるように $\widehat{g}(\xi) \to 0$ $(\xi \to \infty)$ であるので、まず、f を g で近似して第一項を好きなだけ小さくし、次に $|\xi|$ を大きくして、第二項も小さくできる。 □

命題 B.2.

(i) 関数 $f(x)$ が、m 回微分可能で、

$$\lim_{x \to \pm\infty} f^{(l)}(x) = 0 (0 \leq l \leq m-1), \quad \int |f^{(m)}(x)| dx < +\infty$$

であれば、$\widehat{f}(\xi)$ は連続であり、

$$\widehat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{|\xi|^m}\right)$$

となる。すなわち、

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \xi^m \widehat{f}(\xi) = 0$$

である。

(ii) また、$\widehat{f}(\xi)$ が連続でかつ $\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^{m+2})$ を満たせば、f は m 回微分可能で、$f^{(m)}$ は連続かつ

$$\lim_{x \to \pm\infty} f^{(l)}(x) = 0 (0 \leq l \leq m),$$

である。

Proof. (i) 各 $f^{(l)}$ が無限遠点で消えることに注意して、部分積分を繰り返すと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x) e^{-ix\xi} dx = (i\xi)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

が得られるので、右辺が $(i\xi)^m \widehat{f}(\xi)$ に一致し、左辺は上の補題から無限遠で消える。

(ii) $\widehat{f}$ が連続で $\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^2)$ であるから、可積分であり、したがって、Riemann-Lebesgue により、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

は連続かつ無限遠で消える。さらに、$\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^3)$ に注意すれば、f は微分可能で、

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi) \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

がなりたち、$i\xi\widehat{f}(\xi)$ に Riemann-Lebesgue を使えば、$f'(x)$ が連続かつ無限遠で消えることがわかる。

以下、これを繰り返せばよい。 □

付録C　Plancherel formula

フーリエ変換 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ は、$L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ への同型写像に連続に拡張されるのであった。そこで重要な役割を演じるのが内積についての等式

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g}(\xi)} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} f(x)\, dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

であった。これを Plancherel の公式という。ここでは、この等式を利用してフーリエ変換およびその逆変換を積分で表す方法について調べよう。

命題 C.1. $f \in L^2(\mathbb{R})$ が $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ を満たせば、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

が零集合以外の $x \in \mathbb{R}$ について成り立つ。

Proof. Plancherel formula で、$g \in L^1 \cap L^2$ とすると、g, $\widehat{f}$ が可積分であることに注意して、

$$\text{l.h.s.} = \int_{\mathbb{R}} d\xi\, \widehat{f}(\xi) \overline{\int_{\mathbb{R}} dx\, g(x) e^{-ix\xi}} = \int_{\mathbb{R}} dx\, \overline{g(x)} \int_{\mathbb{R}} d\xi\, e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi)$$

を右辺と比べると、

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, \overline{g(x)} \left(2\pi f(x) - \int_{\mathbb{R}} d\xi\, e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \right) = 0$$

がすべての $g \in L^1 \cap L^2$ に対して成り立つ。 □

次に、与えられた $f \in L^2(\mathbb{R})$ と $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ を積分で結びつける公式を導こう。そのために、上で示した逆変換の公式を

$$\widehat{g_t} = \begin{cases} 1_{[0,t]} & \text{if } t \geq 0, \\ -1_{[t,0]} & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

$(t \in \mathbb{R})$ に対して適用すれば、

$$g_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{e^{itx} - 1}{2\pi i x} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R}).$$

これらを Plancherel formula に代入すれば、

$$\int_0^t \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx} - 1}{-ix} f(x)\, dx$$

となるので、$\widehat{f}$ の不定積分が、

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx} - 1}{-ix} f(x)\, dx$$

で与えられることがわかる。このことを微分の記号を流用して表せば、

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi} - 1}{-ix} f(x)\, dx$$

という印象的な形になる。

問 74. $\|g_t - g_s\|_2^2 = 2\pi |t - s|$ でる。

付録D　正則関数の正値性と積分表示

R.L. Schilling, R. Song and Z. Vondracek, Bernstein Functions, De Gruyter 2012).

B. Simon, Loewner's Theorem on Monotone Matrix Functions, Springer (2019).

以下は、§3, §5 の続きである。ポアソン核を $z = re^{i\theta}$ の関数とみると、

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-r^2}{|1-z|^2}$$

という表示を得る。そこで、境界値が実数値関数 $f(e^{it})$ で与えられるラプラス方程式の解は、$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 上の正則関数

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(e^{it})\,dt$$

の実部として実現されることがわかる。そのような正則関数は、定数関数 $i\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ の違いを除いて一意的であり、上で与えられた正則関数については $\varphi(0) \in \mathbb{R}$ であることから、正則関数 $\psi(z)$ で閉円板 $\overline{D}$ にまで連続に拡張できるものは

$$\psi(z) = i\mathrm{Im}(\psi(0)) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(e^{it})\,dt, \quad f(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} \mathrm{Re}(\psi(re^{i\theta}))$$

を満たすことがわかる。

以上を背景として、次が成り立つ。

定理 D.1 (Herglotz-Pick-Nevanlinna)**.** D における正則関数 $\varphi(z)$ が $\mathrm{Re}(\varphi(z)) \geq 0$ $(z \in D)$ という条件を満たすための必要十分条件は、$\partial D = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ 上の有限正測度 μ が存在して、

$$\varphi(z) = i\mathrm{Im}(\varphi(0)) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mu(dt)$$

と書けること。

Proof. 十分性は、

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-r^2}{|1-e^{-it}z|^2} = P_r(\theta - t) \geq 0$$

からわかる。

必要性は、$|z| < \rho < 1$ に対して成り立つ表示

$$\varphi(z) = \varphi(\rho(z/\rho)) = i\mathrm{Im}(\varphi(0)) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}\mathrm{Re}(\varphi(\rho e^{it}))\,dt$$

をにらんで、測度 $\mu_\rho(dt)$ を

$$\mu_\rho(dt) = \mathrm{Re}(\varphi(\rho e^{it}))\,dt$$

で定め、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu_\rho(dt) = \mathrm{Re}(\varphi(0))$$

に注意して、$\rho \to 1$ のときの測度の弱極限（汎関数極限）を考えると、1 に近づく増加列 (ρ_n) で、

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_{\rho_n}$$

が存在するようなものが取れる[*16]。そこで、t について一様に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n e^{it}+z}{\rho_n e^{it}-z}=\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$$

であることと合わせて、主張を得る。 $\square$

Remark 10. $\mathrm{Re}(\varphi(z))=0$ となる $z\in D$ があれば、最大値原理により $\mathrm{Re}(\varphi)$ が定数関数となり、したがって φ も定数関数である。この（φ が境界に値を取る）特殊な場合は、$\mu\equiv 0$ に対応し、$\mathrm{Re}(\varphi)\equiv 0$ でなければ、定理の仮定から、$\mathrm{Re}(\varphi(z))>0$ ($|z|<1$) が成り立つ。

また、極限 $r\to 1-0$ で、ポアッソン核 $P_r(\theta-t)$ が周期的デルタ関数に移行するので、測度 μ は調和関数 $\mathrm{Re}(\varphi)$ だけで決まる。とくに φ の積分表示を与える μ は一つしかない。

正則な変数変換

$$D\ni z\mapsto w=i\frac{1+z}{1-z},\quad z=\frac{w-i}{w+i}$$

により D は、上半平面 $\{w\in\mathbb{C};\mathrm{Im}(w)>0\}$ に写される。そこで、$\psi(w)=i\varphi(z)$ とおけば、ψ は、上半平面をそれ自身（の閉包）に写す正則関数となる。この新たな変数で積分表示を書きなおしてみよう。

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}=\frac{1}{i}\frac{w\cot(t/2)-1}{w+\cot(t/2)}$$

となるので、

$$s=-\cot\frac{t}{2},\quad 0<t<2\pi$$

という積分変数の取り替えにより、$\mathbb{R}$ 上の有限測度 λ を $\mu(dt)/2\pi=\lambda(ds)$ で定めると、

$$\begin{aligned}\psi(w)&=-\mathrm{Im}(\varphi(0))+\frac{i}{2\pi}\int_{(0,2\pi)}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mu(dt)+\frac{i}{2\pi}\frac{1+z}{1-z}\mu(\{0\})\\&=\mathrm{Re}(\psi(i))+\frac{\mu(\{0\})}{2\pi}w+\int_{\mathbb{R}}\frac{1+sw}{s-w}\,\lambda(ds)\\&=\alpha+\beta w+\int_{\mathbb{R}}\frac{1+sw}{s-w}\,\lambda(ds)\end{aligned}$$

という積分表示を得る。ここで、$\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\geq 0$ である。右辺の積分表示は、$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ の正則関数 $\psi(z)$ で、$\overline{\psi(z)}=\psi(\overline{z})$ となるものを定めることに注意。

Remark 11. 無限点 ∞ に重み β の点測度を与えることで、項 βw を積分表示に組み入れることができる。

上の積分表示を $w=u+iv$ ($u\in\mathbb{R}$, $v>0$) により、実部と虚部にわけて書き直すと、

$$\psi(u+iv)=\alpha+\beta u+\int_{\mathbb{R}}\frac{(s-u)(1+su)-sv^2}{(s-u)^2+v^2}\,\lambda(ds)+iv\left(\beta+\int_{\mathbb{R}}\frac{s^2+1}{(s-u)^2+v^2}\,\lambda(ds)\right).$$

これから、$\alpha=\mathrm{Re}\,\psi(i)$ であり、単調収束定理と合わせることで $\beta=\lim_{v\to+0}\mathrm{Im}\,\psi(u+iv)/v$ ($u\in\mathbb{R}$) がわかる。さらに、$v/(s^2+v^2)$ ($v\to+0$) が近似デルタ関数の π 倍であることから、

$$\lim_{v\to+0}\mathrm{Im}\,\psi(s+iv)ds=\pi(s^2+1)\lambda(ds)$$

が $\mathbb{R}$ 上のラドン測度（$C_c(\mathbb{R})$ 上の汎関数）として成り立つ。

[*16] 詳しくは、hilbert2012 系 10.4 を見よ。

この復元公式の簡単な応用として、λ の支え $[\lambda] \subset \mathbb{R}$ が ψ から直接読み取れる。すならち、実数 x が $x \notin [\lambda]$ であることと、$\psi(z)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ が $z = x$ の近くで解析的であることが同値である。

このことを踏まえ、$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上の正則関数 φ に対して、$\psi(z)$ が $z = x$ の近くて解析的でない $x \in \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ 全体を φ の支え (singularity support) と呼び $[\varphi]$ で表わす。支え $[\varphi]$ は $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ の閉集合であり、φ は $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\varphi]$ 上の正則関数に拡張される。

さて、$u \in \mathbb{R} \setminus [\lambda]$ とすると、$\psi(w)$ は $w = u$ の近くで解析的で、

$$\psi'(w) = \beta + \int \frac{1+s^2}{(s-w)^2}\, \lambda(ds)$$

という表示を得る。とくに、$\psi'(u) > 0$ となるので、$\mathbb{R} \setminus [\lambda]$ の上で ψ は強く単調増加である。

これは実関数として単調であるだけでなく、エルミート作用素の関数算においても作用素不等式を保つという性質を持っていて、作用素単調関数と称される。この意味の単調性は、実一次分数変換で保たれるので、単調関数を考える開区間を移しかえることで、$(0, \infty)$ すなわち、$[\lambda] \subset (-\infty, 0]$ としておいてよい。このとき、

$$\psi(u) = \alpha + \beta u + \int_{(-\infty,0]} \frac{1+su}{s-u}\, \lambda(ds) \quad (u > 0)$$

という表示の下、極限 $u \downarrow 0$ を取ると、

$$\psi(+0) = \alpha + \int_{(-\infty,0]} \frac{1}{s}\, \lambda(ds) \in [-\infty, \infty)$$

となるので、$\psi(+0) \in \mathbb{R}$ である必要十分条件は、$\lambda(\{0\}) = 0$ かつ

$$\int_{(-\infty,0)} \frac{1}{s}\, \lambda(ds) > -\infty$$

が成り立つこと。そして $\varphi(+0) > -\infty$ であれば、

$$\psi(w) - \psi(+0) = \beta w + \int_{(-\infty,0)} \frac{w}{s-w} \frac{1+s^2}{s}\, \lambda(ds) = \beta w + \int_{(0,\infty)} \frac{w}{r+w} \frac{1+r^2}{r}\, \lambda(-dr).$$

ここで、$(0, \infty)$ で支えられた測度 $\lambda(-dr)$ は、$r \to +\infty$ のところで有限とは限らないが、

$$\int_{(0,\infty)} \frac{1+r^2}{r(1+r)}\, \lambda(-dr) < \infty$$

である。

例 D.2. 半直線 $(-\infty, 0]$ で支えられた $\psi(w) = \log w = \log \rho + i\theta$ $(w = \rho e^{i\theta},\ \rho > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$ について、$\mathrm{Im}\psi(w) = \theta$ は有界であり、

$$\lim_{y \to +0} \mathrm{Im}\psi(u + iv) = \begin{cases} \pi & (u < 0) \\ \pi/2 & (u = 0) \\ 0 & (u > 0) \end{cases}$$

となることから、$\psi(+0) = 0 = \beta$ および $\lambda(ds) = ds/(1+s^2)$ $(s < 0)$ がわかり、次の積分表示を得る。

$$\log w = \int_0^\infty \frac{rw-1}{r+w} \frac{dr}{1+r^2} \quad (w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]).$$

例 D.3. 半直線 $(-\infty, 0]$ で支えられた $\psi(w) = w^\gamma = e^{\gamma \log w} = \rho^\gamma(\cos(\gamma\theta) + i\sin(\gamma\theta))$ $(0 < \gamma < 1)$ についても $\psi(+0) = 0 = \beta$ であり、$\mathrm{Im}\psi(u+iv)$ は $v \to +0$ のとき、$u \in \mathbb{R}$ の局所的に有界な関数で、

$$\lim_{v\to+0} \mathrm{Im}\psi(u+iv) = \begin{cases} |u|^\gamma \sin(\pi\gamma) & (u < 0) \\ 0 & (u \leq 0) \end{cases}$$

となることから、次の積分表示を得る。

$$w^\gamma = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_0^\infty \frac{w}{r+w} r^{\gamma-1}\, dr \quad (w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],\ 0 < \gamma < 1).$$

一般に、$\mathbb{R}$ 上の複素測度 ω から、

$$\Omega(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\, \omega(dt)$$

で定められる $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上の正則関数 Ω を ω の**スティルチェス変換** (Cauchy-Stieltjes transform) と呼ぶ。スチェルチェス変換は不等式

$$|\Omega(x+iy)| \leq \frac{|\omega|(\mathbb{R})}{|y|} \quad (x \in \mathbb{R},\ y \neq 0)$$

をみたし、各 $x \in \mathbb{R}$ について、極限式

$$\lim_{y\to 0} y\Omega(x+iy) = i\omega(\{x\}), \quad \lim_{y\to\pm\infty} y\Omega(x+iy) = i\int_{\mathbb{R}} \omega(dt).$$

が成り立つ。

例 D.4. 複素数の有限集合 $F \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ と関数 $\omega : F \to \mathbb{C}$ に対して、$t \in \mathbb{R}$ の関数 $\sum_{c\in F} \omega(c)/(t-c)$ がルベーグ可積分であるのは $\sum_{c\in F} \omega(c) = 0$ のときで、このとき、複素測度 $\omega(dt)$ を

$$\omega(dt) = \sum_{c\in F} \frac{\omega(c)}{t-c}\, dt$$

で定めると、そのスティルチェス変換は

$$\Omega(z) = \begin{cases} \sum_{c\in F_-} \frac{2\pi i\omega(c)}{z-c} & (\mathrm{Im}\, z > 0) \\ \sum_{c\in F_+} \frac{2\pi i\omega(c)}{c-z} & (\mathrm{Im} z < 0) \end{cases}$$

で与えられる。ただし、$F_\pm = \{c \in F; \pm\mathrm{Im}\, c > 0\}$ である。

定理 D.5 (復元公式)**.** 複素測度 ω は、スティルチェス変換 $\Omega(z)$ から次の等式で復元される。

$$2\pi i\omega(dx) = \lim_{y\to+0} \Big(\Omega(x+iy) - \Omega(x-iy)\Big)\, dx.$$

ただし右辺の極限は $C_0(\mathbb{R})$ 上のラドン測度としての汎関数収束を意味する。

Proof. $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f で $f(\pm\infty) = 0$ となるものに対して成り立つ

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\Big(\Omega(x+iy) - \Omega(x-iy)\Big)\, dx = 2iy \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x)}{(t-x)^2 + y^2}\, dx\, \omega(dt)$$

において、$y\int_{-\infty}^\infty f(x)/((t-x)^2+y^2)\, dx$ は t の関数として y について一様有界であり（近似デルタ関数と f とのたたみ込みの π 倍)、$y > 0$ が 0 に近づくとき、$\pi f(t)$ に各点収束することからわかる。 $\square$

系 D.6. 実数 x が ω の支えに入らないことと $\Omega(z)$ が $z=x$ の近くで正則になっている（正則に拡張できる）ことは同値。

Proof. もし $x \notin [\omega]$ であれば、$\Omega(z) = \displaystyle\int_{[\omega]} \frac{1}{t-z}\,\mu(dt)$ は、$z=x$ の近くで正則である。

逆に、$\Omega(z)$ が $z=x$ の近くで正則であれば、復元公式により、$\omega(dt)$ は $t=x$ の近くで 0 である。 □

例 D.7. 例 D.4 で扱った測度のスティルチェス変換 Ω について、

$$\lim_{y\to\pm 0} \Omega(x+iy) = \pm 2\pi i \sum_{c\in F_\pm} \frac{\omega(c)}{x-c}$$

であるから、

$$\lim_{y\to+0} (\Omega(x+iy) - \Omega(x-iy)) = 2\pi i \sum_{c\in F} \frac{\omega(c)}{x-c}$$

となる。

$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則関数 Ω が測度 ω のスティルチェス変換のとき、$[\Omega]$ は ω の支えに一致し、$[\omega]$ が有界であることと $\Omega(z)$ が $z=\infty$ で正則であることは同値である。実際、後者から前者が出ることは上の系からわかる。逆に、支え $[\omega]$ が有界であれば、十分大きい z について、

$$\Omega(z) = \int_{[\omega]} \frac{1}{t-z}\,\mu(dt) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int_{[\omega]} t^n\,\mu(dt)$$

は $1/z$ の収束べき級数で表わされる。

問 75. 実数 $a<b$ に対して、

$$\lim_{y\to+0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \Big(\Omega(x+iy) - \Omega(x-iy)\Big)\,dx = \omega((a,b)) + \frac{1}{2}\big(\omega(\{a\}) + \omega(\{b\})\big).$$

定理 D.8. $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則関数 Ω が、有限正測度 ω のスティルチェス変換であるための必要十分条件は、以下が成り立つこと。

(i) $\overline{\Omega(z)} = \Omega(\overline{z})$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$.
(ii) Ω は上半平面を上半平面に写す。
(iii) $\{y|\Omega(iy)|; y\geq 1\}$ は有界集合。

Proof. 必要性はすぐわかるので、十分性を示す。(ii) から

$$\Omega(z) = \alpha + \beta z + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\,\lambda(dt), \quad \mathrm{Im}(z)>0$$

という表示を得る。この形と (i) から、上の積分表示は $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ でも正しい。この積分表示を使って $y\Omega(iy)$ の実部と虚部を表すと、

$$\alpha y + y(1-y^2)\int \frac{t}{t^2+y^2}\,\lambda(dt), \quad \beta y^2 + y^2 \int \frac{t^2+1}{t^2+y^2}\,\lambda(dt)$$

となるので、$y\to\infty$ についての有界性が (iii) からわかる。とくに

$$\beta = 0, \quad \alpha = \lim_{y\to\infty} \int \frac{(y^2-1)t}{t^2+y^2}\,\lambda(dt).$$

次に、有界性

$$y^2 \int \frac{t^2+1}{t^2+y^2}\,\lambda(dt) \le M$$

から、$T>0$ について成り立つ不等式

$$y^2 \int_{[-T,T]} \frac{t^2+1}{t^2+y^2}\,\lambda(dt) \le M$$

において、極限 $y \to \infty$ を取れば、

$$\int_{[-T,T]} (t^2+1)\,\lambda(dt) \le M$$

がわかるので、$T \to \infty$ とすれば、

$$\int (t^2+1)\,\lambda(dt) \le M$$

となり、有限正測度 λ の 2 次のモーメントが有限である。したがって、

$$\int |t|\,\lambda(dt) < \infty$$

であり、押え込み収束定理により α を計算すると、

$$\alpha = \lim_{y\to\infty} \int \frac{(y^2-1)t}{t^2+y^2}\,\lambda(dt) = \int t\lambda(dt).$$

以上の結果を Ω の積分表示に代入すると、

$$\Omega(z) = \int_{\mathbb{R}} t\,\lambda(dt) + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\,\lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2+1}{t-z}\,\lambda(dt)$$

となるので、$\omega(dt) = (t^2+1)\lambda(dt)$ とおけばよい。 □

例 D.9. 実数列 $t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n+1}$ に対して、有理関数

$$\Omega(z) = \frac{(z-t_2)(z-t_4)\cdots(z-t_{2n})}{(z-t_1)(z-t_3)\cdots(z-t_{2n+1})}$$

は、上半平面を上半平面に写す。実際、$\Omega(z)$ の部分分数表示

$$\Omega(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{z-t_{2k+1}}$$

で、

$$\omega_k = \lim_{z\to t_{2k+1}} (z-t_{2k+1})\Omega(z) = \frac{(t_{2k+1}-t_2)\dots(t_{2k+1}-t_{2k})(t_{2k+1}-t_{2k+2})\dots(t_{2k+1}-t_{2n})}{(t_{2k+1}-t_1)\dots(t_{2k+1}-t_{2k-1})(t_{2k+1}-t_{2k+3})\dots(t_{2k+1}-t_{2n+1})} > 0$$

であるから、Ω は $\sum_k \omega_k \delta(t-t_{2k+1})$ の Cauchy-Stieltjes 変換である。

例 D.10. コーシー分布 $1/\pi(t^2+1)$ のスティルチェス変換を留数計算すると、

$$\Omega(z) = \begin{cases} -1/(z+i) & (y>0) \\ -1/(z-i) & (y<0) \end{cases}$$

であり、この場合は上下それぞれからの極限関数

$$\lim_{y\to+0} \Omega(x\pm iy)\,dx = -\frac{1}{x\pm i}$$

が存在し、コーシー分布の密度関数の $2\pi i$ 倍が、その差として、

$$\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} = \frac{2i}{x^2+1}$$

と表わされる。

Remark 12. 正測度については、有限でない場合でもその増大度が緩ければスティルチェス変換が意味をもつ。例えば、

$$\Omega(z) = \int_{-\infty}^{0} \frac{(-t)^{\gamma-1}}{t-z}\,dt = -\frac{\pi}{\sin(\pi\gamma)} z^{\gamma-1} \quad (0<\gamma<1).$$

この場合の測度 $\omega(dt) = |t|^{\gamma-1}\,dt$ $(t<0)$ そのものは、$t\to+\infty$ で発散する ($t\to+0$ では収束) ものの、スティルチェス変換自体は意味をもち、$y\to+\infty$ のとき $\Omega(iy) = O(1/y^{1-\gamma})$ のように振る舞う。もちろん、$y\Omega(iy)$ は発散する。

次に、複素測度 $\omega(dt)$ のスティルチェス変換 $\Omega(z)$ の実用的な特徴づけを与えよう。まず、

$$y\Omega(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y(t-x)+iy^2}{(t-x)^2+y^2}\,\omega(dt)$$

という表示で、

$$\frac{|y(t-x)|}{(t-x)^2+y^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{y^2}{(t-x)^2+y^2} \leq 1$$

に注意すれば、$y\Omega(x+iy)$ $(x\in\mathbb{R},\, 0\neq y\in\mathbb{R})$ は有界であり、押え込み収束定理により

$$\lim_{y\to0} y\Omega(x+iy) = i\omega(\{x\})$$

であり、

$$\lim_{y\to0} y(\Omega(x+iy)+\Omega(x-iy)) = 0$$

が成り立つ。

さらに、ω が有界閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ で支えられていれば、$\Omega(z)$ は $\overline{\mathbb{C}}\setminus[a,b]$ まで解析的に拡張され、$\Omega(\infty)=0$ である。

逆に、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則関数 $\Omega(z)$ が以下の条件をみたすとする。

(i) Ω は無限遠点 $\infty\in\overline{\mathbb{C}}$ の近傍にまで正則に拡張され、$\Omega(\infty)=0$ である。

(ii) 各 $x\in\mathbb{R}$ に対して、$\delta>0$ を適切に選べば、$\{y\Omega(t+iy); |t-x|\leq\delta, 0<|y|\leq\delta\}$ は有界となり、

$$\lim_{y\to0} y\big(\Omega(x+iy)+\Omega(x-iy)\big) = 0$$

である。

(iii) 極限

$$\lim_{y\to+0} \big(\Omega(x+iy)-\Omega(x-iy)\big)\,dx = 2\pi i\mu(dx)$$

が $C_c(\mathbb{R})$ 上の複素ラドン測度として存在する。

条件 (iii) における測度 μ は、条件 (i) により、それを支える $\mathbb{R}$ の有界開区間 (a,b) がある。

測度 μ のスティルチェス変換を G と結びつけるために、

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-w}\,\mu(dx) = \int_{(a,b)} \frac{1}{x-w}\,\mu(dx) = \lim_{y\to+0} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{x-w}\Big(\Omega(x+iy)-\Omega(x-iy)\Big)\,dx \quad (w \notin \mathbb{R})$$

と表したものを

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left(\frac{\Omega(x+iy)}{x+iy-w} - \frac{\Omega(x-iy)}{x-iy-w}\right) dx$$

と比較する。この 2 つの積分関数の差は

$$\frac{iy}{(x-w)^2+y^2}(\Omega(x+iy)+\Omega(x-iy) + \frac{y^2}{(x-w)((x-w)^2+y^2)}(\Omega(x+iy)-\Omega(x-iy)).$$

と書き表わされるので、 条件 (ii) と押え込み収束定理により、

$$\lim_{y\to 0} y\int_a^b \frac{\Omega(x+iy)+\Omega(x-iy)}{(x-w)^2+y^2}\,dx = 0 \quad (w \notin \mathbb{R}).$$

一方、$x \in \mathbb{R}$ の連続関数 $y^2/(x-w)((x-w)^2+y^2)$ は、$y \to 0$ のとき一様に 0 に近づくので、

$$\lim_{y\to 0}\int_a^b \frac{y^2}{(x-w)((x-w)^2+y^2)}(\Omega(x+iy)-\Omega(x-iy))\,dx = 2\pi i\int \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{(x-w)((x-w)^2+y^2)}\,\mu(dx) = 0.$$

以上のことから、

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-w}\,\mu(dx) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left(\frac{\Omega(x+iy)}{x+iy-w} - \frac{\Omega(x-iy)}{x-iy-w}\right) dx.$$

さらに、$\Omega(z)$ は $z = a,\,b$ の近傍で正則であるから、

$$\lim_{y\to+0}\int_0^y \frac{\Omega(a\pm it)}{a\pm it-w}\,dt = 0, \quad \lim_{y\to+0}\int_0^y \frac{\Omega(b\pm it)}{b\pm it-w}\,dt = 0$$

となり、これを右辺の積分に加減することで、

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-w}\,\mu(dx) = -\lim_{y\to+0}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial R}\frac{\Omega(z)}{z-w}\,dz$$

を得る。ここで、$R = [a,b]+i[-y,y]$ は閉区間 $[a,b]$ を長経とする長方形で、∂R はその反時計回りの境界を表わす。Ω が $\mathbb{C}\setminus[a+\epsilon, b-\epsilon]$ で正則であることから、右辺の周回積分は $w \notin R$ である限り $y > 0$ のとり方によらない。そこで、 $\Omega(\infty) = 0$ より従う

$$\lim_{r\to\infty}\oint_{|z|=r}\frac{\Omega(z)}{z-w}\,dz = 0$$

に注意して、留数計算を行えば、

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-w}\,\mu(dx) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_R \frac{\Omega(z)}{z-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_w \frac{\Omega(z)}{z-w}\,dz = \Omega(w).$$

ただし、右辺の周回積分は $z = w$ の周りの小さい円について反時計回りで行い、最後に積分公式を使った。

以上をまとめて、次を得る。

定理 D.11. 支えがコンパクトである $\mathbb{R}$ 上の複素測度のスティルチェス変換 Ω は、次で特徴づけられる。

(i) Ω は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則関数で、$\infty\in\overline{\mathbb{C}}$ の近傍にまで正則に拡張され、$\Omega(\infty)=0$ をみたす。

(ii) 各 $x\in\mathbb{R}$ に対して、$\delta>0$ を適切に選べば、$\{y\Omega(t+iy); |t-x|\leq\delta, 0<|y|\leq\delta\}$ は有界となり、

$$\lim_{y\to 0}\Big(\Omega(x+iy)+\Omega(x-iy)\Big)=0.$$

(iii) 極限 $\lim_{y\to+0}\Big(\Omega(x+iy)-\Omega(x-iy)\Big)dx$ が $C_0(\mathbb{R})$ 上の複素ラドン測度として存在する。

例 D.12. $\Omega(z)=-1/z$ のとき、$|y\Omega(x+iy)|\leq 1$ $(x\in\mathbb{R}, 0\neq y\in\mathbb{R})$ であり、

$$\lim_{y\to 0}y\Omega(x+iy)=\lim_{y\to 0}\frac{-xy+iy^2}{x^2+y^2}=\begin{cases} i & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases}.$$

支えに制限を設けない複素測度のスティルチェス変換の特徴づけがあるかどうかは定かでない。上で与えた特徴づけと同じく有界集合で支えられた場合ではあるが、超関数的な記述について補足しておこう。ということで、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則関数 $\Omega(z)$ で $z=\infty\in\overline{\mathbb{C}}$ でも正則なものに対して、復元公式が $\mathbb{R}$ 上の複素測度 μ を定めものとする。測度 μ は、Ω の特異点集合 $[\Omega]$ で支えられることに注意。

例 D.13. $\Omega(z)=-1/z$ のとき、$C_c^1(\mathbb{R})$ 上の線型汎関数として

$$\lim_{y\to\pm 0}\Omega(x+iy)=-\frac{1}{x\pm i0}=\pm i\pi\delta(x)-\frac{1}{x}$$

が成り立つ。ここで、右辺の $1/x$ は主値の意味である。具体的には、

$$\int\frac{f(x)}{x}\,dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty\big(f(t)-f(-t)\big)\frac{t}{t^2+\epsilon^2}\,dt$$

となるので、$f\in C_c^1(\mathbb{R})$ については極限が存在するものの、$\lim_{y\to\pm 0}\Omega(x+iy)\,dx$ はラドン測度として収束しない。たとえば、$f\in C_c(\mathbb{R})$ として、$f(\pm t)=\frac{\mp 1}{\log t}$ $(0<t\leq e)$ となるものを取れば、

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_0^e(f(t)-f(-t))\frac{t}{t^2+\epsilon^2}\,dt=2\int_0^e\frac{1}{t|\log t|}\,dt=\infty$$

である。 一方で、

$$\lim_{y\to+0}\big(\Omega(x+iy)-\Omega(x-iy)\big)dx=2\pi i\delta(x)dx$$

は測度収束となっている。

上の等式を z あるいは x で微分し、超関数の収束定理を使えば、

$$\frac{1}{(x\pm i0)^2}=\pm i\pi\delta'(x)+\frac{1}{x^2}$$

を得る。ここで、右辺の $1/x^2$ は $-\mathrm{p.v.}(1/x)$ の超関数としての微分である（$1/x^2$ の有限部分）。こちらは、$C_c^2(\mathbb{R})$ 上の汎関数としての等式になっている。以下微分を繰り返すことで、超関数としての極限

$$\lim_{y\to\pm 0}\frac{1}{(x+iy)^n}\quad(n=1,2,\dots)$$

が意味をもつことがわかる。

$tf(t)$ が有界な $f \in C^1(\mathbb{R})$ については、上下からの極限関数 $\Omega(t \pm i0)$ との積積分が存在し、とくに

$$\int \frac{\Omega(t \pm i0)}{t - z}\, dt = \mp \frac{\pi i}{z} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 - z^2}\, dt \quad (z \notin \mathbb{R})$$

であり、

$$\int \frac{\Omega(t + i0) - \Omega(t - i0)}{t - z}\, dt = -\frac{2\pi i}{z}.$$

有界区間で支えられた有限正測度 ω のスティルチェス変換 $\Omega(z)$ の境界値関数が $C_c^1(\mathbb{R})$ 上の汎関数として意味をもつか調べる。すなわち、$f \in C_c^1(\mathbb{R})$ に対して、

$$\lim_{y \to \pm 0} \int \Omega(x + iy) f(x)\, dx = \lim_{y \to \pm 0} \Omega_y(f)$$

が存在するかどうか。いまの場合、$\overline{\Omega(z)} = \Omega(\overline{z})$ であるから、

$$(\Omega(x + iy) - \Omega(x - iy))dx = 2i\mathrm{Im}(\Omega(x + iy))dx$$

は $2\pi i\omega(dx)$ に測度収束する。そこで問題は $\mathrm{Re}\Omega(x + iy)dx$ が $C_c^1(\mathbb{R})$ 上の汎関数として収束するかどうか。

$$\mathrm{Re}(\Omega(x + iy)) = \int \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2}\, \omega(dt)$$

であるから、実部の与える線型汎関数 Λ_y は

$$\Lambda_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \int \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2}\, \omega(dt)$$

で与えられる。これの極限 $y \to \pm 0$ の存在を見るために、$[f] \subset [a, b]$ とし、$\mathbb{R}^2$ 上の有界連続関数 g を

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} & (x \neq t) \\ f'(x) & (x = t) \end{cases}$$

で定めると、

$$\begin{aligned}
\Lambda_y(f) &= \int_a^b dx\, f(x) \int \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2}\, \omega(dt) \\
&= \int \omega(dt) \int_a^b f(x) \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2}\, dx \\
&= \int \omega(dt)\, f(t) \int_a^b \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2}\, dx - \int \omega(dt) \int_a^b \frac{(t - x)^2}{(t - x)^2 + y^2} g(x, t)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int f(t) \log \frac{(t - a)^2 + y^2}{(t - b)^2 + y^2}\, \omega(dt) - \int \omega(dt) \int_a^b \frac{(t - x)^2}{(t - x)^2 + y^2} g(x, t)\, dx.
\end{aligned}$$

第二項は、g が有界で、

$$\frac{(t - x)^2}{(t - x)^2 + y^2} \uparrow (1 - \delta_{t,x}) \quad (y^2 \downarrow 0)$$

となることから

$$\lim_{y \to 0} \int \omega(dt) \int_a^b \frac{(t - x)^2}{(t - x)^2 + y^2} g(x, t)\, dx = \int \omega(dt) \int_a^b g(x, t)\, dx.$$

第一項は、$[a,b]$ を $[f]$ だけでなく $[\omega]$ も含むように大きく取れば、

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\int f(t)\log\frac{(t-a)^2+y^2}{(t-b)^2+y^2}\,\omega(dt) = \int f(t)\log\frac{|t-a|}{|t-b|}\,\omega(dt).$$

複素測度は、有限正測度の一次結合で書けるので、その場合のスティルチェス変換 Ω についても $C_c^1(\mathbb{R})$ 上の汎関数としての極限

$$\lim_{y\to\pm 0}\int \Omega(x+iy)f(x)\,dx \quad (f\in C_c^1(\mathbb{R}))$$

の存在がわかる。

そこで、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則関数 Ω で、以下の条件を考える。

(i) $|y||\Omega(x+iy)|$ $(x\in\mathbb{R},\, 0\neq y\in\mathbb{R})$ が有界である。
(ii) $\Omega(z)$ は $z=\infty\in\overline{\mathbb{C}}$ の近傍で正則。とくに、$\Omega(\infty)=0$ である。
(iii) $C_c^1(\mathbb{R})$ 上の線型汎関数として、境界関数 $\displaystyle\lim_{y\to\pm 0}\Omega(x+iy)$ が存在する。
(iv) $\mathbb{R}$ 上の複素ラドン測度として、$2\pi i\mu(dx) = \displaystyle\lim_{y\to +0}\Big(\Omega(x+iy)-\Omega(x-iy)\Big)dx$ が存在する。

(iv) における複素測度 μ の支え $[\mu]$ は、(ii) のおかげで有界閉集合となる。したがって、μ のスティルチェス変換 Ω_μ も上の 4 条件を満たす。さらに、反転公式により、複素測度として

$$\lim_{y\to +0}\Big(\Omega(x+iy)-\Omega(x-iy)\Big) = \lim_{y\to +0}\Big(\Omega_\mu(x+iy)-\Omega_\mu(x-iy)\Big)$$

であることから、$C_c^1(\mathbb{R})$ 上の汎関数として、

$$\lim_{y\to +0}\Big(\Omega(x+iy)-\Omega_\mu(x+iy)\Big) = \lim_{y\to +0}\Big(\Omega(x-iy)-\Omega_\mu(x-iy)\Big).$$

そこで、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則関数 $\Omega-\Omega_\mu$ に、くさびの刃*17を使えば、$\Omega-\Omega_\mu$ は、$\mathbb{C}$ 全体の正則関数である。一方、$\Omega(\infty)=0=\Omega_\mu(\infty)$ であることから、$\Omega=\Omega_\mu$ が成り立つ。

かくして、有界閉集合で支えられた複素測度のスティルチェス変換は、上の 4 条件でも特徴づけられることが示された。

例 D.14. 有限複素数列 $(\mu_i)_{0\leq i\leq l}$ に対して、(ii) をみたす $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ 上の正則関数

$$\Omega(z) = -\frac{\mu_0}{z}-\frac{\mu_1}{z^2}-\cdots-\frac{\mu_l}{z^{l+1}}$$

のうち、(iii) をみたすものは、$\Omega(z)=-\mu_0/z$ に限る。

Remark 13. 条件 (iii) は、$C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上の汎関数としての境界関数の存在に弱めることができ、スティルチェス変換の特徴づけのためには条件自体がいらないかもしれない。

また、(iv) で定められる複素測度 μ は、積分公式により ($\Omega(\infty)=0$ にも注意)

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{t-z}\,\mu(dt) = \Omega(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{R}}\frac{1}{\zeta-z}\Omega(\zeta)\,d\zeta \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$$

をみたす。右辺の周回積分は、Ω の支え $[\Omega]\subset\mathbb{R}$ を実軸の近くで囲む反時計回りの閉曲線についてとる。さらに z についての微分をとることで、$1/(t-z)^n$ と $1/(\zeta-z)^n$ $(n\geq 1)$ についても等式が成り立ち、μ の定義から、$n=0$ でも正しい。

*17 例えば、W. Rudin, Lectures on the edge-of-the-wedge theorem, AMS, 1971, Theorem B.

$\mathbb{R}$ の複素近傍（$\mathbb{R}$ を含む $\mathbb{C}$ の開集合）上で正則な関数 $f(\zeta)$ は、実軸について対称な矩形路 ∂R の上で、$1/(\zeta - z)^n$ $(n \geq 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus R)$ の一次結合で一様に近似できるので、そのような関数についても

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mu(dt) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{R} f(\zeta)\Omega(\zeta)\,d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{R}} f(\zeta)\Omega(\zeta)\,d\zeta$$

である。これが条件 (iii) なしで成り立つことと、スティルチェス変換の特徴づけに条件 (iii) がいらないことが同値。