複素解析入門

山上 滋

2016 年 6 月 22 日

目次

終わり名古屋のいいわけなど

はてさて、としを重ねると厚かましくなるもの、複素関数というのか、そういった授業を受けた記憶すらないままのこのような仕儀。まあ、明らかな落第科目を教えるの厚顔に比べればまだしも、食らいつくべし踏み越えるべし、謙虚に半歩の振り返りをこそ今はの際の杖ともなし、虚しきは人ごみの中の孤、受けるすべなき骸。叫喚は大笑に似たるか。

複素数は奥が深い。代数・幾何・解析という数学の 3 大柱のどれとも密接に関わるものであるし、実数のことは複素数から眺めることで本質がわかるという人も多い。ということで、複素数の数学を学ぶわけであるが、入門段階で扱うべき内容と段取りはほぼ決まっていて、複素数そのものの理解から始まって、複素級数、複素変数の関数、複素変数の微積分といった基礎部分をまずして、その後、応用とかさらに進んだ話題へと進むもののようである。この応用と発展の部分が実は多様を極め、その取捨選択が教える人の気分しだいというか、はた迷惑なところかも知れない。あれも大事これも大事とお節介を焼くよりも、基本のみ伝授して、あとは必要な部分を勝手にどうぞ、と突き放すのが正しい教師の態度かも知れない。世にあまたある本にいろいろ書いてあることでもあり。

予備知識など

二変数までの微積分。具体的には、http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/teaching.html で扱われている程度の内容。そのうち、級数・テイラー展開・線積分は前提としない。微積分の精密な扱い (epsilon-delta 論法など) も必要としない。ただし、こういったことは、少なくとも並行して学ぶべきで、その際の参考資料として、http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/set/set2005.pdf, http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/set/real.pdf を挙げておく。

ついでに書くと、複素解析の基礎の部分に関しては線型代数もいらない。大事なのは数学的好奇心。勉強のための勉強を潔しとせぬこころ。

参考書など

[1] Richard A. Silverman, Introductory Complex Analysis, 1985, Dover. 名古屋向きの一冊であるか。

[2] S. Lang, Complex Analysis, 3rd edition, 1998, Springer. かなり基礎的なことから書かれており、しかもゼータ関数と素数定理にまで及びかつリーマン面には触れないなど、隙のない本である。稽古用の問題も多数入っている。

[3] 神保道夫「複素関数入門」, 岩波書店 (2003). 著者の目配りが感じられる入門書。とりあえずの一冊にどうぞ。ただ、グリーンの定理が外注なのはいただけぬなあ。

[4] S. G. Krantz and H. R. Parks, The Implicit Function Theorem, 2002, Birkhäuser. 複素解析の本というわけではないが、陰関数についてのあれこれ、歴史的な部分とか参考になる。

しかし、いろいろあるねえ、人間は教えたがる動物であったか、はた迷惑の多さよ。

問の使い方など

問は基本事項を理解するために入れてあるので、原則、すべて解くことを勧める。解答を求めるまでもなく処理できるはずである。一部、基本から外れたものは (**) で示しておいたので、こちらはお好みで。はて、(*) は何であったか。

よく使われる記号など

円板　開円板と閉円板を $B_r(c) = \{z \in \mathbb{C}; |z-c| < r\}$, $\overline{B}_r(c) = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| \le r\}$ で定める。ここで、複素数 c は中心点を、$r > 0$ は半径を表す。

線分　複素数 c_0 から複素数 c_1 へ向かう線分を $[c_0, c_1] : z(t) = tc_1 + (1-t)c_0$ $(0 \le t \le 1)$ で表す。

閉集合　複素平面内の集合 B に対して、そのすべての極限点を付け加えたものを $\overline{B}$ という記号で表す。$B = \overline{B}$ であるものを閉集合という。閉円板は閉集合である。

開集合　B のどの点 c も十分小さい $r > 0$ に対して、$B_r(c) \subset B$ となっているとき、B は開集合であるという。開円板は開集合である。

境界　B が開集合であるとき、その境界を $\partial B = \overline{B} \setminus B$ で定める。開円板 $B_r(c)$ の境界は円周 $|z-c| = r$ である。

ノルム　複素数値関数 $f : B \to \mathbb{C}$ と部分集合 $A \subset B$ に対して $\|f\|_A = \sup\{|f(a)|; a \in A\}$ とおく。

<u>オイラーの公式</u>

実数 θ に対して、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

なる関係式を**オイラーの公式**[*1](Euler's formula) とよぶ。

これは、複素指数関数の定義式と思うこともできるが、指数関数・三角関数の冪級数展開 (いわゆるテイラー展開) を複素数に拡張した公式とみることもできる。それぞれを θ の関数と思って、単振動の微分方程式を考察してみてもよい。

関数の変数を複素数にまで拡張することにより、指数関数・三角関数は一つの実体の二つの投影であるという認識に到達する。このことは、単なる数学的な形式にとどまらず、自然の本質に深く関わっていることは、量子力学の教えるところである。その神秘的ともいえる調和の世界は、初等的な級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

の値を考察することからでも伺い知ることができる。

和をとる前の数列 $\{1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots\}$ の**母関数** (generating function)

$$f(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots$$

を求めてみよう。関数 $f(t)$ を微分すると、

$$f'(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \frac{1}{t+1}$$

となるので、これを積分して、

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \log(x+1).$$

とくに、$x = 1$ を代入すると

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

[*1] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_formula

なる公式が得られる。

つぎに、$x = i$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(i) &= 1(i) - \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{3}(-i) - \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{5}(i) - \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{7}(-i) + \dots \\ &= i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right). \end{aligned}$$

他方、

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$$

であるから、

$$f(i) = \log(i+1) = \log\sqrt{2} + \log e^{\pi i/4} = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}i$$

と計算すれば、

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

なるさらに意外な公式も得られる。

こういった何かしら手品のトリックにも似た雰囲気をただよわせる複素数の数学の入り口付近をのぞいてみようというのが、この講義の主旨である。

問 1 (*). 最後の等式の妥当性を電卓あるいは計算機を使って確かめよ。(収束のスピードが遅いので、最低、複数項をまとめて計算すべきである。また計算実験であるから誤差の評価も考察しなくてはいけない。)

1　実数から複素数へ

複素数の何たるかは知っていることと思うが、理解の程はどうか。次は、よく話題になるささやかな間違いであるが、問題点を指摘できるだろうか。

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1.$$

複素数で許される計算規則は何か。そもそも複素数は存在するのだろうか。複素数の構成を、実数についてはわかっている、というところから説明してみよう。

まず、実数の場合の計算規則として重要なのが、加減乗除とそれに関連した結合法則、交換法則、分配法則である。複素数とは $a + ib$ の形の数で、実数の場合と同じような計算規則が成り立ち、i^2 が出てきたら -1 に置き換えて良い、というのが素朴な理解の仕方であるが、はたしてそれで矛盾が生じないのかどうか。$i^2 = 1$ という規則では何か困ることがあるのか。このことを理解するためには、$a + ib$ という表示の代わりに実数の組み (a, b) がある新しい数（「複素数」）を表すと考えてみる。そして、「複素数」 (a, b) に対する和と積を

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \quad (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

で定めると、結合法則と交換法則と分配法則が成り立つことが確かめられる。$(a, 0)$ の形の「複素数」については、実数 a に対する和と積に一致することに注意。さらに、$(0, 0)$ は、和に関して 0 のように振る舞い、$(1, 0)$ は、積に関して 1 のように振る舞う。そこで、「複素数」 (a, b) の負数 (a', b') を

$$(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b) = (0, 0)$$

を満たすものとし、$-(a,b)$ と書くことにすれば、$-(a,b)=(-a,-b)$ となる。また、(a,b) の逆数 (x,y) を

$$(a,b)(x,y)=(x,y)(a,b)=(1,0)$$

を満たすもの、すなわち、x,y が連立一次方程式

$$ax-by=1, \quad bx+ay=0$$

をみたすものとすれば、逆数が存在するのは $a^2+b^2\neq 0$ のときで、そのとき、(a,b) の逆数を $(a,b)^{-1}$ または $\frac{1}{(a,b)}$ と書くことにすれば、

$$\frac{1}{(a,b)}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

となる。

以降、慣例にしたがって、$(a,0)$ を a と同一視し、$(0,1)=i$ と書くことにする。すなわち、$(a,b)=a+ib$ と書く。等式 $(0,1)^2=(-1,0)$ が、$i^2=-1$ を表していることに注意。また、逆数の公式は、

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

のような計算になっていることにも注意。

問 2. 「複素数」についての結合法則、交換法則、分配法則を確かめよ。また、逆数を表す式を導け。

問 3. $(x,y)(x,y)=(-1,0)$ となる (x,y) をすべて求めよ。

問 4 (*). 複素数 $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の平方根、すなわち、$z^2=a+ib$ をみたす複素数 z を具体的に表示せよ。また、複素数を係数とする二次方程式が複素数の解を必ずもつことを確かめよ。

問 5. 置き換え規則 $i^2=\alpha i+\beta$ $(\alpha,\beta$ は実数$)$ を採用した場合の '複素数' を定義し、代数演算の規則がすべて満たされることを確かめよ。また、'逆数' の存在について吟味せよ。

群論を学ぶ際の予備知識ともなる複素数の指数法則についても確認しておこう。自然数 n に対して、$z^n=z\cdots z$ とおく。また、$z\neq 0$ と整数 n に対して

$$z^n=\begin{cases} z^n & \text{if } n>0,\\ 1 & \text{if } n=0,\\ (1/z)^{-n} & \text{if } n<0\end{cases}$$

とおく。このとき、整数 m,n と複素数 $z\neq 0$ に対して

$$z^m z^n=z^{m+n}, \quad (z^m)^n=z^{mn}$$

が成り立つ。

問 6. 指数を正負で場合分けして、上の等式を確かめよ。

複素数のもう一つの構成方法は行列によるものである。実数 a を平面の一次変換 $\binom{x}{y}\mapsto\binom{ax}{ay}$ とみなせば、-1 は、角度 π の回転である。そこで、その半分の回転である角度 $\pi/2$ の回転を表す行列に虚数単位の i を対応させると、複素数 $x+iy$ の行列表示

$$\begin{pmatrix} x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$$

を得る。これにより、複素数の計算規則の多くを行列のそれに還元させることができる。

これはこれで良い方法であるが、複素数の行列を考える際に、行列の行列という実体が受け入れられるかどうか。行列のブロック表示計算を理解すれば済むことではあるが。

2 複素数の幾何学

複素数 $z = x + iy$ に対して

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z,$$

を z の**実部・虚部** (real part, imaginary part) 、$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を**絶対値** (absolute value, modulus [*2]) 、$\overline{z} = x - iy$ を z の**複素共役** (complex conjugate) という。

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad \overline{\overline{z}} = z,$$
$$|z+w| \leq |z| + |w|, \quad |z|^2 = z\overline{z}, \quad |zw| = |z||w|$$

が成り立つ。

$$\mathrm{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

に注意。

Remark . 電気工学方面では虚数単位を表す記号として i ではなく j が使われる。i は電流を表すのに使うという理由で。また、共役複素数を表す記号として z^* も良く使われる。とくに物理方面では。一方、-1 の平方根として、$\sqrt{-1}$ をそのまま使うことも古い文献とかに見られる。ただ、２つある -1 の平方根 $\pm\sqrt{-1}$ は、本来、対等のもので、一方を i と書けば他方は $-i$ と表せるという便宜的な区別でしかない。したがって、もしある複素数の等式が成り立つのであれば、その中で現れる i をすべて $-i$ で置き換えた等式も成り立つことになる。この操作を複素数 $z = x + iy$ に行った結果が共役複素数に他ならない。複素数のもつある種の対称性を表している。

問 7. 等式 $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ を示し、それから $|zw| = |z|\,|w|$ を導け。不等式 $|z+w| \leq |z| + |w|$ が三角不等式と呼ばれる理由を説明せよ。

問 8. $z = x + iy$, $w = u + iv$ とした場合に、$|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ はどのような等式に相当するか。

問 9. 実数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を係数とする方程式

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$$

が $z = x + iy$ という解をもてば、$\overline{z}$ も解である。

複素数を見ようと思ったら、$z = x + iy$ を座標平面上の点 (x, y) と同一視すればよい。このように複素数を使って表された平面を**複素平面**[*3] (complex plane) という。極座標 (r, θ) を使えば、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ なる表示を得る。これを複素数の極形式あるいは**極表示** (polar form) という。オイラーの関係式を使えば、

$$z = re^{i\theta}.$$

[*2] modulus はラテン語で small measure の意味、と言われてもわからぬなあ。意訳して、「大きさ」であるか。

[*3] 高校の教科書では、複素数平面という用語が使われている。うわさによれば、さる高名な数学者が「複素平面は $\mathbb{C}^2$ を表す用語である」と主張した結果、複素数平面なる言葉が採用された由。普通は、複素平面で済ませる習慣のため、入試出題の際の要注意事項の一つとなっている。なお、「ゆとり課程」では、複素数平面が絶対値とともに消滅したが、２０１２年度から復活した模様。

ここで、r は z の絶対値 $|z|$ に等しいことに注意。また、θ は z の**偏角** (argument [*4]) と呼ばれ $\theta = \arg z$ と書く。偏角には、2π の整数倍の不定性があることに注意。2 つの複素数の和あるいは差は、ベクトルとしてのそれに等しい。オイラーの関係式を使えば、三角関数の加法定理は指数法則

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

の形を取り、このことから、

$$|zz'| = |z|\,|z'|, \qquad \arg(zz') = \arg z + \arg z' \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

が従う。絶対値が 1 の複素数 $e^{i\theta}$ を掛ける操作が、複素平面における原点を中心とした角度 θ の回転を表していることに注意する。

Remark . 複素数の順序についてひとこと。試験をすると必ずのように、$i < 1 + i$ といった怪しげな不等式を書く人がでてくる。実数の場合には、一直線に数が並んでいるということで、その順序というのが意味を持つのであるが、複素数の場合は、平面を表すことからもわかるように、自然な順序というものは存在しない。本質的に対等であるべき $\pm i$ を恣意的に区別する必要が生じるからである。

問 10. 加法定理と指数法則（偏角の加法性）が同等であることを確かめよ。

問 11 (*)**.** 複素数 $z \neq 1$ に対し、

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

であることを確かめ、$z = e^{i\theta}$ を代入したものの実部と虚部を取り出すことで得られる等式を書き下せ。

例 2.1. 与えられた正数 $r > 0$ と複素数 c に対して、$|z - c| < r$ をみたす複素数 z 全体は、c を中心とする半径 r の開円板を表す。

問 12. 与えられた正数 $r > 0$, $s > 0$ に対して、

$$\{z + w; |z| = r, |w| = s\} = \{\zeta \in \mathbb{C}; |r - s| \leq |\zeta| \leq r + s\}$$

である。左辺が回転に関して不変であることと $|z + w|$ の動く範囲に注意する。

例 2.2. 複素平面上の 3 点 $a = 1 + i$, $b = 2 - i$, $c = x + iy$ が c を直角点とする直角二等辺三角形を表すように実数 x, y を定めてみよう。条件は、$b - c = \pm i(a - c)$ と表わされるので、これを解いて、$(x, y) = (5/2, 1/2)$ または $(1/2, -1/2)$。[*5]

[*4] 英語で argument といったら、人を説得するための議論のことであるが、数学方面では関数の変数の意味でも使われる。さらに理由は不明なれど、複素数においては、極表示の角を表す。変数は、他に、variable とか parameter という言い方があるのに対して、複素数の角を表す数学用語は argument しかない。角度の不定性が、かつて argument の対象になったということであろうか。物理方面まで範囲を広げると、phase という言い方もあるが、この phase がまた色々な意味で使われる。ちなみに、日本語の偏角というのは、意味を汲み取りつつ、ただの角ではないぞという気持ちを込めた造語であろう。しかし、偏った角とは、やはり「イミフ」であるか。

[*5] こういった平面の回転を利用して解く問題は、行列の代わりに複素数を使って計算することができる。将来、高校数学で、複素数が復活し行列が消滅した際には、入試とかで見かけることになるのであろうか。

　逆に、複素数の幾何学を使って解ける問題は、行列を使って解くこともできる。むしろ、行列の方が汎用的であるというべきか。そういうこともあって、かつて、複素数に取って代わって行列が導入されたのであろう。それをまた旧に復するということであれば、しかるべき総括があって当然であるが、そういった話は相変わらず聞えてこない。

問 13. 複素平面上の 3 点 $1+i$, $2-i$, $x+iy$ が正三角形の頂点を成すように実数 x, y を定めよ。

問 14 (円周角の定理)**.** 複素平面上の 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 がこの順序である同一円周上にあるための条件は、

$$\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3} = -\frac{|z_4-z_1|\,|z_2-z_3|}{|z_2-z_1|\,|z_4-z_3|}.$$

与えられた複素数 c と自然数 n に対して、n 次方程式 $z^n = c$ を解いてみよう。まず、$c = |c|e^{i\varphi}$ と極表示し、$z = re^{i\theta}$ を代入して比較すれば、

$$r^n = |c|, \quad n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

これから、$z^n = c$ の複素数解は、

$$z = |c|^{1/n}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

と表示される。k は n 進むごとに同一の複素数を与えることに注意。

例 2.3. 自然数 $n \geq 2$ に対して、n 次方程式 $z^n = 1$ の複素数解は、$z = e^{2\pi ik/n}$ $(1 \leq k \leq n)$ で与えられ、この n 個の解（1 の n 乗根）は、複素平面上で、単位円周に内接する正 n 角形の頂点を形成する。

問 15 (*)**.** $z^3 = -i$ の解を図示せよ。

三角関数を使って複素数の指数関数を導入したのであるが、逆に複素指数関数で三角関数を表すことも可能である。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

この関係を利用して、$\cos(n\theta)$ を $t = \cos\theta$ の多項式で表す公式を導いてみよう。そのために、$z = e^{i\theta}$ という複素数の記号を導入しておく。まずは、既知の $n = 2, 3$ の場合から調べてみよう。

$$2(\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\right) = \cos(2\theta) + 1.$$

これから、

$$\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = 2t^2 - 1$$

すなわち、

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1.$$

2 つ上の式に $z + z^{-1}$ を掛けて少し計算すると、

$$\frac{z^3 + z^{-3}}{2} = 4t^3 - 3t$$

すなわち、

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

以下、$t = \cos\theta$ の n 次**チェビシェフ多項式** (Chebyshev polynomial) $T_n(t)$ を、

$$2tT_n(t) = (z + z^{-1})\frac{z^n + z^{-n}}{2} = T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t), \quad T_0 = 1, T_1(t) = t$$

で帰納的に定めると、

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

となる。チェビシェフ多項式は大変興味深いもので、直交性を始め様々な性質が知られている[*6]。

問 16. $\sin(n\theta)$ の表示に現れる多項式（第二種チェビシェフ多項式）について考えてみよ。

例 2.4. チェビシェフ多項式は、三項間漸化式を満たしていた。複素数列 $\{z_n\}_{n\geq 0}$ に対する、三項間線型漸化式

$$z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n = 0$$

$(a, b$ は複素数で、$b \neq 0$ とする$)$ を解く上でも複素数が役に立つ。この漸化式の解として、$z_k = \zeta^k$ $(\zeta \neq 0)$ の形のものを探してみよう。これを代入すれば、ζ に対する二次方程式

$$\zeta^2 + a\zeta + b = 0$$

を得る。その 2 つの解を λ, μ とすれば、線型性より、その一次結合

$$z_n = A\lambda^n + B\mu^n$$

も解である。$\lambda \neq \mu$ のとき、これがすべての解を表すことは、与えられた初期値 z_0, z_1 に対して

$$z_0 = A + B, \quad z_1 = A\lambda + B\mu$$

を A, B について解くことができることからわかる。

チェビシェフ多項式の場合であれば、$a = -2t$, $b = 1$, $z_0 = 1$, $z_1 = t$ であるから、$\mu = \lambda^{-1}$ に注意して、すべてを λ で表せば、

$$z_n = \frac{\lambda^{n+1} - \lambda^{-n-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \quad 2t = \lambda + \frac{1}{\lambda}$$

となる。これから λ を消去して z_n を t で表したものがチェビシェフ多項式である。

問 17 (**)**.** 複素平面上の 2 点 0, 1 から出発して、定規とコンパスで作図可能な点全体は、加減乗除、複素共役、平方根を取る操作に関して閉じていることを示せ。

3 次方程式の解法

2 次方程式とその解法については、古代バビロニアにまで遡れるようでであるが、3 次方程式については、中世におけるイスラム圏での代数学の発展を受けて、ルネサンス期のイタリアにおいて最初の解法が発見され、それがきっかけとなり複素数と出会うことになった。よく誤解されるように、二次方程式の解の公式が虚数の導入を促した、というのは正しくない。2 次方程式段階では、虚数解をもつ場合は、解なしとして扱えばよいだけのことなので。3 次方程式の解の公式が虚数を考えるきっかけとなったというのが歴史的事実である。その辺のことを確認しておこう。

一般の 3 次方程式は、$z^3 + az^2 + bz + c = 0$ の形であるが、$\zeta = z + d$ を使って書きなおして定数 d を調整すると、

$$\zeta^3 + 3a\zeta + 2b = 0$$

[*6] http://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials

の形の場合に還元される。(係数の前の 2, 3 はあとの計算を見やすくするためのもので、本質的ではない。) 解法の発見者の一人であるタルタリア (Niccolò Fontana Tartaglia) に倣って、$\zeta = u + v$ の形の解を探そう。代入して書きなおすと、

$$u^3 + v^3 + 2b + 3(uv + a)(u + v) = 0$$

となる。ここで、変数の数が ζ ひとつから u, v の 2 個に増えた自由度を利用して、u, v に対する付加条件として $uv + a = 0$ を採用すると、ζ についての方程式が、u, v についての連立方程式

$$u^3 + v^3 = -2b, \quad uv = -a$$

に還元される。2 つめの式から導かれる $u^3v^3 = -a^3$ と一つめの式を併せると、u^3, v^3 は、二次方程式

$$t^2 + 2bt - a^3 = 0$$

の解であるから、u, v は、

$$\lambda_\pm = -b \pm \sqrt{b^2 + a^3}$$

の 3 乗根である。ただし、3 乗根であればどれでもよいというわけではなく、$uv = -a$ となる組み合わせでないといけない。とりあえず、$\lambda_\pm$ の 3 乗根 $\mu_\pm$ を一つ取っておくと、$(\mu_+\mu_-)^3 = \lambda_+\lambda_- = -a^3$ より、

$$\mu_+\mu_- = -a\omega^k \ (k = 0, 1, 2), \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

である。そこで、正しい u, v の組み合わせとして、

$$(u, v) = (\mu_+\omega^{-k}, \mu_-), \quad (\mu_+\omega^{1-k}, \mu_-\omega^2), \quad (\mu_+\omega^{2-k}, \mu_-\omega)$$

を得るので、

$$\zeta = \mu_+\omega^{-k} + \mu_-, \quad \mu_+\omega^{1-k} + \mu_-\omega^2, \quad \mu_+\omega^{2-k} + \mu_-\omega$$

が求める解である。

さて、解法発見当時の状況を理解するために a, b が実数の場合を詳しく調べてみよう。

まず、$b^2 + a^3 \geq 0$ の場合(タルタリアが扱った場合)は、$\lambda_\pm$ が実数となるので、その 3 乗根として、$\mu_\pm$ も実数に取ることができ $\mu_+\mu_- = -a$ に注意して、

$$\zeta = \mu_+ + \mu_-, \quad \mu_+\omega + \mu_-\omega^2, \quad \mu_+\omega^2 + \mu_-\omega.$$

このあとの方 2 つが実数になるのは、$\mu_+ = \mu_-$ すなわち $b^2 + a^3 = 0$ のときで、このとき、$\mu_+ + \mu_- = -2b^{1/3}$, $-\mu_+ = b^{1/3}$ をつかって $\zeta^3 + 3a\zeta + 2b = (\zeta + 2b^{1/3})(\zeta - b^{1/3})^2$ と因数分解される。それ以外は、1 つの実数解と互いに共役かつ異なる 2 つの複素数解をもつ。実数解は、すべて実数の範囲の計算で求めることができ、複素数の出る幕はなかった。

次に $b^2 + a^3 < 0$ の場合であるが、$\lambda_\pm$ が互いに共役な複素数となるので、$\mu_\pm$ も互いに共役であるように取ることができ、$a < 0$ に注意すれば、$\mu_+\mu_- = -a$ がわかる。そこで、$\mu = \mu_+$ と置けば、

$$\zeta = \mu + \overline{\mu}, \quad \mu\omega + \overline{\mu\omega}, \quad \mu\omega^2 + \overline{\mu\omega^2}$$

という 3 つの実数解を得る。3 つの複素数 $\mu, \mu\omega, \mu\omega^2$ が正三角形の頂点になっていること、$\mu^3 = \lambda_+$ が実数でないことに注意すれば、これら 3 つの実数は全て異なることもわかる。このように、実数解であるにもかか

わらず、その表示に複素数の使用が避けられない状況が出現する。ここで始めて複素数と向き合う必要性が生じたのであった。

以上の分析は、タルタリアの発見から３０年ほど下った Rafael Bombelli によるものである。

なお、４次方程式の解の公式も得られていて、そこでは、３次方程式を解く過程が生じる。４次なのになぜ３次が必要であるかを解明したのが Joseph Louis Lagrange で[*7]、そこで初めて群の概念（この場合は方程式の対称性）が原始的ながら認識された。ガロアは、ラグランジュの創始した路線を大いに発展させ決定的な結果を得たというのが、これも歴史的事実。群論の剰余類に関する定理にラグランジュの名前がなぜ冠せられているか。

3 複素数の位相

位相 (topology) とは、点列の収束を論じる際に生じる「近づく」の意味を精密・抽象化した数学的概念である。[*8]ここでは、複素数の位相とそれにまつわる話題をいくつか取り上げる。

複素数の列 $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n\geq 1}$ が複素数 $z = x + iy$ に収束するとは、

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

が成り立つことと定める。このとき、z を $\{z_n\}_{n\geq 1}$ の極限値と呼び、

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n$$

と書くことは実数列の場合と同様。複素数列の収束は、点列の収束に他ならない。

問 18. 不等式

$$\frac{|x| + |y|}{2} \leq |z| \leq |x| + |y|$$

を示し、収束条件の同値性を確かめよ。

複素数の四則演算は、複素数の位相に関して連続である。具体的には、次のようなことである。

命題 3.1. 複素数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が複素数 a, b にそれぞれ収束するとき。

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

さらに、$a \neq 0$ であれば、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}.$$

Proof. 実数列の収束に帰着させてもよいが、不等式

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leq |a_n - a|(|b_n - b| + |b|) + |a||b_n - b|$$
$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a||a_n|} \leq \frac{|a_n - a|}{|a|(|a| - |a_n - a|)}$$

からすぐわかることである。 □

[*7] J.L. Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations, 1770. 同年にベートーベンが生まれ、前年に老中となったのが田沼意次。イギリスでは産業革命が進行中。

[*8] 数学以外では、様々な意味をもつ phase の訳語として位相ないし相が使われる。とくに正弦波の変数の値を指す際に位相という言葉が使われ、それ以外では相ということが多いようである。例：位相速度 (phase velocity)、相転移 (phase transition)。

問 19. 複素数 $|z| < 1$ に対し、極限

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right)$$

を求めよ。また、極限値に近づく様子を図示せよ。

複素数の指数関数を複素数列の収束の観点から導入してみよう。出発点とする手がかりは、実数の場合の等式

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

である。

問 20. $\log(1+t)$ の一次近似式を用いて、

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$$

を確かめよ。

複素数 $z = x + iy$ に対して、

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

を示そう。[*9] これがわかれば、左辺を e^z と表記することが正当化される。

$$1 + \frac{z}{n} = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n), \quad r_n^2 = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}, \quad \tan\theta_n = \frac{y}{n+x}$$

のように極表示すれば、

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n(\cos(n\theta_n) + i\sin(n\theta_n))$$

となる。右辺の様子であるが、

$$n \log r_n = \frac{n}{2} \log\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n} + \frac{y^2-x^2}{n^2} + \cdots\right) \to x$$

から

$$\lim_{n\to\infty} r_n^n = e^x$$

がわかり、$\theta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ と $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$ に注意すれば、

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \lim_{n\to\infty} n\tan\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{ny}{n+x} = y$$

となって、めでたい。

例 3.2. 複素指数関数について、指数法則 $e^z e^w = e^{z+w}$ が成り立つ。

また、$\{e^z; z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ であり、与えられた $re^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times$ $(r > 0)$ に対して、

$$\{z \in \mathbb{C}; e^z = re^{i\theta}\} = \log r + i\theta + 2\pi i\mathbb{Z} = \{\log r + i\theta + 2\pi i n; n \in \mathbb{Z}\}$$

である。

[*9] これのアニメーションが http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_formula で見られる。

複素数の指数関数はきわめて重要であり、今後、繰り返し扱うことになる。ここでは、不定積分と微分方程式への基本的な応用[*10]を紹介しよう。

まず、実数 t を変数とし複素数を値にもつ関数 $z(t)$ について考える。これは、複素平面内の点 $z(t)$ が時刻 t とともに変化する様子を表すと思えば、複素平面内の点の運動を表していると解釈できる。運動の軌跡である曲線のパラメータ表示と言ってもよい。あるいは、$z(t) = x(t) + iy(t)$ と表示すれば、2つの実数値関数 $x(t), y(t)$ を同時に扱うということでもある。

問 21 (*)**.** $0 < r < 1$ のとき、$z(t) = e^{it} + re^{2it}$ がどのような曲線を表すか考えてみよ。ヒント：r が 0 に近ければ、半径 1 の円に近いのであるが、r が大きくなるとそれが崩れてくる。とくに速度が 0 となる特異点が現れる場合の曲線の様子を詳しく調べる。

複素数値関数の微分は、複素数の収束を使って

$$z'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}$$

で定める。すなわち、$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ ということ。この場合の微分についても、線型性とライプニッツ則が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}(z(t)w(t)) = z'(t)w(t) + z(t)w'(t).$$

問 22. $w(t) = u(t) + iv(t)$ と表し、$z(t)w(t)$ の実部と虚部を微分することで上の式が成り立つことを確かめよ。

関数の連続性も同様であり、$z(t)$ が t について連続ということと $x(t), y(t)$ が t について連続ということが同じ内容となる。連続関数の定積分をコーシー・リーマン式に[*11]

$$\int_a^b z(t)\,dt = \lim_{|\Delta| \to +0} \sum_{j=1}^n z(\tau_j)(t_j - t_{j-1}), \quad |\Delta| = \max\{|t_j - t_{j-1}|; 1 \leq j \leq n\}, \quad \tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$$

で定めると、

$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt$$

となる。これから、微分積分の公式

$$\int_a^b z'(t)\,dt = z(b) - z(a)$$

が複素数値関数の場合も有効であるとわかる。

例 3.3. 複素数 c に対して、

$$\frac{d}{dt}e^{ct} = ce^{ct}$$

であり、これから

$$\int e^{ct}\,dt = \frac{1}{c}e^{ct}.$$

[*10] 基本的ながら、院入試で問うと何故か出来が良くなかったりする。概念を弄ぶあまり具体的な計算が疎かになっていないか。

[*11] ふつう、リーマン積分と呼ばれるものであるが、実質的に導入したのはコーシーで、リーマンは積分可能性の条件を調べたのであった。調べるにあたって、コーシーの与えた定義を少しだけ修正したということはあるにしても。

Proof. 実数 a, b を使って、$c = a + ib$ と表せば、

$$e^{ct} = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$$

であるのでライプニッツ則を使って計算すると、

$$\frac{d}{dt}e^{ct} = ae^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) + e^{at}(-b\sin(bt) + ib\cos(bt)) = ce^{ct}.$$

□

例 3.4.

$$\int e^{ct}\,dt = \frac{1}{c}e^{ct} = \frac{a\cos(bt) + b\sin(bt) + ia\sin(bt) - ib\cos(bt)}{a^2 + b^2}e^{at}$$

の実部と虚部を比較して、

$$\int e^{at}\cos(bt)\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\cos(bt) + b\sin(bt)), \quad \int e^{at}\sin(bt)\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\sin(bt) - b\cos(bt)).$$

問 23 (*)**.** te^{ct} の不定積分を求め、それを利用して

$$\int te^{at}\sin(bt)\,dt$$

を計算せよ。

導関数 $z'(t)$ が $a < t < b$ で存在し、連続かつ $\lim_{t\to a+0} z'(t)$, $\lim_{t\to b-0} z'(t)$ が存在する時、曲線 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ の長さは、積分

$$\int_a^b |z'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

で与えられる。[*12]

問 24. 螺旋 $z(t) = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$ $(0 \leq t \leq 1)$ の長さを求めよ。

ここまでは 2 つの実数値関数を並行して扱っているだけであるが、積分の基本不等式

$$\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |z(t)|\,dt, \quad a \leq b$$

と等式

$$\lambda\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b \lambda z(t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

は、

$$\left|\sum_{j=1}^n z(\tau_j)(t_j - t_{j-1})\right| \leq \sum_{j=1}^n |z(\tau_j)|(t_j - t_{j-1})$$

および

$$\lambda\sum_{j=1}^n z(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \lambda z(\tau_j)(t_j - t_{j-1})$$

の極限として理解するのが簡明である。

[*12] 速さの積分としての道のり。

問 25. 定数倍の等式を実部と虚部を比較することで示せ。また、極表示

$$\int_a^b z(t)\,dt = e^{i\theta}\left|\int_a^b z(t)\,dt\right|$$

と内積の不等式[13]

$$\mathrm{Re}(e^{-i\theta}z(t)) = x(t)\cos\theta + y(t)\sin\theta \le \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

を使うことで、積分の基本不等式が実数値関数の場合に帰着できることを示せ。こういった実積分に還元する方法は、積分をルベーグ式に拡張した際にも役に立つ。

問 26 (**). 不等式

$$\sqrt{\left(\int_a^b x(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)^2} \le \int_a^b \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\,dt$$

の複素数を使わない証明を試みよ。

以上の形式的なことは、複素数値多変数関数の微積分についても実数値関数の場合と同様に成り立つ[14]。例えば、二重積分の不等式

$$\left|\int_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \int_D |f(x,y)|\,dxdy$$

が複素数値関数 $f(x,y)$ についても成り立つ。一つだけ注意しておくと、いわゆる平均値の定理は（少なくともそのままでは）成り立たない。その場合でも、

$$|f(1) - f(0)| = \left|\int_0^1 f'(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |f'(t)|\,dt$$

といった不等式による評価は有効であり、今後くり返し使われる。

問 27. 複素数値微分可能関数 $f(t)$ $(0 \le t \le 1)$ で、$f(1) - f(0) \ne f'(t)$ $(0 < t < 1)$ となる例を挙げよ。

問 28 (**). 複素数値関数 $f(t)$ $(a < t < b)$ で $f'(t)$ が存在し連続であるものに対して、二変数の関数 $\varphi(s,t)$ $(a < s, t < b)$ を

$$\varphi(s,t) = \begin{cases} \frac{f(s)-f(t)}{s-t} & \text{if } s \ne t, \\ f'(t) & \text{if } s = t \end{cases}$$

で定めるとき、φ は連続であることを示せ。

複素指数関数のもう一つの応用として、連立線型微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

[13] コーシー・シュワルツの不等式と呼ぶことが一般的であるが、内積の不等式で良いだろう。
[14] そのつど検証して使うべきである。

を解いてみよう。ここで、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

は複素数を成分とする正方行列であり、$f_j(t)$ を予め与えられた複素数値関数とするとき、上の関係式を満たす複素数値関数 $z_j(t)$ をいかにして見つけるかが問題である。

まず、$f_j(t) = 0\ (1 \leq j \leq n)$ の場合を扱う。$z_j(t)$ に

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

を代入してみると、上の連立微分方程式が

$$\lambda \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

の形となるので、解であるためには、λ が A の固有値で、ζ がその固有ベクトルであればよい。簡単のために、A が対角化可能であるとし、$\mathbb{C}^n$ の基底 $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ を A の固有ベクトルの中から取ってきて、

$$A\overrightarrow{v_j} = \lambda_j \overrightarrow{v_j}$$

とする。

以上の準備の下、$\overrightarrow{f}(t) \neq 0$ の場合を解こう。$\overrightarrow{z}(t)$, $\overrightarrow{f}(t)$ をこの固有基底で展開して、

$$\overrightarrow{z}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) e^{\lambda_j t} \overrightarrow{v_j}, \quad \overrightarrow{f}(t) = \sum_j g_j(t) \overrightarrow{v_j}$$

と表したものを微分方程式に代入すれば、

$$\sum_j c_j'(t) e^{\lambda_j t} \overrightarrow{v_j} = \sum_j g_j(t) \overrightarrow{v_j}$$

となるので、

$$c_j(t) = \int_0^t g_j(s) e^{-\lambda_j s}\, ds + c_j(0)$$

が求める解を与える。

例 3.5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

であれば、

$$A\overrightarrow{v_\pm} = \pm i\omega \overrightarrow{v_\pm}, \quad \overrightarrow{v_\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = g_+(t)\overrightarrow{v_+} + g_-(t)\overrightarrow{v_-}$$

であるようにベクトル値関数 $g_\pm(t)$ を定めると、

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \left(\int_0^t g_+(s) e^{i\omega(t-s)}\, ds + c_+ e^{i\omega t} \right) + \left(\int_0^t g_-(s) e^{-i\omega(t-s)}\, ds + c_- e^{-i\omega t} \right).$$

最後に、複素数の n 乗根、あるいは３次方程式の解法で経験したように、一般の複素数を係数とする n 次方程式

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

が複素数の解をもつかどうか調べよう。結果は、

定理 3.6 (代数学の基本定理)**.** 複素係数の多項式 $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ について、次が成り立つ。

(i) 方程式 $f(\zeta) = 0$ をみたす複素数 ζ が存在する。

(ii) 複素数 $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ を使って、$f(z) = (z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_n)$ と分解される。

(iii) 多項式 $f(z)$ の係数が実数の場合、$f(z)$ は、実係数の一次式および二次式の積で表される。

この最後の結果は、有理関数の不定積分に関連して、有理式の部分分数分解を行う際の基礎となっている。

Remark . 上の定理はガウス[*15]の名を冠して呼ばれることが多いのであるが、寄与が大であったにせよ、ガウス一人に帰せられるべきものでないこともまた事実。

Proof. 方程式 $z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ が複素数の解をもつことを示そう。$c_n = 0$ の場合は、自明な解 $z = 0$ を持つので、$c_n \neq 0$ とする。

さて、半径 $r > 0$ の円周上の点 $z = r^{i\theta}$ から複素数

$$f(r^{i\theta}) = r^n e^{in\theta} + c_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \cdots + c_n$$

への対応について考える。右辺は、r, θ について連続になっており、$r > 0$ を固定して $0 \leq \theta \leq 2\pi$ のみ動かすと、複素平面内の閉曲線を表すことがわかる。

その閉曲線は、$r \to 0$ とすると、一点 c_n に収縮する一方、$r \to \infty$ の場合は、

$$f(r^{i\theta}) = r^n e^{in\theta} \left(1 + c_1 \frac{e^{i\theta}}{r} + \cdots + c_n \frac{e^{-in\theta}}{r^n} \right)$$

および

$$\left| c_1 \frac{e^{-i\theta}}{r} + \cdots + c_n \frac{e^{-in\theta}}{r^n} \right| \leq \frac{C}{r} \frac{1 - r^{-n}}{1 - r^{-1}} \to 0 \quad (r \to \infty)$$

($C = \max\{|c_k|\}$) に注意すれば、$r^n e^{in\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) にほぼ等しく、0 を中心とする巨大な円周 $|z| = r^n$ に沿った形で n 周する曲線を表すことがわかる。

この２つの極端な場合の閉曲線が、$0 < r < \infty$ に連動した連続的な変形で移り合うのであるから、途中のどこかで、0 を通る閉曲線が現れるはずである。すなわち、$f(r^{i\theta}) = 0$ となる複素数 $re^{i\theta}$ が存在する。 □

問 29. 定理の主張の (ii), (iii) を (i) から導け。

[*15] Carl Friedrich Gauss (1777–1855)。ガウスが生まれた１７７７年は、アメリカの独立戦争まっただ中で、フランス革命に先立つこと１２年という時代であった。

問 30 (**). 上の説明の詰めの部分は幾何学的直観に訴えるものであった。ここでは、考え方を踏襲しつつも、より厳密な証明を次の手順で与える。定数ではない多項式 $f(z)$ に対して、$f(\zeta)=0$ となる複素数 ζ の存在を背理法で示す。

(i) $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=\infty$ と $|f(z)|$ が z の連続関数であることから、最小値を与える ζ が存在する。

(ii) $f(z)$ を $z-\zeta$ のべきを使って、

$$f(z)=f_0+f_l(z-\zeta)^l+f_{l+1}(z-\zeta)^{l+1}+\cdots+f_n(z-\zeta)^n,\quad f_l\neq 0$$

と表す。

(iii) $f_0\neq 0$ と仮定すると、$|z-\zeta|$ を小さく取り、$z-\zeta$ の偏角を調整することで、$|f(z)|<|f_0|$ とできる。

(iv) $f_0=0$、すなわち $f(\zeta)=0$ である。

問 31. 実数を係数とする x の多項式 $P(x)$ が、$P(x)\geq 0$ $(x\in\mathbb{R})$ であるならば、複素数を係数とする x の多項式 $Q(x)$ で、$P(x)=Q(x)\overline{Q}(x)$ となるものが存在する。ここで、$Q(x)=\sum_j c_jx^j$ に対して、$\overline{Q}(x)=\sum_j\overline{c_j}x^j$ である。

4 複素変数

実数を変数とし複素数を値に取る関数については既に取り扱った。ここでは、変数も複素数である関数について考えよう。

複素数を複素平面上の点と思えば、変数の動く範囲＝定義域は、複素平面内の図形＝部分集合ということになる。以下、定義域 $D\subset\mathbb{C}$ としては **領域** (domain) ＝連結開集合[*16]を考えるものとする。

複素数 z を変数とする関数の見方には、いくつかの視点があり、それぞれがまた奥深い世界への入り口ともなっている。まずは素朴に、関数＝「z の式」と見た場合の実例から。

例 4.1.

(i) **有理関数** $f(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$, $D=\{z\in\mathbb{C};p(z)\neq 0\}$. ここで、$p(z)$, $q(z)$ は、z の複素係数多項式である。$p(z)=0$ の解は、重複度込で p の次数だけあることに注意。

(ii) 複素**指数関数** $f(z)=e^z$, $D=\mathbb{C}$. これに関連して、

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

とおく。$z\in\mathbb{R}$ であれば、通常の三角関数と一致することに注意する。

(iii) 複素数 $z=re^{i\theta}$ $(r>0,\ -\pi<\theta<\pi)$ に対して、$\mathrm{Log}z=\log r+i\theta$, $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ を複素**対数関数**と呼ぶ。

(iv) 複素数 α を指数とする**べき関数**を $z^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Log}z}$, $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ で定める。

問 32. 等式 $e^{\mathrm{Log}z}=z$ $(z\notin(-\infty,0])$ および $\mathrm{Log}e^z=z$ $(-\pi<\mathrm{Im}z<\pi)$ を確かめよ。

問 33. $\overline{e^z}=e^{\overline{z}}$, $\overline{\cos z}=\cos\overline{z}$, $\overline{\sin z}=\sin\overline{z}$ および $\overline{\mathrm{Log}z}=\mathrm{Log}\overline{z}$ である。

[*16] 以下では、開集合、連結性ともに素朴な理解で十分であるが、正確に述べておくと、開円板 $\{|z-c|<r\}$ の和集合として表されるものが開集合で、開集合 D が連結であるとは、D が共通部分をもたない 2 つの開集合の和にならないことをいう。

問 34. $z = re^{i\theta}$ $(0 \le r < 1)$ のとき、$\mathrm{Log}(1+z)$ を具体的に求めよ。

問 35. 複素数 $z, w \notin (-\infty, 0]$ に対して、$zw \notin (-\infty, 0]$ のとき、$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$ が成り立つかどうか調べよ。

問 36. 複素数のべきについて、$(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ が成り立つかどうか調べよ。

問 37 (*)**.** z^z を複素数 z の関数として定義して、藍の愛情の値を定めよ。

次に、$z = x + iy \in D$ に対する関数の値を $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ と表せば、f を考えることは、2 変数の実数値関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ を指定することに他ならない。

例 4.2.

(i) $f(z) = z^2$ のとき、$u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.
(ii) $f(z) = \overline{z}$ のとき、$u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$.
(iii) $f(z) = |z|^2$ のとき、$u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$.
(iv) $f(z) = 1/z$ $(D = \mathbb{C} \setminus \{0\})$ のとき、

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

関数 f はまた、z 変数の動く複素平面内の領域 D から、w 変数の動く複素平面への写像あるいは変換 $w = f(z)$ と見ることもできる。

例 4.3. 与えられた複素数 c と実数 φ に対して、$f(z) = e^{i\varphi}z + c$ $(D = \mathbb{C})$ は、複素平面内のユークリッド運動 (距離と向きを保つ変換) を表す。

問 38. 与えられた実数 φ に対して、関数 $f(z) = e^{i\varphi}\overline{z}$ は、複素平面内のどのような変換を表すか。

問 39 (**)**.** 複素数 z が $|z| < 1$ をみたすとき、$w = 1 + z + z^2$ の動く範囲 D を複素平面上に図示せよ。また、z についての二次方程式 $z^2 + z + 1 - w = 0$ の 2 つの解が $|z| < 1$ をみたすとき、 w の動く範囲を求めよ。ヒント：$|z| = 1$ のとき、w の動く様子を、絶対値と偏角に注目して観察する。

定義 4.4. 領域 D の上で定義された複素関数 $f(z)$ が**連続である** (continuous) とは、各 $c \in D$ において

$$\lim_{z \to c} f(z) = f(z)$$

が成り立つこと。

例 4.5. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ と表したとき、$f(z)$ が 連続とは、$u(x,y)$, $(v(x,y)$ が二変数関数として連続であることに他ならない。とくに、$\overline{z}$, $|z|$ は z の連続関数である。

定義 4.6. 領域 D の上で定義された複素関数 $f(z)$ が**複素微分可能** (complex differentiable) であるとは、各 $c \in D$ に対して

$$f'(c) = \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

が存在すること。このとき、$f'(z)$ は D 上の複素関数になる。これを f の**導関数** (derivative) と呼ぶ。連

続な導関数[*17]をもつ関数のことを**正則関数** (holomorphic [*18] function) という。連続関数 $f(z)$ の**原始関数** (primitive function) とは、正則関数 $F(z)$ で $F'(z) = f(z)$ となるものをいう。

実変数のときと同様、微分可能であれば連続であるが、要求されている条件は見かけ以上に強いものである。

例 4.7. 整数 n に対して

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

但し、$n < 0$ の場合は、$D = \{z \neq 0\}$ で考える。

問 40. これを示せ。

補題 4.8. 実数 x, y について、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+iy} - 1}{x + iy} = 1.$$

Proof. まず、不等式

$$|e^{a+ib} - 1| = |a + ib| \left| \int_0^1 e^{t(a+ib)}\, dt \right| \leq |a + ib| \int_0^1 e^{ta}\, dt \leq |a + ib| e^{|a|}$$

を用意し、これを使って

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{x+iy} - 1}{x + iy} - 1 \right| &= \left| \int_0^1 (e^{t(x+iy)} - 1)\, dt \right| \leq \int_0^1 \left| e^{t(x+iy)} - 1 \right| dt \\ &\leq |x + iy| \int_0^1 t e^{t|x|}\, dt \leq \frac{1}{2} |x + iy| e^{|x|} \end{aligned}$$

と評価すればわかる。[*19] □

命題 4.9. 指数関数と対数関数の微分について、次が成り立つ。

(i) $(e^z)' = e^z$ *(*$z \in \mathbb{C}$*).*
(ii) $(\operatorname{Log} z)' = \dfrac{1}{z}$ *(*$z \notin (-\infty, 0]$*).*

Proof. 指数関数の微分は、上の補題と指数法則による。

対数関数については、$c \notin (-\infty, 0]$ に対して、$z = ce^{x+iy}$ と表せば、$z \to c \iff (x, y) \to (0, 0)$ であるから、$\operatorname{Log}(ce^{x+iy}) = \operatorname{Log} c + x + iy$ に注意して、

$$\frac{\operatorname{Log} z - \operatorname{Log} c}{z - c} = \frac{x + iy}{c(e^{x+iy} - 1)} \to \frac{1}{c}.$$

□

例 4.10. 複素微分が存在しない例。$f(z) = 2x = z + \overline{z}$, $f(z) = x - iy = \overline{z}$ $(x = \mathrm{Re} z,\ y = \mathrm{Im} z)$ など、z だけの式で書けないもの。

[*17] 実は、導関数の連続性は、導関数の存在を仮定するだけで自動的に成り立つ (付録の Goursat の定理)。
[*18] 古代ギリシャ語の holos = whole と morphe = shape に由来する造語。この理由で、整型関数ということもある。誰がこしらえたものやら、衒学趣味。
[*19] ここでは、積分の不等式で処理したが、一次近似式 $e^x = 1 + x + O(x^2)$, $\cos y = 1 + O(y^2)$, $\sin y = y + O(y^3)$ を使ってもよい。

複素変数の関数についても、実変数の関数と同様の微分の公式が成り立つ。例えば、

命題 4.11. 複素変数の関数 $f(z)$, $g(z)$ が微分可能であるとき、$f(z)g(z)$, $1/f(z)$, $f(g(z))$ も微分可能で、

$$
\begin{gathered}
(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \\
\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}, \\
(g(f(z)))' = g'(f(z))f'(z).
\end{gathered}
$$

となる。

Proof. 合成関数の微分の公式は、$w = f(z)$, $b = f(a)$ とでも置いて、

$$
\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a} = \frac{g(w) - g(b)}{w - b}\frac{f(z) - f(a)}{z - a}
$$

の極限の見るのが普通であるが、$z \neq a$ であっても $w \neq b$ とは限らないので、注意が必要である。まず、微分の定義式を次のように言い換えておく。

$$
F(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \neq a, \\ f'(a) & \text{otherwise} \end{cases}
$$

とおくと、$f(z) - f(a) = (z-a)F(z)$ 、$\lim_{z\to a} F(z) = f'(a)$ である。同様に $G(w) \to g'(f(a))$ $(w \to f(a))$ となる関数を用意すれば、

$$
\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a} = F(z)G(f(z)) \to f'(a)g'(f(a))
$$

がわかる。 □

Remark . 正則関数の計算では、定義域を細かく言い立てないことが多い。これは、ある点の近くで成り立つ関係式が、広く連結成分において成り立つ（あとで述べる一致の定理）という事情によるものである。ただ、連結である範囲を越えた場合は、改めて関係式の吟味が必要である点に注意する。たとえば、$(\sqrt{z})^2 = z$ は、定義域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ すべてにおいて成り立つのに対して、$\sqrt{z^2} = z$ の方は、定義域 $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ の連結成分のうち、右半平面でのみ正しく、もう一つの連結成分である左半平面では、$\sqrt{z^2} = -z$ が正しい合成関数の関係式となる。

問 41. 上の命題の各主張を、定義域に配慮した形で正確に述べてみよ。

例 4.12 (ベキ関数の微分)**.** 複素数 α に対して

$$
(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}, \quad z \notin (-\infty, 0].
$$

座標の関係式

$$
x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}
$$

を使って形式的に偏微分作用素の計算を行うと

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \\
\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).
\end{aligned}
$$

この等式をもって、複素偏微分の定義とする。すなわち、$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ に対して、

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

問 42.

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1, \qquad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

命題 4.13 (Chain Rule)**.** 複素関数 $f(z)$ が連続偏微分可能であるとき、

$$\frac{d}{dt}f(z(t)) = \frac{\partial f}{\partial z}(z(t))\frac{dz}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z(t))\overline{\frac{dz}{dt}(t)}.$$

とくに、$f(z)$ が複素微分可能であれば、

$$\frac{d}{dt}f(z(t)) = f'(z(t))\frac{dz}{dt}(t).$$

例 4.14. 複素数 $\lambda \neq 0$, μ と整数 n に対して、

$$\frac{d}{dt}(\lambda t + \mu)^{n+1} = (n+1)\lambda(\lambda t + \mu)^n$$

から、

$$\int (\lambda t + \mu)^n \, dt = \frac{1}{(n+1)\lambda}(\lambda t + \mu)^{n+1}.$$

問 43. 不定積分の等式

$$\int (t + i)^2 \, dt = \frac{1}{3}(t + i)^3$$

が成り立つことを、両辺の実部と虚部を比較することで確かめよ。

定理 4.15 (Cauchy-Riemann [*20])**.** 連続微分可能な関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ を使って $u(x, y) + iv(x, y)$ と表される関数 $f(x + iy) = f(x, y)$ について、f が複素微分可能であるための必要十分条件は、$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$、すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となること。また、このとき、$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$ である。

[*20] これもよくある如く、初出は Cauchy でも Riemann でもなかったというお話。ダランベール (d'Alembert, 1717–1783) の 1752 年の流体力学についての論文にあるという。d'Alembert は、出生からして劇的であり、百科全書派の領袖としても知られるフランス革命前の時代の巨頭の一人であるが、他に、波動の研究からフーリエ展開をフーリエよりも前に、代数学の基本定理をガウスに先駆けて、また極限の概念の案出、力学におけるダランベールの原理など、数学に対しても多くの先鞭的な貢献をしている。それが数学方面では意外にも知られていなかったりする不思議。

Proof. 複素版 chain rule により、

$$\begin{aligned}
f(z) - f(c) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tz + (1-t)c)\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(tz + (1-t)c)(z - c)\, dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(tz + (1-t)c)\overline{(z - c)}\, dt \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(c)(z-c) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)\overline{(z-c)} \\
&\quad + (z-c)\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial z}(tz + (1-t)c) - \frac{\partial f}{\partial z}(c) \right) dt \\
&\quad + \overline{(z-c)}\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(tz + (1-t)c) - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c) \right) dt
\end{aligned}$$

と表示して、連続関数 h に対して成り立つ

$$\left| \int_0^1 (h(tz + (1-t)c) - h(c))\, dt \right| \leq \max\{|h(w) - h(c)|; |w - c| \leq |z - c|\} \to 0 \ (|z - c| \to 0)$$

および $\overline{(z-c)}/(z-c) = e^{-2i\arg(z-c)}$ に注意すればわかる。 □

Remark . $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ の心は、f が z だけの関数であり $\overline{z}$ 変数に依存しないということ。詳しくは、後で述べる冪級数展開で納得。

問 44 (*)**.**

$$f(x + iy) = e^x(a\cos y + i\sin y)$$

が複素微分可能であるように定数 $a \in \mathbb{C}$ を定めよ。

問 45. 関数 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ が複素微分可能で、$u(x, y)$, $v(x, y)$ が二階まで偏微分可能とすると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v = 0$$

であることを示せ。

問 46. $f'(z) \equiv 0$ であれば、$f(z)$ は定数である。

問 47. 正則関数 $f(z)$ で $|f(z)|$ が定数であるものは、定数関数に限る。

ここで、Cauchy-Riemann 関係式の実解析的な意味を見ておこう。正則関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ に対応する写像

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

の微分 φ' は、行列

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$$

で与えられることから、回転と定数倍の組み合わせ（複素平面への操作としては、複素数の掛け算）となっていて、接ベクトルの角度を保つ変換＝相似変換になっていることがわかる。この性質をもつ写像ないし変換のことを等角写像あるいは共形変換 (conformal mapping, conformal transformation) という[*21]。

[*21] 英語はどちらも conformal であるが、等角変換とは言わないようだ。共形写像というのは見かけるが、一般的かどうか。

行列の場合には、等角＝共形であるものは、行列式の符号の違いで、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

の二種類だけあり、前者は回転の定数倍、後者は折返しの定数倍に対応している。そこで、$\det(\varphi') = 0$ となる例外的な点を除いては、等角写像がどちらのタイプであるかは連続的に維持されることになり、対応する複素関数は、$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ または $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ によって特徴づけられる。後者の場合は、$f(z)$ の代わりに $\overline{f(z)}$ または $f(\overline{z})$ を扱うことで、前者＝正則な場合に帰着する。次に、例外点が孤立している場合、すなわち正則点あるいは反正則点がまわりを埋め尽くしている場合について調べよう。正則・反正則の違いは本質的でないので、正則な場合を考える。このとき、例外点 $c = a + ib$ は等角性から $f'(a + ib) = 0$ を満たす特異点になっている。そこで、特異点の中でも解析が容易な、$f''(c) \neq 0$ である場合に限定して点 $c = a + ib$ の付近での関数 u, v の二次近似式を調べてみると、局所的に $u = |f''(c)|(X^2 - Y^2)/2, v = |f''(c)|XY$ の形であることがわかる。ここで、X, Y は、$(x - a, y - b)$ を回転させて得られる座標である。したがって、(a, b) は u, v の鞍点で、（3 次以上の無限小を無視すると）互いに $\pi/4$ の角度の回転で移り合う形になっている。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

調和関数から正則関数へ

座標変換としての正則関数 z^n, $z + 1/z$

5 複素線積分

変数が実数の場合の複素数値関数 $z(t)$ は点の運動を記述し、したがって [曲線＝軌跡] のパラメータ表示を与えるのであった。以下では、点の運動に由来する複素平面内の曲線を専ら扱うことにする。

これに関連した用語を補っておこう。複素平面内の C^1 **曲線** (C^1-curve) C とは、次のようなパラメータ表示 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ をもつ向きがついたものを指す。[*22]

(i) 関数 $z(t)$ は連続かつ開区間 (a, b) で微分可能である。

(ii) 導関数 $z'(t)$ $(a < t < b)$ が連続であり、さらに、極限

$$z'(a) \equiv \lim_{t \to a+0} z'(t), \quad z'(b) \equiv \lim_{t \to b-0} z'(t)$$

が存在する。

(iii) 曲線の向きは、パラメータ t の増加する向きで与えられる。

また、**なめらかな曲線** とは、C^1 曲線 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ で、$z'(t) \neq 0$ $(a \leq t \leq b)$ であるものを言い、**区分的になめらかな曲線** (piece-wise smooth curve) とは、有限個のなめらかな曲線を向きを保つ形で連結したものを指す。すなわち、複素数値関数 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ で、定義域 $[a, b]$ の分点 $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ を選ぶことで、各 $z(t)$ $(c_{j-1} \leq t \leq c_j)$ がなめらかな曲線を表すようにできるもののこと。区分的 C^1 曲線も同様に定義する。また、C^1 曲線で始点と終点が一致しているものを**閉曲線** (closed curve) と言い、C^1 曲線で自分自身と交叉ないし接する点をもたないものを**単純曲線** (simple curve) という。形式的に書けば、曲線

[*22] 正確には、パラメータの取替えについて同一視を行ったものを指す。パラメータはあくまでも補助的に利用しているということ。

$z(t)$ $(a \le t \le b)$ が単純であるとは、次が成り立つこと。

$$a \le s < t \le b, z(s) = z(t) \Longrightarrow s = a, t = b.$$

例 5.1.

(i) 複素平面内の点 c_0 から点 c_1 に向かう線分は、$z(t) = (1-t)c_0 + tc_1$ $(0 \le t \le 1)$ とパラメータ表示される。

(ii) 点 $c \in \mathbb{C}$ を中心とし半径 r の反時計回りの上半円は、$z(t) = re^{\pi it} + c$ $(0 \le t \le 1)$ とパラメータ表示される。

(iii) (i) $(c_0 = c - r,\ c_1 = c + r)$ と (ii) をつなぐと、半円の周囲を表す区分的になめらかな閉曲線のパラメータ表示として

$$z(t) = \begin{cases} (1-t)(c-r) + t(c+r) & 0 \le t \le 1, \\ re^{\pi i(t-1)} + c & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

を得る。

Remark . 曲線の定義は、曲面のそれに比べればまだしも、それでも結構微妙な点を含む。例えば、

$$z(t) = \begin{cases} t^2 + it^4 & 0 \le t \le 1, \\ t^2 - it^4 & -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

と

$$w(t) = \begin{cases} t + it^2 & 0 \le t \le 1, \\ -t - it^2 & -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

は、本来同じ曲線＝軌跡を表すべきものであるが、上の定義にしたがえば、前者は C^1 であり、後者は区分的になめらかなパラメータ表示ということになる。より一般的に、区分的になめらかな曲線は C^1 曲線であることがわかるのであるが、幾何学的直観に係わる概念は、初めの段階で詮索し過ぎないのがよいだろう。もう少し詳しい説明は、付録の「道の道とすべきは」で。

問 48. 複素平面内の 3 点 0, a, ib $(a > 0, b > 0)$ をこの順序で結ぶ折れ線のパラメータ表示を与える区分的に滑らかな関数 $z(t)$ を一つ作れ。また、C^1 関数による表示も与えよ。

領域 D の上で定義された連続関数 $f(z)$ と D 内の区分的 C^1 曲線 $C : z(t)$ $(a \le t \le b)$ に対して、積分

$$\int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt$$

はリーマン和

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}), \quad z_k = z(t_k), \quad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

の極限に一致し[*23]、曲線のパラメータのとり方によらない[*24]。これを

$$\int_C f(z)\, dz$$

[*23] $z'(t)$ の一様連続性を使う。付録の Riemann-Stieltjes 積分の項を参照。

[*24] パラメータのとり方に依存しないことは、変数変換の公式からもわかる。

と書いて $f(z)$ の曲線 C に沿った複素線積分あるいは単に**線積分** (line integral) と呼ぶ。線積分に係わる曲線は、経路 (path) とも言う。また、閉曲線に沿った線積分の場合は、周回積分 (contour integral) と呼ばれ、積分経路が閉じていることを強調して、

$$\oint_C f(z)\,dz$$

のようにも書く。

同様に積分

$$\int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right|\,dt$$

は、折れ線の長さ

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$$

の極限に一致し、こちらも曲線のパラメータのとり方によらない。これを曲線 C の長さといい、$|C|$ で表す。

- 曲線 C が部分曲線の和 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$ で書けるとき、

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

- 曲線 C の向きを反対にしたものを $-C$ で表すとき[*25]、

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

線積分の値の評価については、次の不等式が役に立つ。

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz| \leq \|f\|_C |C|.$$

ここで、$\|f\|_C = \max\{|f(z)|; z \in C\}$ とおいた。

問 49. 上で述べた諸性質（リーマン和の極限としての表示を除く）を確かめよ。

問 50 (**)**.** C^1 曲線のパラメータ表示 $z(t)$ で $z''(t)$ が存在して連続である場合に、等式

$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)z''(s)\,ds$$

を利用して、線積分および曲線の長さに対する積分表示が和の極限に一致することを示せ。

定理 5.2 (原始関数)**.** 領域 D で定義された連続関数 f が原始関数 F をもてば、点 c を始点とし点 w を終点とする D 内の区分的になめらかな曲線 C に対して、

$$\int_C f(z)\,dz = F(w) - F(c).$$

逆に、領域 D で定義された連続関数 f と与えられた点 $c \in D$ に対して、c を始点とする D 内の区分的になめらかな曲線 C に関する線積分の値が C の終点 w だけに依存するとき、その値を $F(w)$ とすれば、D の上で定義された関数 F は正則であり、$F'(z) = f(z)$ となる。

[*25] 具体的なパラメータ表示を一つ挙げると、$-C : z(ta + (1-t)b)$ $(0 \leq t \leq 1)$ である。

Proof. $a+ib \in D$ の近くでの $F(z)$ の値を、点 c から点 $a+ib$ への区分的になめらかな曲線による部分 $F(a+ib)$ と、それに線分 $[a+ib, x+ib]$, $[x+ib, x+iy]$ をつないだ部分、線分 $[a+ib, a+iy]$, $[a+iy, x+iy]$ をつないだ部分という二つの経路で表せば、

$$F(z) = F(a+ib) + \int_a^x f(t+ib)\,dt + i\int_b^y f(x+it)\,dt = i\int_b^y f(a+it)\,dt + \int_a^x f(t+iy)\,dt.$$

これから、$F(z)$ は、x, y について偏微分可能であり、

$$\frac{\partial F}{\partial y} = if(z), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = f(z).$$

とくに $F(z)$ は C^1 級であり、

$$2\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = f(z) + iif(z) = 0, \quad 2\frac{\partial F}{\partial z} = f(z) - iif(z) = 2f(z)$$

となることから、F は f の原始関数である。 □

Remark . 証明を見ればわかるように、一般の経路でなくても、実軸に平行または垂直な線分を結んで得られる 2 つの積分路に対する値が一致すれば結論は正しい。

例 5.3. 半径 $r > 0$ の円 $C : z(t) = re^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ に対して、

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{if } n = -1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とくに、関数 $1/z$ の線積分は、始点・終点が同じでも、経路の取り方に依存する。

問 51. 領域 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で定義された $1/z$ の原始関数は存在しない。

問 52 (*)**.** 原点 0 から点 1 への線分を C_1, 点 1 から点 $1+i$ への線分を C_2, 点 0 から点 $1+i$ への線分を C_3 で表すとき、関数

$$f(z) = z^2, \quad f(z) = e^z, \quad f(z) = x + y$$

に対して、線積分

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz, \qquad \int_{C_3} f(z)dz$$

を計算し比較してみよ。

問 53 (*)**.** 部分分数表示

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

を用いて、周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

の値を求めよ。ここで、$C \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) > 0\}$ は、単純かつ区分的になめらかな閉曲線を表す。

問 54.

(i) 点 $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ を含む長方形領域 R の上で定義された連続関数 f に対して、$z = x + iy \in R$ の関数 F を

$$F(z) = \int_a^x f(t + ib)\, t + i \int_b^y f(x + it)\, dt$$

で定め、$g(z) = f(z) - f(c)$ とおく。

$$\frac{F(z) - F(c)}{z - c} - f(c) = \frac{1}{z - c} \int_L g(\zeta)\, d\zeta$$

および

$$\lim_{z \to c} \frac{1}{z - c} \int_L g(\zeta)\, d\zeta = 0$$

を示せ。ただし、L は、点 c から z に至る折れ線 $[a + ib, x + ib] + [x + ib, x + iy]$ を表す。

(ii) 定理 5.2 の別証明を与えよ。

Remark. 関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ 曲線 $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ に沿った複素線積分

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b (ux'(t) - vy'(t))\, dt + i \int_a^b (uy'(t) + vx'(t))\, dt$$

の実部・虚部は、

$$\int_C (u(x, y)dx - v(x, y)dy), \qquad \int_C (u(x, y)dy - v(x, y)dx)$$

という記号で表わされ、ベクトル場 $(u(x, y), -v(x, y))$, $(v(x, y), u(x, y))$ の平面曲線 $(x(t), y(t))$ $(a \le t \le b)$ に沿った線積分と呼ばれるものになっている。

Remark. 実変数の場合は、微分可能であれば連続で、連続であれば原始関数の存在が保証されるのであるが、複素変数にするとまるで様子が異なり、正則であっても原始関数が存在しない場合がある。実は、原始関数が存在するという条件の方が、正則性よりも強い条件であることが、次の節で示される。

6 積分定理

準備が整ったので、複素解析の華である積分定理について説明する。方法はいくつかあって、そのうち、(i) Green の定理を使うもの、(ii) 微小周回積分のオーダー評価によるもの、をよく目にするのであるが、ここでは原始関数の局所的存在を利用してみよう。

命題 6.1. C^1 関数[*26] $f(s, t)$ $(0 \le s, t \le 1)$ に対して、

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 f(s, t) dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) dt.$$

Proof. これは、右辺を不定積分して二重積分の公式を使うと

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) dt \right) ds &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) ds \right) dt \\
&= \int_0^1 \Big[f(s, t) \Big]_{s=0}^{s=x} dt \\
&= \int_0^1 f(x, t) dt - \int_0^1 f(0, t) dt
\end{aligned}$$

[*26] 証明を見ればわかるように、$f(s, t)$ は、2 変数の連続関数 $g(s, t)$ の s に関する不定積分の形であればよい。

となって、$\displaystyle\int_0^1 f(s,t)dt$ が $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)dt$ の原始関数であることがわかる。 □

有界閉領域 B の境界 ∂B が区分的になめらかな単純閉曲線の分割和になっているものを考える。ただし、∂B の向きは、曲線に沿って B が左側に見えるように選んであるものとする。このとき、∂B は、$B \setminus \partial B$ の境界にもなっていることに注意する。

$$\partial(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = \partial B_1 + \cdots + \partial B_n$$

となる状況の説明が面倒。$B_j \cap B_k \subset \partial B_j \cap \partial B_k$ が有限個の連結成分をもつとか。むしろ、こうなる場合を $B = B_1 + \cdots + B_n$ と書くとか。一般的と言うよりは実践的に処理するのがよい。

例 6.2. $B = \{z \in \mathbb{C}; r < |z| < R\}$ のとき、$C_\rho : z(t) = \rho e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とおけば、$\partial B = C_R - C_r$.

$B = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 2\} \setminus [-1,1]$ の境界は、円周 $|z| = 2$ と線分 $[-1,1]$ からなるので、閉曲線の条件をみたさない。

平行四辺形

$$h(s,t) = c + s\sigma + t\tau$$

さて、正方形 $\{(s,t); 0 \leq s,t \leq 1\}$ から複素平面内の領域 D への写像 $h(s,t)$ で、正方形の内部で C^1 級であり、各偏導関数が境界まで連続に拡張できるものを考える。このとき、$0 < s,t < 1$ に対して成り立つ等式

$$h(s,t) = \int_0^s \frac{\partial h}{\partial s}(u,t)\,du + h(0,t) = \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s,u)\,du + h(s,0)$$

は、連続性により、境界でも正しく、したがって、$h(t,0)$, $h(1,t)$, $h(1-t,1)$, $h(0,1-t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ が C^1 曲線を与えることに注意する。この 4 つを繋いで得られる閉曲線を C とする。さらに $\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(s,t)$, $\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}(s,t)$ が存在し、$0 \leq s,t \leq 1$ まで連続に拡張できるものとする。このとき、等式

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}$$

が成り立つことに注意する。

補題 6.3. 閉曲線 C を上のように取るとき、領域 D の上で定義され正則関数 $f(z)$ に対して、

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Proof. $0 \leq s \leq 1$ に対して、$h(s,t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ の表す C^1 曲線を C_s と書くと、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_{C_s} f(z)dz &= \frac{d}{ds}\int_0^1 f(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(f(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(f'(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\frac{\partial h}{\partial t}(s,t) + f(h(s,t))\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(s,t)\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right)dt \\
&= \left[f(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= f(h(s,1))\frac{\partial h}{\partial s}(s,1) - f(h(s,0))\frac{\partial h}{\partial s}(s,0).
\end{aligned}$$

これを $0 \le s \le 1$ について積分すると、求める周回積分の等式となる。 □

系 6.4. 領域 D 内の C^1 曲線 $C : z(t)$ $(0 \le t \le 1)$ と点 $c \in D$ に対して、$sz(t)+(1-s)c \in D$ $(0 \le s,t \le 1)$ であれば、

$$\int_C f(z)\,dz = \int_L f(z)\,dz.$$

ここで、L は、点 $z(0)$ から点 c への線分と点 c から点 $z(1)$ への線分をつないだ折れ線分を表す。

例 6.5.

(i) 領域 D 内の C^1 曲線 $C : z(t)$ $(0 \le t \le 1)$ に対して $sz(t) + (1-s)z(0) \in D$ $(0 \le s,t \le 1)$ であるとき、点 $z(0)$ から点 $z(1)$ へ向かう線分を L で表せば、

$$\int_C f(z)\,dz = \int_L f(z)\,dz.$$

(ii) 3点 a, b, c を頂点とする三角形が D に含まれるとき、

$$\int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz = 0.$$

(iii) 領域 D に含まれる多角形の周囲を C で表せば、

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

問 55. 領域 D の上で定義された正則関数 f と D 内の長方形 R に対して、

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0.$$

ここで、∂R は、R の周囲に反時計回りの向きを入れた区分的になめらかな曲線を表す。

問 56. 長方形領域 R の上で定義された正則関数は、原始関数をもつ。とくに、R 内の C^1 閉曲線 C に対して、

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

問 57 (*)**.** C^1 閉曲線 C が D 内で一点に縮められる状況を C^1-homotopy の形で定式化し、その場合にも上の補題の結論が正しいことを確かめよ。

定理 6.6 (Cauchy の積分定理)**.** 有界領域 D の境界 ∂D が区分的に滑らかな閉曲線の集まりであるとき、$D \cup \partial D$ を含む領域で定義された正則関数 $f(z)$ に対して、

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

ただし、領域 D が左側に見えるように境界 ∂D の向きを定めるものとする。

Proof. すべての区分点を含む形で閉曲線 ∂D を $\partial D = C_1 + \cdots + C_n$ と分割し、各 C_j の始点から終点へ向かう線分 L_j で表せば、L_j で囲まれた多角形が $f(z)$ の定義域に含まれるようにできる。そこで、上の例を使えば、

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^n \int_{L_j} f(z)\,dz = 0.$$

□

Remark . 直感的には、D を座標軸に平行な直線で分割することで、問５６が使える $D \subset R$ の場合に帰着させるという理解で良い。

補題 6.7. 上半平面 $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ から円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}$ を除いた領域の上で定義された連続関数 $f(z)$ に対して、$M(r) = \max\{|f(z)|; |z| = r\}$ なる量が条件 $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$ をみたすならば、$t > 0$ に対して、

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} e^{itz} f(z)dz = 0$$

となる。ここで、$C_r : z = re^{i\theta}$ *(*$0 \leq \theta \leq \pi$*).*

Proof.

$$\left|\int_{C_r} e^{itz} f(z)\,dz\right| \leq rM(r)\int_0^\pi e^{-rt\sin\theta}\,d\theta \leq 2rM(r)\int_0^{\pi/2} e^{-2rt\theta/\pi}\,d\theta = \frac{\pi}{t}M(r)(1-e^{-rt}).$$

□

例 6.8.

(i) 円環 $r \leq |z| \leq R$ の上半分の周囲を C とするとき、

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

から

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

を得る。

(ii) 扇形 $0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4$ の周囲を C とするとき、

$$\oint_C e^{-z^2}dz = 0$$

とガウス積分

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

から

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pi i/4} \quad \text{(Fresnel 積分)}$$

を得る。

問 58 (*)**.** フレネル積分を求める上で必要な計算を実行せよ。

定理 6.9 (Cauchy の積分公式)**.** *Cauchy* の積分定理（定理 6.6）の設定状況で、点 $z \in D$ に対して、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Proof. z を中心として半径 $r > 0$ の円 C_r を考えて、C と C_r の間にある領域に積分定理を適用すると、

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

ここで、

$$\begin{aligned}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + f(z) \int_{C_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + 2\pi i f(z)\end{aligned}$$

から得られる

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \|f'\|_{B_r(z)} |C_r|$$

において、$r \to 0$ とすれば求める公式が得られる。ここで、$\|f'\|_{B_r(z)} = \max\{|f'(\zeta)|; |\zeta - z| \leq r\}$ であり、

$$|f(\zeta) - f(z)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(t\zeta + (1-t)z)\, dt \right| \leq |\zeta - z| \int_0^1 |f'(t\zeta + (1-t)z)|\, dt \leq |\zeta - z| \|f'\|_{B_r(z)}$$

を使った。 □

系 6.10. 正則関数は何度でも複素微分可能であり、

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

が成り立つ。

Proof. c を始点とし w を終点とする曲線 $\Gamma \subset D$ に対して、

$$\begin{aligned}\int_\Gamma dz \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta &= \oint_C d\zeta f(\zeta) \int_\Gamma \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\, dz \\ &= \oint_C f(\zeta) \left[\frac{1}{n(\zeta - z)^n} \right]_{z=c}^{z=w} d\zeta \\ &= \frac{1}{n} \oint_C f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - w)^n} - \frac{1}{(\zeta - c)^n} \right) d\zeta\end{aligned}$$

は、Γ の始点 c と終点 w のみに依存するので、定理 5.2 により、

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^n}\, d\zeta$$

は、$w \in D$ について微分可能で、

$$\frac{d}{dw} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^n}\, d\zeta = n \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}}\, d\zeta$$

が成り立つ。 □

Remark . 有界領域 D における関数 $f(z)$ の値が D の境界である閉曲線 C における値で完全に決まることに注目。

問 59. 定数と異なる多項式 $f(z)$ に対して、方程式 $f(z)=0$ がかならず複素数の解をもつことを、積分公式の応用として示せ。ヒント：f の次数を $n \geq 2$ とするとき、$m(r) = \min\{|f(z)|; |z|=r\}$ とおけば、

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r}{m(r)} = 0.$$

問 60. 領域 D の上で定義された連続関数 f が正則であるための必要十分条件は、D に含まれる勝手な長方形領域 R に対して、

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

となることである。これを示せ。

テイラー展開

関数 f が閉円板 $\overline{B}_r(c)$ を含む領域で正則であるとき、コーシーの積分公式を $|z-c|<r$, $|\zeta - c| = r$ に対して適用すると、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-c|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

ここで、$|z-c|/|\zeta-c| < 1$ に注意して、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - c}\frac{1}{1-(z-c)/(\zeta-c)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}$$

を代入すれば、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-c)^n,\ |z-a|<r, \qquad f_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-c|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta$$

なる表示が得られる。

上の式変形で、積分と級数和の順序交換が可能であることは、

$$\begin{aligned}
\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k (z-c)^k \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-c|=r} \sum_{k=n}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-c)^k}{(\zeta-c)^{k+1}} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|\zeta-c|=r} \sum_{k=n}^{\infty} |f(\zeta)| \frac{|z-c|^k}{|\zeta-c|^{k+1}} |d\zeta| \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \|f\|_{\partial B_r(c)} \frac{|z-c|^k}{r^k} = \frac{\|f\|_{\partial B_r(c)}}{r-|z-c|}\frac{|z-c|^n}{r^{n-1}} \to 0\ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

からわかる ($|z-c|<r$ に注意)。

定理 6.11 (Taylor expansion)**.** 領域 D で正則な関数 $f(z)$ に対して、f は何度でも微分可能であり、$c \in D$ と D の境界 ∂D との距離を $R>0$ とすれば、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(z-c)^n, \quad |z-c|<R$$

が成り立つ。

右辺は、$z-c$ の自然数冪の和になっていて、$z-c$ の冪級数 (べききゅうすう) と呼ばれる。また、右辺の形を $f(z)$ の $z=c$ におけるテイラー級数 (Taylor series) と呼ぶ。

例 6.12. 基本関数のテイラー展開[*27]：

(i) $z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \cdots ,$$
$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4!} z^4 + \cdots ,$$
$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \cdots .$$

(ii) $|z| < 1$ と複素数 α に対して、

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + \cdots ,$$
$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \cdots .$$

Remark . べき関数のテイラー展開があっさりとできてしまったところに注目。実変数だけでこれを示そうとすると、剰余項の評価がうっとうしい。

問 61. 実数 $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ に対して、円弧 $z(t) = e^{it}$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ を $C(\alpha,\beta)$ で表す。領域 $\mathbb{C} \setminus C(\alpha,\beta)$ の上で定義された関数

$$f(z) = \int_{C(\alpha,\beta)} \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta$$

が正則であることを示し、f の 0 のまわりでのテーラー展開を求めよ。

複素関数のテイラー展開が得られたところで、遅ればせながら、級数についての基本事項を改めて確認することにしよう。

7 級数の収束

級数の収束は、

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k$$

であることからもわかるように数列の収束に過ぎないのであるが、一方でまた級数特有の性質というものもある。後ほど繰り返し使われる基本的な部分を少し一般的に述べておこう。

正 (または 0) の数の集まり $\{a_i\}_{i\in I}$ に対して、次の 2 条件を満たす $A \in [0,\infty]$ がただ一つ定まる[*28]。これを $A = \displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ と書いて、$\{a_i\}_{i\in I}$ の**和**と呼ぶ。

[*27] 最後のべき関数の展開は、かのニュートンによるもので、これが後の微積分発見の原動力となった。「神は細部に宿る」と言うが如く、ものごとを具体的に知っておくことは大事だ。証明、証明で、眼高手低の人にならぬよう。基本 5 関数、経を唱えるが如く。

[*28] 上限を使えば、$A = \sup\{\sum_{i\in F} a_i ; F \subset I$ は有限集合 $\}$ と書くことができる。

(i) どのような有限部分 $\{a_i\}_{i\in F}$ に対しても、$\displaystyle\sum_{i\in F} a_i \le A$ をみたす。

(ii) A は、この性質をもつ最小の数（または無限大）である。

正数の和は、定義からして、和を取る順序のようなものに無関係である（このことを強調して総和と呼ぶこともある)。総和の唯一性の結果として、次の分割和の等式が成り立つ：添え字集合 I が $I = \displaystyle\bigsqcup_{n\ge 1} I_n$ と分割表示されるならば、

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n\ge 1}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right).$$

総和はまた単調性を有する：同じ添字集合をもつ正数の集まり $\{a_i\}_{i\in I}, \{b_i\}_{i\in I}$ が、$a_i \le b_i$ $(i \in I)$ であるならば、

$$\sum_{i\in I} a_i \le \sum_{i\in I} b_i.$$

問 62. 正数の和に関する上で述べた性質を確かめよ。集合の形式を上限についての良い練習になる。

問 63 (**)**.** 正（または 0) の数の集まり $\{a_i\}_{i\in I}$ が、$\sum_{i\in I} a_i < \infty$ を満たすならば、どのように小さな正数 $\epsilon > 0$ を取ってきても、

$$\{i \in I; a_i \ge \epsilon\}$$

は有限集合であることを示せ。これから、$\{i \in I; a_i > 0\}$ は可算集合であることを導け。

さて、具体的な級数の収束性については、次が基本的である。

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx < +\infty \iff \alpha > 1,$$

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1.$$

とくに、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

この発散級数の増大度のスピードは、

$$1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \le \int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

より、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} = 1,$$

すなわち、$\log n$ の程度である。さらに、

$$0 \le \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx = \int_k^{k+1} \frac{x-k}{kx}dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{kx}dx \le \frac{1}{k^2}$$

より、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

が存在する。

問 64. 正数 a に対して、極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+n}-\log\frac{a+n}{a+1}\right)$$

が存在し、正の数であることを示せ。

問 65. 正数 a について、級数

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log n)^a}$$

の収束性を調べよ。

問 66 (*)**.** 二重和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(k^2+l^2)^{-a}$$

が有限となる $a>0$ の範囲について調べよ。

定義 7.1. 複素級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ は、

$$\sum_{n\geq 0}|c_n|<\infty$$

であるとき、**絶対収束** (converge absolutely) するという。[*29]

定理 7.2 (級数の基本定理)**.** 絶対収束する級数に対して、級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n$$

は（ある複素数に）収束し、その値は和をとる順番によらない。さらに、不等式

$$\left|\sum_n c_n\right|\leq\sum_n|c_n|$$

が成り立つ。

Proof. まず、c_n が実数の場合に主張が正しいことを示す。

$$c_n=a_n-b_n,\quad a_n\geq 0,\quad b_n\geq 0,\quad |c_n|=a_n+b_n$$

のように表せば、絶対収束性から $\sum a_n$ も $\sum b_n$ もともに存在し、

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_n a_n-\sum_n b_n$$

となる。正数の和については加える順序によらないので、この関係式から、$\{c_n\}$ の和も足す順序によらない。

[*29] 絶対値 (absolute value) の和が存在するという意味なのか、あるいか絶対的に和が存在するという意味なのか、たぶん掛けことばなのだろう。誰が言いだしたものやら。

次に、複素数の場合は、$c_n = x_n + iy_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$ と表示して、

$$\sum_n |x_n| \leq \sum_n |c_n|, \quad \sum_n |y_n| \leq \sum_n |c_n|$$

に注意すれば、$\sum_n x_n, \sum_n y_n$ いずれも絶対収束し、したがって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{n\geq 0} x_n + i \sum_{n\geq 0} y_n$$

も収束し、その値は和をとる順序によらない。不等式は、有限和に対する

$$\left| \sum_{k=0}^{n} c_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |c_k|$$

の極限として成り立つ。 □

Remark . 実は、級数の値が和を取る順番に関わらずに存在してすべて一致するのは、絶対収束する場合に限ることが後の問でもあるリーマンの結果からわかる。この意味で、絶対収束するという代わりに総和可能である (summable) ということもある。

例 7.3. 複素数 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

であった (例 6.12)。したがって、

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} |z|^n = e^{|z|}$$

より、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ は絶対収束することがわかる。

問 67 (*)**.** 級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$ は絶対収束する。

問 68. 多項式 $f(t)$ と複素数 $|z| < 1$ に対して、級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n) z^n$ は、絶対収束する。

もうすこし一般的に、複素数の集団 $\{c_i\}_{i\in I}$ に対して、$\displaystyle\sum_{i\in I} |c_i| < \infty$ ならば、複素数 $\displaystyle\sum_{i\in I} c_i$ が定まり、

$$\left| \sum_{i\in I} c_i \right| \leq \sum_{i\in I} |c_i|.$$

例 7.4.

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| < +\infty, \qquad \sum_{n\geq 1} |b_n| < +\infty$$

のとき、

$$I = \{i = (m, n); m \geq 1, n \geq 1\}, \qquad c_i = a_m b_n$$

とすると、$\displaystyle\sum_{i\in I}|c_i|<+\infty$ であり、

$$\sum_{i\in I}c_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{l=1}^{n}b_l=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}b_l\right)=\sum_m a_m\sum_n b_n.$$

左辺は、普通、

$$\sum_{m,n\geq 1}a_mb_n$$

と書く。

問 69. 複素数 z,w に対して、

$$\sum_{m\geq 0}\frac{z^m}{m!}\sum_{n\geq 0}\frac{w^n}{n!}=\sum_{k\geq 0}\frac{(z+w)^k}{k!}$$

を示せ。

級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

のように、絶対収束しないが値自体は部分和の極限として存在する場合を強調して条件収束 (conditional convergence) と称する。

和の順序を変えることにより、その値がいろいろと変化する様子をみてみよう。そのために、$+$ の項を p 個、$-$ の項を q 個順次取りだし、交互に和をとった級数を考える。プラス・マイナスそれぞれを n ブロック足した和

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{2q}+\dots\\ +\frac{1}{2(n-1)p+1}+\dots+\frac{1}{2np-1}-\frac{1}{2(n-1)q+2}-\dots-\frac{1}{2nq}\end{aligned}\qquad(1)$$

すなわち、

$$1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2np-1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2nq}\right)$$

を考えると、これは、

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2np}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{2np}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{qn}\right)$$

に等しいので、

$$\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n$$

$$\begin{aligned}&\log(2pn)+\gamma_{2pn}-\frac{1}{2}(\log(pn)+\gamma_{pn})-\frac{1}{2}(\log(qn)+\gamma_{qn})\\ &=\log(2p)-\frac{1}{2}\log p-\frac{1}{2}\log q+\gamma_{2pn}-\frac{1}{2}\gamma_{pn}-\frac{1}{2}\gamma_{qn}\end{aligned}$$

と書きなおせば、$n\to\infty$ のとき、

$$\log(2p)-\frac{1}{2}\log p-\frac{1}{2}\log q=\log(2\sqrt{p/q})$$

に近づく。

例 7.5.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$
$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2.$$

問 70. 数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ に対して、極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k$$

が存在すれば、$c_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であることを示し、逆が成り立つかどうか復習せよ。

問 71 (B. Riemann)**.** 条件集束する実級数を並べ替えることで、どのような実数値にも収束するようにできることを示せ。

8 冪級数と収束域

複素数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ と複素変数 z に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

の形の級数を z の**ベキ級数** あるいは整級数 (power series) という[*30]。ベキ級数の**収束域** (domain of convergence) を

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k z^k \text{ が存在する }\}$$

で定義する。ベキ級数を表すために関数の記号がしばしば用いられる。

例 8.1. 例 6.11 で見たように、次の 3 つのベキ級数の収束域は、複素平面全体である。

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots,$$
$$\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots,$$
$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots.$$

例 8.2.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

の収束域は、$\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

補題 8.3.

(i) 正数 $r > 0$ に対して、

$$\sum_{k\geq 0} |c_k| r^k < \infty \implies \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\} \subset D.$$

[*30] 冪の省略形として巾という字を当てることもあるが、ここでは読み書きに便利なようにベキとカタカナ表記する。冪の意味は、おおいかぶさる、数に数を重ねるの意であったか。なお、整級数の方はフランス語 série entière の訳語であろうか。整数との対応がしっくりしないので、以下では使わない。ちなみに、フランス語では、自然数が entier naturel で、整数は entier relatif というらしい。微妙に理屈っぽいところが面白い、quatre-vingt。

(ii) 複素数 $z \in D$ と正数 $r < |z|$ に対して、

$$\sum_{k \geq 0} |c_k| r^k < \infty.$$

この補題から、$D \neq \mathbb{C}$ であれば、ある $\rho \geq 0$ が存在して

$$\{|z| < \rho\} \subset D \subset \{|z| \leq \rho\}$$

であることがわかる。この ρ をベキ級数

$$\sum_{k \geq 0} c_k z^k$$

の**収束半径** (radius of convergence) という。

上の補題はまた、収束半径の内側では、ベキ級数が絶対収束していることも意味する。

問 72 (*)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

の収束域を求めよ。ヒント：$S_n = 1 + z + \cdots + z^n$ と置いて $z^n = S_n - S_{n-1}$ という表示を使って書きなおす。一種の部分積分の方法であり、アーベル変換 (Abel transformation) とも呼ばれる。

ここで Bachmann-Landau のオーダー記号について思い出しておこう。複素数列 $\{c_n\}_{n \geq 0}$ と正数列 $\{C_n\}_{n \geq 1}$ に対して、次の性質を考える。正数 $M > 0$ と自然数 $N \geq 1$ を適切に選べば、

$$|c_n| \leq M C_n, \quad \forall n \geq N$$

が成り立つ。この状況を $c_n = O(C_n)$ という記号で表す。

問 73. $C_n = 1$ の場合、$c_n = O(C_n)$ であるということと、c_n が有界であることが同値。これを確かめよ。

問 74 (**)**.** ベキ級数 $\sum_{k \geq 0} c_k z^k$ の収束半径は、

$$\rho = \sup\{r > 0; |c_n| = O(1/r^n)\}$$

で与えられる。

評価数列 C_n としては、$\log n$, n^a, r^n, $n!$ とその組み合わせがよく使われる。これに関しては、次[*31]が基本的。

命題 8.4. 正数 $a > 0$ と $r > 1$ に対して、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n^a} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^a}{r^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{r^n}{n!} = 0.$$

これは、$n \to \infty$ のときの増大度を遅い順番に並べたものが、$\log n, n^a, r^n, n!$ であることを意味する。

問 75. 指数関数のテイラー展開の形から、$r^n << n!$ を導け。

[*31] 例えば、http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/calculus/cal2012haru.pdf を見よ。

例 8.5. ベキ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n^2}$$

の収束半径を求めてみよう。$z = 1$ で発散するので、$\rho \leq 1$ である。$0 < r < 1$ に対しては、

$$n r^{n^2} = n r^{n^2/2} r^{n^2/2}$$

と表して、$n r^{n^2/2} \to 0$ $(n \to \infty)$ および、

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n^2/2} \leq \sum_{k=1} r^{k/2} < \infty$$

に注意すれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n^2} < \infty$$

であることから、$r \leq \rho$ がわかり、$r < 1$ を 1 に近づけると $1 \leq \rho$ である。したがって、$\rho = 1$.

問 76. 2 つのベキ級数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, $\sum_{n\geq 1} c_n z^{n-1}$ は、同一の収束域をもつ。

問 77. $a > 1$ とする。

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} z^n$$

の収束域を求めよ。

問 78. 冪級数 $\sum_{n\geq 0} n! z^n$ の収束半径を求めよ。

命題 8.6. 2 つのべき級数

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n, \quad \sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$$

は、同じ収束半径をもつ。

Proof. それぞれの収束半径を ρ, ρ' とする。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|}{r}^n \leq |c_0| + r \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}$$

より、$r < \rho' \Longrightarrow r < \rho$、すなわち $\rho' \leq \rho$ である。

逆に、$0 < r < \rho$ とするとき、$r(1+\epsilon) < \rho$ となる $\epsilon > 0$ が取れるので、自然数 N を $n \leq (1+\epsilon)^n$ $(n \geq N)$ であるように選んでおけば、

$$r \sum_{n\geq N} n |c_n| r^{n-1} \leq \sum_{n\geq N} |c_n| r^n (1+\epsilon)^n < \infty$$

となって、$r \leq \rho'$ がわかる。 □

Remark . 見てわかるように、ほとんど ϵ-δ 論法である。こういう地道な不等式評価の方法が、逆に、その起源であったというべきか。

系 8.7. ベキ級数 $\sum_{n\geq 2} n(n-1) c_n z^{n-2}$ も同じ収束半径をもつ。

問 79 (*)**.** $p(n)$ を n の多項式（ただし $p \not\equiv 0$）とするとき、2 つのベキ級数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} p(n) c_n z^n$ の収束半径は一致する。

定理 8.8. ベキ級数 $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ は、収束円の内部で正則であり、その導関数はベキ級数

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

で与えられる。

Proof. $g(z) = \sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$ とおくと、$f(z)$ の収束半径 $\rho > 0$ は $g(z)$ の収束半径でもある。

そこで、$|w| < \rho$ に対して $f(z)$ が $z = w$ で微分可能で $f'(w) = g(w)$ となることを示す。実際、$|w| < R < \rho$ となる R を用意して、$|z| < R$ $(z \neq w)$ とすると、不等式

$$|z^k - w^k| \leq |z - w|\,|z^{k-1} + z^{k-2} w + \cdots + w^{k-1}| \leq k R^{k-1} |z - w|, \quad k \geq 1$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| \\
&\quad \leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \left| (z^{n-1} - w^{n-1}) + (z^{n-2} w - w^{n-1}) + \cdots + (z w^{n-2} - w^{n-1}) \right| \\
&\quad \leq |z - w| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \Big(1 + 2 + \cdots + (n-1) \Big) R^{n-2} \\
&\quad = |z - w| \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{2} |c_n| R^{n-2}
\end{aligned}$$

という評価から

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = g(w)$$

がわかる。最後の和が有限であることに注意。

とくに $f(z)$ は $|z| < \rho$ で連続であり、$f(z)$ を $g(z)$ で置き換えることで、$f'(z) = g(z)$ の連続性もわかる。 □

問 80. 級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ が絶対収束する時、

$$\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$$

は、$\theta \in \mathbb{R}$ の連続関数を定めること、および

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta$$

を示せ。

定理 6.11 で見たように、領域 D の上で定義された正則関数 $f(z)$ は、$a \in D$ と境界 ∂D との距離を r とするとき、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad |z - a| < r$$

のようにベキ級数展開されるのであった。とくに、その収束半径 ρ は $r \le \rho$ であるが、もし、収束円の内部 $|z-a|<r$ から D の境界へ近づく点列 $\{z_n\}$ $(|z_n - a| < r)$ で、

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

が存在しないものがあれば、ベキ級数の連続性より $\rho = r$ がわかる。

例 8.9.

$$\lim_{n\to\infty} \log(1+(-1+1/n)) = \infty$$

から、

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \cdots$$

の収束半径が 1 であるとわかる。

問 81. 有理関数 $1/(1+z+z^2)$ の $z=0$ のまわりでのテーラー展開およびその収束半径を求めよ。

命題 8.10 (Ratio Test)**.** ベキ級数 $f(z) = \sum_{n\ge 0} c_n z^n$ において、極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

が存在すれば、それが $f(z)$ の収束半径である。

Proof. $\rho = \lim_{n\to\infty} |c_n|/|c_{n+1}|$ とする。小さい数 $\epsilon > 0$ に対して、k を十分大きくとると、

$$\rho - \epsilon \le \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|} \le \rho + \epsilon$$

となるので、$k = N$, $k = N+1, \ldots, k = n-1$ について掛合わせると

$$(\rho-\epsilon)^{n-N} \le \frac{|c_N|}{|c_n|} \le (\rho+\epsilon)^{n-N}$$

すなわち、

$$\frac{|c_N|}{(\rho+\epsilon)^{n-N}} \le |c_n| \le \frac{|c_N|}{(\rho-\epsilon)^{n-N}}, \quad n > N$$

となって、ベキ級数 $\sum_n c_n z^n$ は、$|z| < \rho - \epsilon$ のとき全体収束し、$|z| > \rho + \epsilon$ のとき発散する。ϵ は好きなだけ小さくとれるので、ρ が収束半径に一致することがわかる。 $\square$

例 8.11. 複素数 α に対して、

$$\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} = \frac{n+1}{\alpha - n} \to -1 \ (n \to \infty)$$

であるから、

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

の収束半径は 1 である。

ベキ級数の定める関数の正則性の応用として、ベキ関数の Taylor 展開の公式（= Newton の公式）を再度証明してみよう。開区間 $(-1,1)$ において、冪級数

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots$$

で定義された関数を $f(x)$ で表す。関数 $f(x)$ は、冪級数の微分の公式により、

$$(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$$

をみたす。一方、ベキ関数 $(1+x)^\alpha$ も同じ微分方程式をみたすので、

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}\right)'=0$$

となる。これから、

$$f(x)=C(1+x)^\alpha$$

となり (問 46)、$x=0$ での値を比較して、$C=1$、すなわち求める公式が得られた。

問 82. ベキ級数の微分を使って、e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$ に対するベキ級数展開の有効性を確かめよ。ヒント：$\cos x$, $\sin x$ はひとまとめにして $\cos x+i\sin x$ を考えると簡単。

Remark . ベキ級数の収束半径の逆数は、

$$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}$$

で与えられ (Cauchy-Hadamard の公式) 、証明も難しくはないが、ここでは、敢えて取り上げない。極限を理解する上での妨げとなるロピタル計算を避けるのと同じ意味合いである。

9 解析関数と冪級数

これまでに見たように、ベキ級数で表示される関数は何度でも微分可能であることから、正則関数が定義域内の各点の周りでテーラー展開可能である事実を次のようにまとめることができる。

定理 9.1. 領域 D の上で定義された複素関数 $f(z)$ に対して、以下の *3* 条件は同値である。

(i) 関数 f は微分可能かつ $f'(z)$ が D で連続である。

(ii) 関数 f は連続であり、D 内の区分的になめらかな閉曲線 C で、D の部分領域の境界になっているものに対して、

$$\int_C f(z)dz=0.$$

(iii) 関数 f は、すべての $c\in D$ の付近でベキ級数表示をもつ。すなわち、正数 $r>0$ と複素数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ で

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}f_n(z-c)^n \qquad \textit{for } |z-c|<r$$

となるものが存在する。

定義 9.2. 上の性質 (iii) をもつ関数（すなわち定義域内の各点の近くでベキ級数表示をもつ関数）を**解析関数** (analytic function) と呼ぶ。

Remark . ベキ級数は収束円の内部で何度でも微分可能であり、導関数について、項別微分の公式が成り立つことから、その係数が $f_n = f^{(n)}(c)/n!$ で与えられること（ベキ級数表示の唯一性）に注意。

上の定理はまた、解析関数が微分可能性によって特徴付けられるということである。たとえば、解析関数の積および合成関数が再び解析関数であることがこのことから即座にわかる。

定理 9.3. 関数 $f(z)$ は、$z = c$ のまわりでテイラー展開可能であるとする。

(i) 関数 $g(z)$ が $z = c$ のまわりでテイラー展開可能であれば、その積 $f(z)g(z)$ も $z = c$ のまわりでテイラー展開可能。

(ii) 関数 $g(w)$ が $w = f(c)$ のまわりでテイラー展開可能であれば、合成関数 $g(f(z))$ は $z = c$ のまわりでテイラー展開可能。とくに、$g(z) = 1/z$ を考えると、$f(c) \neq 0$ であれば、$1/f(z)$ も $z = c$ のまわりでテイラー展開できる。

ベキ級数の具体的な計算では、上の結果を背景にベキ級数の代数演算を直接実行する方法が有効である。その際に、形式的なレベルでの計算が可能であることがしばしば起こるので、ここでまとめておこう。

<u>積と逆数</u> ベキ級数全体は、代数でいうところの環 (ring) をなす。そこでは、収束性を問わない扱いが可能で、形式的ベキ級数 (formal power series) とも称される。ベキ級数の形式的和は明らかであり、その積も $f(z) = \sum_{m\geq 0} f_m z^m$ と $g(z) = \sum_{n\geq 0} g_n z^n$ に対して、

$$f(z)g(z) = \sum_{n\geq 0}(f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + \cdots + f_n g_0)z^n$$

で定めることで、交換法則、結合法則、分配法則が成り立つことがわかる。

問 83. これを確かめよ。

問 84. ベキ級数 $f(z), g(z)$ の収束半径をそれぞれ r, s とすると、$f(z)g(z)$ の収束半径は $\min\{r, s\}$ 以上である。

形式的ベキ級数 $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ に対して、$f(z)g(z) = 1$ をみたす形式的ベキ級数 $g(z)$ が存在するための必要十分条件は、$f_0 \neq 0$ である。このとき $f(z)g(z) = 1$ をみたす形式ベキ級数は丁度一つ存在するので、$g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ と書く。

問 85. 形式的ベキ級数 $1/f(z)$ の存在と唯一性を確かめよ。

例 9.4 (ベルヌーイ数)**.**

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!},$$

$$1 = (1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3!}z^2 + \dots)(B_0 + B_1 z + \frac{1}{2}B_2 z^2 + \dots)$$

を比較して、

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}.$$

問 86.

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}$$

を利用して、$B_{2k+1}=0$ $(k\geq 1)$ を示せ。

問 87. 以下の関数をベキ級数展開し、z について 4 次の項まで求めよ。

$$e^z\sqrt{1+z},\qquad \frac{1}{1+z+z^2},\qquad \tan z.$$

問 88. 等式

$$\tan z=\frac{\cos z}{\sin z}-2\frac{\cos(2z)}{\sin(2z)}$$

利用して、$\tan z$ のテイラー展開をベルヌーイ数を用いて表せ。

<u>合成</u> ベキ級数にベキ級数を代入して新たなべき級数を得る方法が、ベキ級数の**合成** (composition of power series) である。ベキ級数 $f(z)=\sum_{n\geq 0} f_n z^n$ に対して、二重数列 $\{f_l^k\}_{k,l\geq 0}$ を

$$(f(z))^k=\sum_{l\geq 0} f_l^k z^l,\quad f_l^k=\sum_{l_1+\cdots+l_k=l} f_{l_1}\dots f_{l_k}$$

で定めると、$w=f(z)$ をもう一つのベキ級数 $g(w)=\sum_{k\geq 0} g_k w^k$ に代入した結果は、形式的に

$$g(f(z))=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k f_l^k\right) z^l \tag{2}$$

と書ける。ここで k についての和は、一般に無限にわたるので、その収束性が問題となる。ただし、$f_0=0$ の場合は、$f_l^k=0$ $(k>l)$ となるので、形式的な扱いが可能である。

問 89. 恒等式 $e^{\log(1+z)}=1+z$ を形式的冪級数の立場から検証せよ。

さて、収束性の問題に戻って、$f(z)$ の収束半径 ρ_f, $g(w)$ の収束半径 ρ_g がどちらも 0 でなく、$|f_0|<\rho_g$ としよう。また、自明な場合を除くために、$f(z)$ は定数関数でないとする。このとき、$|f|_r=\sum_n |f_n| r^n$ は $r\geq 0$ の強い意味での増加関数となり、$r<\rho_f$ で有限の値を取る。そこで、$R=\sup\{r>0; |f|_r\leq\rho_g\}$ とおくと、$|z|<R$ に対して、$|f(z)|\leq\sum_n |f_n||z|^n<\rho_g$ となり、

$$\sum_{k,l\geq 0} |g_k|\,|f_l^k|\,|z|^l<\infty$$

および (2) が成り立つ。

問 90. ベキ級数 $f(z)=z+z^2$ と $g(z)=\log(1+z)$ の合成である $\log(1+z+z^2)$ の収束半径を上の方法で見積り、得られる最大値を求めよ。また、収束半径を求めよ。

例 9.5.

$$\frac{1}{1+z+z^2}=1-(z+z^2)+(z+z^2)^2-(z+z^2)^3+\cdots=1-z+z^3-z^4+\cdots.$$

問 91. $\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$ を使って $1/(1+z+z^2)$ を部分分数和に分解する方法で冪級数展開を求めてみよ。

例 9.6. Catalan 数の母関数の収束半径と漸近挙動。

10　ローラン展開と留数計算

関数 $f(z)$ が $z \neq a$ で正則であるときにも、積分公式を利用して $z = a$ の付近での関数の様子を調べることができる。そのために、円環 (annulus) $\{r < |z-a| < R\}$ を考えよう。$r < |z-a| < R$ についての Cauchy の積分公式から、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

ここで、$|\zeta - a| = R$ のときには、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

$|\zeta - a| = r$ のときには、

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n\geq 0} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

を使うと、

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n,$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \qquad n \geq 0 \\ c_{-n} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

なる表示が得られる。

これを関数 $f(z)$ の $z = a$ における**ローラン展開** (Laurent expansion) とよぶ。ローラン展開において負冪が現れるとき、a を $f(z)$ の**孤立特異点** (isolated singularity) とよぶ。ローラン展開における負冪の項が無限に続く場合と、有限で終わる場合は、本質的に異なる状況を表す。後者は、逆数関数が特異点のまわりで解析的になる「良い」特異点であるのに対して、前者はそのような形の処理ができない。「良い」特異点のことを**極** (pole) と呼び、負冪の最大指数を極の位数という。

$(z-a)^{-1}$ の係数 c_{-1} を $f(z)$ の $z = a$ における**留数** (residue) とよび、$\mathrm{Res}_a(f)$ と書く。複素数 a が f の特異点でないときは、$\mathrm{Res}_a(f) = 0$ であるが、特異点であっても $\mathrm{Res}_a(f) = 0$ となり得ることに注意。

問 92. 上の計算で積分と級数和の順序を交換してよいことを確かめよ。

例 10.1.

(i) 自然数 n と複素数 a に対して、関数 $\dfrac{e^z}{(z-a)^n}$ の特異点は、$z = a$ の一箇所だけで、その点のまわりでのローラン展開は、

$$e^a \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(z-a)^{k-n}$$

となる。

(ii) 関数 $\dfrac{1}{z^2+1}$ の特異点は、$z=\pm i$ の 2 点で、$z=\pm i$ のまわりでのローラン展開は、それぞれ、

$$-\frac{i}{2}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{4}+\frac{i}{8}(z-i)+\dots,$$
$$\frac{i}{2}\frac{1}{z+i}+\frac{1}{4}-\frac{i}{8}(z+i)+\dots$$

となる。

(iii)「悪い」特異点のまわりでのローラン展開の例として

$$e^{1/z}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^{-n}.$$

問 93. 関数 $\dfrac{e^z}{\sin z}$ の特異点および各特異点における留数を求めよ。

定理 10.2 (留数公式)**.** 関数 $f(z)$ が閉曲線 C 内にちょうど n 個の孤立特異点 $a_1, \dots, a_n$ をもつとき、

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}Res_{a_j}(f)$$

<u>留数計算</u>

例 10.3. 積分

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+2a\sin\theta+a^2}d\theta \qquad (0<a<1)$$

の計算。

Proof.

$$t=\tan\frac{\theta}{2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad d\theta=\frac{1}{1+t^2}dt$$

という置換積分の定石を利用しても計算できるが、ここでは、

$$z=e^{i\theta},\quad \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i},\quad d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

なる変数変換を用いて、

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+2a\sin\theta+a^2}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{1}{(az+i)(z+ia)}dz$$

と書きなおす。ここで、積分域内の特異点は $z=-ia$ だけである。$z=-ia$ の近くでは、$w=z+ia$ とおくと、

$$\frac{1}{(az+i)(z+ia)}=\frac{1}{w(a(w-ia)+i)}=\frac{1}{w}\frac{1}{i-ia^2+aw}=\frac{1}{w}\left(\frac{1}{i-ia^2}+\dots\right)$$

であるから、

$$\mathrm{Res}_{z=-ia}=-\frac{i}{1-a^2}.$$

これから、

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{(az+i)(z+ia)}dz=2\pi i\mathrm{Res}_{z=-ia}=\frac{2\pi}{1-a^2}.$$

□

例 10.4. 積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$$

の計算。

Proof. $\dfrac{1}{x^4+1}$ の部分分数分解を考えて・・・としても可能ではあるが計算は結構大変である。線分 C_1 : $[-R, R]$ と上半円 C_2 からなる閉曲線 C を考えると、$z^4+1 = (z-\zeta)(z-\zeta^3)(z-\zeta^5)(z-\zeta^7)$ $(\zeta = e^{\pi i/4})$ に注意して

$$\int_C \frac{1}{z^4+1}dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=\zeta} + 2\pi i \mathrm{Res}_{z=\zeta^3}.$$

右辺に現れる留数は、

$$\mathrm{Res}_{z=\zeta} = \frac{1}{(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)(\zeta-\zeta^7)} = \frac{1}{4\zeta^3} = -\frac{\zeta}{4},$$

$$\mathrm{Res}_{z=\zeta^3} = \frac{1}{(\zeta^3-\zeta)(\zeta^3-\zeta^5)(\zeta^3-\zeta^7)} = \frac{1}{4\zeta}$$

となるので、右辺の量は、

$$\frac{\pi i}{2}(\zeta^{-1}-\zeta) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

一方、左辺の積分のうち、

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^4+1}dz$$

で、$z = Re^{i\theta}$ なる変数変換を使うと、$|z^4+1| \geq |z^4| - 1 = R^4 - 1$ であるから、

$$\left|\int_{C_2} \frac{1}{z^4+1}dz\right| \leq \frac{|C_2|}{R^4-1} = \pi\frac{R}{R^4-1} \to 0 \quad \text{as } R \to +\infty$$

となって、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を得る。 □

問 94. 留数公式を用いて次の積分を計算せよ。

(i)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(ii)

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1}dx$$

の計算。

例 10.5. 和の公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} - \frac{1}{2a^2}.$$

Proof. 関数 $\pi\cot\pi z$ は、$z=n$ ($n\in\mathbb{Z}$) に一位の極をもち、そこでの留数は 1 であるから、関数 $f(z)$ が実軸の近傍で正則であれば、区間 $[-N,N]$ を囲む細長い積分路 C をとって、

$$2i\sum_{n=-N}^{N} f(n)=\int_C f(z)\cot\pi z dz.$$

とくに、$f(z)$ が有理関数で、$\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$ であるとき、C に大きな積分路 R: $|x+y|+|x-y|=N+\frac{1}{2}$ (N は自然数) を付け加えて、$N\to\infty$ とすれば、R の上で $|\cot\pi z|\le 2$ となるので、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=-\pi\sum(f(z) \text{ の極における } f(z)\cot\pi z \text{ の留数})$$

であることがわかる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}-\frac{1}{2a^2}$$

と書けるので、$f(z)=1/(z^2+a^2)$ に上の公式を適用すればよい。

$z=\pm(N+\frac{1}{2})+iy$ のとき、

$$|\cot(\pi z)|=\frac{|e^{\pi y}-e^{-\pi y}|}{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}\le 1,$$

$z=x\pm iR$ ($R>0$) のとき、

$$|\cot(\pi z)|\le\frac{e^{\pi R}+e^{-\pi R}}{e^{\pi R}-e^{-\pi R}}.$$

□

例 10.6. 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}e^{-|t|a},\quad t\in\mathbb{R},a>0$$

の計算。

より一般に、上半平面（の近傍）で定義された有限個の孤立特異点のみをもつ関数 $f(z)$ で、(i) f は、$\mathbb{R}$ の上に特異点を持たない、(ii) $f(z)=O(1/|z|)$ ($z\to\infty$) であるとき、$t>0$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx=2\pi i\sum_{\Im z>0}\mathrm{Res}_z(e^{itz}f(z))$$

となる。

逆関数 ベキ級数 $f(z)=\sum f_n(z-a)^n$ が、$f_1\ne 0$ を満たせば、その逆関数を $f(a)$ のまわりでのベキ級数として形式的に求めることができる。最初のベキ級数の収束半径が 0 でないときに、そのような逆関数の存在を示そう。

正則関数 $f(z)$ の値が 0 となる点 a のことを f の零点という。零点のまわりでのベキ級数表示は、

$$f(z)=\sum_{k=l}^{\infty} f_k(z-a)^k,\quad f_l\ne 0,l\ge 1$$

の形である。l を零点 a の重複度 (multiplicity) という。このとき、十分小さい $r > 0$ に対して、$f(z)$ は、$|z-a| = r$ の上で、

$$|f(z)| \geq |z-a|^l(|f_l| - |f_{l+1}||z-a| - \dots) = r^l(|f_l| - |f_{l+1}|r - |f_{l+2}|r^2 - \dots) > 0$$

となるので、

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}_a(f'/f) = 2\pi l$$

である。

一般に、有界領域 D に対して、$\overline{D}$ を含む開集合上で定義された正則関数 $f(z)$ は、$f(z) \neq 0$ ($z \in \partial D$) をみたすとすると、$f(z)$ の零点は、$\overline{D}$ 内に集積点をもたない。$\overline{D}$ は、有界閉集合であるから、絞り出し論法により、$\overline{D}$ 内の零点は有限集合となり、

$$\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sharp\{z \in D; f(z) = 0\}$$

が成り立つ。ただし、右辺の零点の個数は、重複度も込めて数えるものとする。

定理 10.7 (逆関数)**.** 解析関数 $f(z)$ が、$f'(a) \neq 0$ をみたすならば、$w = f(a)$ のまわりで定義された解析関数 $g(w)$ で、$g(f(z)) = z$, $f(g(w)) = w$ をみたすもの（g は、f の逆関数と呼ばれる）が存在する。

Proof. 関数 $f(z)$ の $z = a$ のまわりでのベキ級数展開を考えれば、仮定 $f'(a) \neq 0$ から、$f(z) - f(a) \neq 0$ ($< |z-a| \leq r$) であるような $r > 0$ が存在する。そこで、$D = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < r\}$ とおくと、

$$\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z) - f(a)}\, dz = 2\pi i$$

である。一方、$f(z) - w$ は、$z \in \partial D$, $w \in \mathbb{C}$ の連続関数であるから、$\delta > 0$ を小さく取ることで、

$$z \in \partial D, |w - f(a)| < \delta \Longrightarrow f(z) - w \neq 0$$

とできる。このとき、

$$w \mapsto \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

が、$|w - f(a)| < \delta$ で連続であることから、その値は $2\pi i$ で一定で、したがって、$f(z) = w$ となる $z \in D$ が丁度一つ存在する。それを $g(w)$ ($|w - f(a)| < \delta$) と書けば、留数を計算することで

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{z f'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

がわかるので、$g(w)$ は w の連続関数である。さらに、C を $|w - f(a)| < \delta$ 内の単純閉曲線とする時、

$$\int_C \frac{1}{f(z) - w}\, dw = \begin{cases} -2\pi i & \text{if } C \text{ surrounds } f(\partial D), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることから、いずれの場合も

$$\oint_C dw \int_{\partial D} dz \frac{z f'(z)}{f(z) - w} = -2\pi i \int_{\partial D} z f'(z)\, dz = 0$$

となり、$g(w)$ が正則であることがわかる。

さて、$f(g(w)) = w$ から $g'(f(a)) \neq 0$ がわかるので、同じ議論を $g(w)$ に使えば、$g(h(z)) = z, h(a) = f(a)$ となる $z = a$ の付近での正則関数 $h(z)$ が存在する。このとき、z が a に近ければ、$w = h(z)$ が $f(a)$ に近いものであることに注意して、

$$f(z) = f(g(h(z))) = f(g(w)) = w = h(z)$$

を得る。したがって $g(f(z)) = z$ もわかる。

□

冪級数 $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ で $f_1 \neq 0$ であるものに対して、その逆関数に相当する冪級数 $g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^n$ を

$$z = f(g(z)) = \sum_{n \geq 0} f_n \left(\sum_{m \geq 0} g_m z^m \right)^n$$

で定める。

例 10.8.

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}, \ |z| < 1$$

の逆関数の冪級数表示を求め、$\tan z$ のテイラー展開と一致することを確かめる。

問 95. $f(z) = 2z + z^2$ の逆級数 $g(w)$ を求め、それを $\sqrt{1+w}$ の二項展開と比較せよ。

11　一致の原理と解析接続

定数でない解析関数の零点は孤立している。言いかえると、零点集合が定義域の内点に集積しているような解析関数は恒等的に零に等しい。

実際、解析関数 $f(z)$ の (互いに異なる) 零点列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の集積点 a が f の定義域に含まれるとすると、$f(z)$ の $z = a$ のまわりでの冪級数展開

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

は、f の $\{a_n\}$ での値を使って、まず $c_0 = f(a) = \lim_{n \to \infty} f(a_n)$。次に、$c_1 = \lim_{n \to \infty} \frac{f(a_n) - c_0}{a_n - a}$。以下、帰納的に

$$c_m = \lim_{n \to \infty} \frac{f(a_n) - c_0 - c_1(a_n - a) - \dots - c_{m-1}(a_n - a)^{m-1}}{(a_n - a)^m}$$

と決まっていく。

このことはまた、次のようにも解釈される。今、二つの開円板 D_1, D_2 の上で定義された解析関数 $f_1(z)$, $f_2(z)$ があって、ある $a \in D_1 \cap D_2$ の近傍で、f_1 と f_2 が一致しているとすると、$D_1 \cap D_2$ の上で一致し、したがって、$D_1 \cup D_2$ 上の解析関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{if } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{if } z \in D_2 \end{cases}$$

によって、定めることができる。このような操作を繰り返すことによって、解析関数の定義域を広げていく方法を**解析接続** (analytic continuation) という。

例 11.1. 等比級数

$$\sum_{n\geq 0} z^n$$

の収束半径は 1 であるが、これを解析接続すると、$1/(1-z)$ という、$\mathbb{C}\setminus\{1\}$ で定義された解析関数を得る。

問 96.

$$f(z)=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}z^n$$

の解析接続について調べよ。

問 97. 可積分関数 $f(x)$ のコーシー変換 (Cauchy transform) を

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

で定める。

(i) $F(z)$ は、$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ の解析関数である。

(ii) Stieltjes の反転公式

$$2\pi i f(x)=\lim_{y\to 0}(F(x+iy)-F(x-iy))$$

が成り立つ。

(iii) $F(z)$ が、$z=t$ の付近で実軸を越えて解析接続できるならば、$x=t$ の付近で $f(x)=0$ である。

12 対数関数とリーマン面

対数関数 $\log x$ の $x=1$ のまわりでの冪級数展開

$$\log x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\dots$$

の収束半径は 1 であるから、$|z-1|<1$ である複素数 z に対しても

$$\log z=(z-1)-\frac{1}{2}(z-1)^2+\frac{1}{3}(z-1)^3-\dots$$

と定めるのが自然である。

この定義域は、実数に限定すると、$0<x<2$ となって本来全ての正数に対して定義し得る対数関数の一部しかカバーしない。そこで、複素変数の場合にも定義域の拡張を考えたいところである。

天下り的ではあるが、複素平面から半直線 $\{x\in\mathbb{R}; x\leq 0\}$ を除いた残りの領域を D とし、

$$\mathrm{Log} z=\int_1^z\frac{1}{\zeta}d\zeta$$

なる $z\in D$ の関数を考えてみよう。ここで、積分は D 内で 1 から z に向かう経路に関する線積分を意味する。D の上で関数 ζ^{-1} は微分可能であり、さらに D には「穴が開いていない」ことから、積分の値は z だけで決まり経路の取り方によらない。

定理 12.1. 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ で、コーシーの積分定理が成り立つ、すなわち、内部まで込めて D に含まれる閉曲線 C に対して、いつでも

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

が成り立てば、$f(z)$ は解析関数である。

Proof. 実際、D 内の一点 c を勝手に選んだ後、$z \in D$ の関数 $g(z)$ を

$$g(z) = \int_c^z f(\zeta)d\zeta$$

で定めると、これは（局所的に）積分経路の取り方によらず、（すくなくとも局所的には）矛盾なく定義されていて、さらに $g'(z) = f(z)$ であるので、$g(z)$ が従って $f(z) = g'(z)$ も z の解析関数である。 □

命題 12.2. 関数 $\mathrm{Log}z$ は z の解析関数で、$|z-1| < 1$ に対しては上の冪級数表示をもち、さらに $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, -\pi < \theta < \pi)$ と表すとき、

$$\mathrm{Log}z = \log r + i\theta$$

となる。

Proof. まず、一般論から「不定積分」は微分可能でしたがって解析関数を定める。前半は、$0 < x < 2$ に限定して一致の定理を使う。後半は、円弧と線分の組み合わせで線積分を計算する。 □

上の「不定積分」表示をさらに拡張すると、経路の取り方（正確には、そのホモトピー）に依存した「多価関数」が出現する。すなわち、上で導入した対数関数 $\mathrm{Log}z$ を、その定義域を越えて解析接続すると解析接続の「経路」に依存した「関数」

$$\log z = \int_{C:1\to z} \frac{1}{\zeta}d\zeta$$

が得られる。これは、z のみならず、1 から z に到達するまでの経路（のホモトピー）に依存する量なので、正しくは関数と呼べないものではあるが、値の不定性は角の表示の不定性 $2\pi i\mathbb{Z}$ だけであり、関数の様子が「ほぼ決まる」という意味で、「多価関数」(multivalued function) と呼び慣わしている。

例 12.3. 複素平面で、1 から $z = -1$（の付近）へ、半円 $\{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| = 1, \Im\zeta \geq 0\}$ に沿って解析接続して得られる対数関数 $\log z$ は、$z = -1$ のまわりで、

$$\log z = \pi i + \int_0^1 \frac{z+1}{t(z+1)-1}dt$$

という積分表示を持ち、したがって、

$$\pi i - (z+1) - \frac{1}{2}(z+1)^2 - \frac{1}{3}(z+1)^3 - \dots$$

とテイラー展開される。

例 12.4. 正数 $r > 0$ に対して、定積分

$$\int_{-r}^r \frac{1}{x+i}dx$$

の値を求めて見よう。

コーシーの積分定理により、

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{x+i} dx = -\int_C \frac{1}{z+i} dz$$

である。ここで、C は $-i$ を中心とした半径 $\sqrt{r^2+1}$ の円周上を r から $-r$ に反時計廻りに向かう円弧を表す。

円弧 C の開きを表す角度 2θ は、

$$\tan\theta = r$$

を満たすので、

$$\int_C \frac{1}{z+i} dz = 2i\theta = 2i \arctan r$$

となって、これから

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{x+i} dx = -2i \arctan r$$

である。

準備が整ったので、導入部分で述べた「手品」のタネを明かしておこう。複素数 $\zeta \neq -1$ に対して成り立つ

$$1 - \zeta + \cdots + (-1)^m \zeta^m = \frac{1 + (-1)^m \zeta^{m+1}}{1+\zeta}$$

を $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 内の経路で積分すると、

$$z - \frac{1}{2}z^2 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m+1} z^{m+1} = \int_0^z \frac{1 + (-1)^m \zeta^{m+1}}{1+\zeta} d\zeta$$

を得る。ここで、$m = 2n,\ z = i$ を代入すると、

$$i\left(1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right) = \int_0^i \frac{1 + \zeta^{2n+1}}{1+\zeta} d\zeta.$$

右辺の積分は、積分経路を it $(0 \leq t \leq 1)$ に取っておくと、$n \to \infty$ のとき、

$$\int_0^i \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = \log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} i$$

に近づく。

例 12.5. 積分

$$\int_0^{+\infty} x^a F(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_j \mathrm{Res}_{c_j}(z^a F(z))$$

の計算。ただし、$0 < a < 1$, で $F(z)$ は、正半直線 $[0, \infty)$ 上にない有限個の点 $c_1, \ldots, c_n$ と 0 を除いた複素平面上で定義された正則関数で、

$$F(z) = O(1/|z|^2)(z = \infty), \quad zF(z) = O(1)(z = 0)$$

なるもの。（無限遠点で 2 位以上の零点、原点で高々 1 位の極。）

Proof. 小さな半径 r と大きな半径 R の間の円環状の領域から、正半直線 $(0,\infty)$ を含む上下の開き角 $\epsilon > 0$ の扇形の図形を除いた部分を D とすると、D は単連結であるから、D（の近傍）上の正則関数 $z^a = e^{a\log z}$ として、$(-t)^a = e^{\pi ai}$ となる分枝を取って、関数 $f(z) = z^a F(z)$ に留数定理を適用すれば、

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{c_j}(f)$$

となる。この左辺の線積分は、

$$\int_r^R f(\rho e^{i\epsilon})e^{i\epsilon}d\rho + \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta - \int_r^R f(\rho e^{i(2\pi-\epsilon)})e^{i(2\pi-\epsilon)}d\rho - \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} f(re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta$$

であるので、$F(z) = O(1/|z|^2)$ $(z \to \infty)$, $zF(z) = O(1)$ $(z \to 0)$ に注意して極限 $r \to +0$, $R \to +\infty$ を取ると、

$$\int_0^{+\infty} f(\rho e^{i\epsilon})e^{i\epsilon}d\rho - \int_0^{+\infty} f(\rho e^{i(2\pi-\epsilon)})e^{i(2\pi-\epsilon)}d\rho$$

となる。ここで、

$$f(\rho e^{i\beta}) = \rho^a e^{ia\beta}F(\rho e^{i\beta})$$

に注意して、さらに極限 $\epsilon \to +0$ を取ると、

$$(1 - e^{2\pi ia})\int_0^{+\infty} \rho^a F(\rho)d\rho$$

に一致することが判る。 □

例 12.6. 上の公式で、$F(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ と取ると、原点以外の極は $z = 1$ $(n = 1, c_1 = 1$ ということ）であり、$z^{a-1}/(z+1)$ の $z = -1$ における留数は

$$e^{(a-1)\log z}|_{z=-1} = e^{\pi i(a-1)} = -e^{\pi ia}$$

となるので、

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}dx = -2\pi i\frac{e^{\pi ia}}{1-e^{2\pi ia}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

リーマンは、複素平面にこだわる限り多価が避けられない対数関数の「一価関数化」を図るために、「無限小螺旋階段」状の「図形」を導入した。より一般に、いくつかの複素変数を「正則同型」で張り合わせた２次元図形（リーマン面 (Riemann surface) という）を考えて複素関数の「棲息する場所」と考えた。

他の有用な例として、リーマン球面。これは、二つの複素平面、$\mathbb{C}_z$ と $\mathbb{C}_w$ のうち、原点を除いた部分を、関係、

$$w = \frac{1}{z}$$

により張り合わせたもの。位相（空間）としては、重なっている部分の無駄を省けば、$\{z \in \mathbb{C}_z; |z| \leq 1\}$, $\{w \in \mathbb{C}_w; |w| \leq 1\}$ という二つの円板の周囲を上の関係で張り合わせたものと思えるので、球面と同一視できる。このようにして得られるリーマン面をリーマン球面と呼び $\overline{\mathbb{C}}$ と書く。リーマン球面はまた、複素平面 $\mathbb{C}_z$ に、$w = 0$ に対応する点（無限遠点）∞ を付け加えたものと見ることもでき、$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ といった書き表すことも多い。

いずれにしても、リーマン球面はただの球面ではなく、複素数による座標表示を併せ持ったものと理解すべきである。

例 12.7. 領域 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上の解析関数 $1/z^n$ は、リーマン球面から原点を除いた $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ 上の解析関数に拡張できて、$\mathbb{C}_w$-表示では、w^n と表わされる。

例 12.8. 指数関数は、複素平面から $\log z$ の定めるリーマン面（無限螺旋階段）への正則同型を定める。

有理型関数（meromorphic function）とは、$\overline{\mathbb{C}}$ に値を取る複素変数可微分関数のこと。リーマン球面に関連したいくつかの結果を、この入門後の話題として挙げておく。

定理 12.9. $\overline{\mathbb{C}}$ 全体で定義された有理型関数は、有理関数に限る。

問 98. これを示せ。

定理 12.10. リーマン球面をリーマン球面に移す正則全単射は、一次分数変換に限る。

問 99. これを示せ。

定理 12.11. 単連結リーマン面は、リーマン球面、複素平面、単位円板 $\{z\in\mathbb{C}; |z|<1\}$ のいずれかと正則同型になる。

13 最大値原理とその応用

正則関数の冪級数表示を得る際に使った公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

で、$C=\{\zeta\in\mathbb{C}; |\zeta-z|=r\}$（向きは反時計廻り）としてパラメータ表示 $\zeta=z+re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$、を使うと

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})d\theta$$

を得る。これから導かれる不等式

$$|f(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z+re^{i\theta})|d\theta$$

により、もし $|f(z)|$ が、$|f(\zeta)|$ $(|\zeta-z|\le r)$ の最大値になっていたとすると、

$$|f(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z+re^{i\theta})|d\theta\le|f(z)|$$

となって、

$$|f(z+re^{i\theta})|=|f(z)|,\quad \theta\in\mathbb{R}$$

ところが最初の公式は、$f(z)$ が、円周上の点 $\{f(z+r^{i\theta}); 0\le\theta<2\pi\}$ の重心に一致することを主張するので、この円周上の点の集まりは実は一点に集中しており、$f(z)=f(z+re^{i\theta})$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ である。$r>0$ は十分小さい限り任意であるから、$f(\zeta)$ は定数関数である。

まとめると、解析関数 $f(z)$ は定数関数でなければ、定義域の内部で $|f(z)|$ が極大値を取ることはない。

定理 13.1 (maximum modulus principle)**.** 解析関数の絶対値は、定義域の境界で最大値を取る。

この定理は様々な応用を持つ。有名なところでは、初めの方で見た代数学の基本定理の別証明がある。

定理 13.2. 複素数を係数とする多項式で定数でないものは、必ず一次式の積に分解される。

Proof. もし、定数でない多項式関数 $f(z)$ が零点をもたなければ、$1/f(z)$ は複素平面全体で定義された解析関数で、

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{f(z)}=0$$

となるから、最大値原理に反する。 □

補題 13.3. 半円 $\{|z|<r;\Re z>0\}$ の上で定義された解析関数が、

$$\lim_{z\to iy}f(z)=0 \quad \textit{for } y\in(-r,r),$$

をみたせば、恒等的に零に等しい。

Proof. 円全体で連続関数を

$$h(z)=\begin{cases} f(z) & \text{if } \Re z>0,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

で定義すれば、$h(z)$ はコーシーの積分公式

$$\oint_C h(z)dz=0$$

を満たし、したがって解析関数である。一方、$h(z)$ は円の左半分で恒等的に零であるから、円の右半分でも零となる。 □

定理 13.4 (三線定理 (three line theorem))**.** 帯状閉領域 $\overline{D}=\{z\in\mathbb{C};0\le\Re z\le 1$ の上で定義された有界連続関数 $f(z)$ で、$\overline{D}$ の内部で解析的なものに対して、

$$M_x=\sup\{|f(x+iy)|;y\in\mathbb{R}\},\quad 0\le x\le 1$$

とおくと、不等式

$$M_x\le M_0^{1-x}M_1^x,\quad 0\le x\le 1$$

が成り立つ。

Proof. もし、$M_0=$ または $M_1=0$ であれば、前の補題から $f(z)$ は恒等的に零となり、したがって定理の主張は自明なものになる。

そこで、$M_0\neq 0$, $M_1\neq 0$ と仮定する。関数 $F(z)=f(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}$ を考えると、これも帯状閉領域で連続かつその内部で解析的でさらに、

$$|F(z)|=|f(z)|M_0^{\Re z-1}M_1^{-\Re z}$$

は有界であり、

$$|F(iy)|=|f(iy)|M_0^{-1}\le 1,\qquad |F(1+iy)|=|f(1+iy)|M_1^{-1}\le 1$$

となる。そこで、$\lim_{z\to\infty}F(z)=0$ であれば、最大値原理により、$|F(z)|\le 1$ となって、不等式 $|f(z)|\le M_0^{1-\Re z}M_1^{\Re z}$ が得られる。

そうでないときでも、（十分大きい）自然数 n に対して、関数 $F_n(z)=F(z)e^{(z^2-1)/n}$ を考えると、

$$
\begin{aligned}
|F_n(iy)| &= |F(iy)|e^{-(y^2+1)/n} \le |F(iy)| \le 1, \\
|F_n(1+iy)| &= |F(1+iy)|e^{-y^2/n} \le |F(1+iy)| \le 1
\end{aligned}
$$

であり、さらに

$$
|F_n(z)| = |F(z)|e^{-(y^2+1-x^2)/n} \to 0 \quad \text{as } y\to\infty \text{ with } 0\le x\le 1
$$

であるから、$|F_n(z)|\le 1$ がわかり、$n\to\infty$ とすると、

$$
|F(z)| = \lim_{n\to\infty} |F_n(z)| \le 1
$$

となってめでたい。 □

例 13.5. 任意に与えられた自然数 n と正数列 $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$, $c_1,\dots,c_n$ および実数 $0\le x\le 1$ に対して、不等式

$$
\sum_{j=1}^n a_j^x\, b_j^{1-x}\, c_j \le \left(\sum_{j=1}^n b_j c_j\right)^{1-x} \left(\sum_{j=1}^n a_j c_i\right)^x
$$

が成り立つ。

とくに、$b_j=c_j=1$ $(j=1,\dots,n)$ と取れば、

$$
\sum_{j=1}^n a_j^x \le n^{1-x} \left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^x
$$

である。

Proof. 複素数 z に対して、

$$
f(z) = \sum_{j=1}^n c_j a_j^z b_j^{1-z}
$$

と置くと、$z=x+iy$ に対して、

$$
|f(z)| \le \sum_{j=1}^n c_j \left| a_j^{x+iy} b_j^{1-x-iy} \right| = \sum_{j=1}^n b_j c_j \left(\frac{a_j}{b_j}\right)^x = f(x)
$$

であるから、$f(z)$ は $0\le \Re z\le 1$ で有界であり、三線定理を使えば、

$$
|f(x+iy)| \le f(0)^{1-x} f(1)^x, \qquad 0\le x\le 1, y\in\mathbb{R}
$$

となって、とくに $y=0$ と置けば、最初の不等式が得られる。 □

Remark . 上の例の最後の不等式に関連して、

$$
\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^x \le \sum_{j=1}^n a_j^x, \quad 0\le x\le 1
$$

は次のように初等的に示すことができる。

両辺は $a=(a_1,\dots,a_n)$ の同次式であるから、$a_1+\cdots+a_n=1$ に対して、

$$\sum_{j=1}^n a_j^x \geq 1$$

を示せばよく、これは、$0\leq a_j\leq 1$ に注意して、$a_j^x\geq a_j$ を足し合わせると得られる。

例 13.6 (Hölder's inequality)**.** 正数 $p\geq 1$, $q\geq 1$ は関係 $p^{-1}+q^{-1}=1$ を満たすものとする。任意に与えられた自然数 n と複素数列 $z_1,\dots,z_n$, $w_1,\dots,w_n$ に対して、不等式

$$\left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^q\right)^{1/q}$$

が成り立つ。

Proof. 例 6.5 で、$a_j=|z_j|^p$, $b_j=|w_j|^q$ と置いて、$x=1/p$ を考えると、上の不等式が得られる。このとき、a_j, b_j の中に 0 が含まれていても、極限操作で、不等式自体は正しいことに注意。 □

問 100. 上の説明で、極限操作の部分を確かめよ。

付録A　Goursat の定理

導関数の存在から正則性（導関数の連続性）がしたがうことの Goursat による証明の A. Pringsheim による改良版[*32]。領域 D 内の三角形 $\triangle$ に対して、その周囲を $\partial\Delta$ で表すとき、

$$I=\oint_{\partial\triangle} f(z)\,dz \neq 0$$

を仮定して中点分割による絞り出しを行うと相似な三角形の縮小列 $\triangle_k$ で、

$$\left|\oint_{\partial\triangle_k} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|I|}{4^k}$$

となるものが得られる。その極限点を c とし、

$$g(z)=\frac{f(z)-f(c)}{z-c}-f'(c)$$

とおけば、$g(z)$ は D 上の連続関数であり、$\partial\Delta$ の長さを L で表す時、

$$\left|\oint_{\partial\triangle_k} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{\partial\triangle_k} g(z)(z-c)\,dz\right| \leq \max\{|g(z)|; z\in\triangle_k\}\frac{L}{2^{k+1}}\frac{L}{2^k}$$

であるから、

$$|I|\leq \frac{L^2}{2}\max\{|g(z)|; z\in\triangle_k\}.$$

そこで、極限 $k\to\infty$ を考えれば、右辺が $L^2|g(c)|/2=0$ に近づくので $I\neq 0$ と矛盾する。

[*32] E. Hille, Analytic Function Theory, volume I, Ginn and Company, 1959, §7.2 脚注。

あとは、三角形に対する積分定理を経由して原始関数の存在を示し、原始関数の正則性と正則関数の解析性から、もとの関数の解析性が導かれ、とくに導関数の連続性がわかる。

この多角形の場合の積分定理の極限として一般の積分定理を導くことは、位相幾何学的問題点を無視すれば簡単で、被積分関数の一様連続性に注意するだけである。とくに円の場合に積分定理が成り立つので、それから積分公式を経由してベキ級数展開表示に移行しても良い。その辺は、何とでもできるところなので、好みでどうぞといったところ。

付録B　優級数の方法

ベキ級数 $f(z)$ の収束半径についての情報から $1/f(z)$ の収束半径の情報を、コーシーによる優級数の方法で取り出してみよう。この方法は、形式的に計算してからその意義を考えるという意味でオイラー的であり、ややもすれば論理が過剰に強調されがちな現代の数学の中においては、貴重な経験の機会と言えようか。

ベキ級数 $F(z) = \sum F_n z^n$ が $f(z)$ の優級数 (majorant) であるとは、$|f_n| \leq F_n$ $(n \geq 0)$ が成り立つこと。

ベキ級数 $f(z)$ の収束半径を $\rho > 0$ とすれば、$f_n = O(R^{-n})$ $(0 < R < \rho)$ である。したがって、$|f_n| \leq M/R^n$ $(n \geq 1)$ となる $M > 0$ が存在する。このとき、$F(z) = |f_0| + \sum_{n\geq 1} Mz^n/R^n$ が、$f(z)$ の majorant になる。$g(z)$ を定める漸化式を利用して $g(z)$ の majorant $G(z)$ を具体的に求め、それにより、$g(z)$ の収束域についての情報を得よう、というのが majorant の方法である。$f(z)$ の代わりに $f(z)/f_0$ を考えれば十分なので、以下、$f_0 = 1$ と仮定する。このとき、不等式

$$|g_n| \leq |f_1||g_{n-1}| + \cdots + |f_{n-1}||g_1| + |f_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{R^k}|g_{n-k}|, \quad g_0 = f_0 = 1$$

が成り立つので、$g(z)$ の majorant $G(z) = \sum_{n\geq 0} G_n z^n$ を、$G_0 = 1$,

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{R^k} G_{n-k}, \quad n \geq 1$$

で帰納的に定めることができる。

問 101. 不等式 $|g_n| \leq G_n$ が成り立つことを n についての帰納法で確かめよ。

ここから、母関数の計算により $G(z)$ を具体的に求めてみよう。和の順序を形式的に交換すれば、

$$\begin{aligned} G(z) - 1 &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{l} \frac{M}{R^k} G_{l-k} z^l = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty} \frac{M}{R^k} G_{l-k} z^l = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M}{R^K} G_j z^{j+k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{R^k} z^k \sum_{j=0}^{\infty} G_j z^j = \frac{Mz}{R-z} G(z) \end{aligned}$$

であるから、これを $G(z)$ についての方程式と思って解くと、

$$G(z) = \frac{R-z}{R-(M+1)z}$$

を得る。ここまでは形式的な計算であったが、具体的に得られた $G(z)$ の形を見ると、べき級数 $G(z)$ は、$|z| < R/(M+1)$ で絶対収束し、のみならず ($|z| < R$ にも注意)、$G(z)$ を求める際に行った形式的計算のところがすべて絶対収束級数に対する和の順序交換という形で成り立ち、したがって、$g(z)$ の収束域が $|z| < R/(M+1)$ を含むことが分かった。

問 102. ベルヌーイ数の母関数における $R/(M+1)$ を最大化した値は、$6/5$ ($R=3$, $M=3/2$) である。この値は、収束半径 2π よりも大分小さい。

本文では、ベキ級数の代入によって新たなベキ級数が得られることを、正則関数の合成とそのテイラー展開として理解した。ここでは、優級数の方法により、ベキ級数のみの処理方法を与えよう。すなわち、$f(z)$ の収束半径が 0 でなく、f_0 が $g(z)$ の収束円の内部にある場合に、

$$h_l = \sum_{k\geq 0} g_k f_l^k$$

は絶対収束し、ベキ級数 $h(z) = \sum_{l\geq 0} h_l z^l$ の収束半径も 0 でないことを示す。

まず、逆数の際に見たように、$R>0$ が f の収束半径よりも小さければ、$|f_n| \leq M/R^n$ $(n\geq 1)$ となる $M>0$ が存在する。すなわち、$F(z) = |f_0| + \sum_{n\geq 1} Mz^n/R^n$ は、$f(z)$ の優級数である。そこで $|z|<R$ に対しては、

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n||z|^n \leq |f_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M|z|^n}{R^n} = |f_0| + \frac{M|z|}{R-|z|}$$

であるから、これが $g(z)$ の収束半径 ρ よりも小さい時、すなわち

$$|z| < R\left(1+\frac{M}{\rho-|f_0|}\right)^{-1} \tag{3}$$

である時、不等式

$$\sum_{l\geq 0} |f_l^k||z|^l \leq \sum_{l\geq 0} F_l^k |z|^l = \left(|f_0| + \sum_{n\geq 1}\frac{M}{R^n}|z|^n\right)^k = \left(|f_0| + \frac{M|z|}{R-|z|}\right)^k$$

が成り立つ。したがって、

$$\sum_{k,l\geq 0} |g_k||f_l^k||z|^l \leq \sum_{k\geq 0} |g_k| \left(|f_0| + \frac{M|z|}{R-|z|}\right)^k < \infty$$

となることから、各 $l\geq 0$ について、

$$h_l = \sum_{k\geq 0} g_k f_l^k$$

が絶対収束し、

$$\sum_{l\geq 0} |h_l||z|^l \leq \sum_{k\geq 0} |g_k| \left(|f_0| + \frac{M|z|}{R-|z|}\right)^k < \infty$$

であるとわかる。

このとき、絶対収束する二重級数

$$\sum_{k,l\geq 0} g_k f_l^k z^l$$

の和の順序を変えることで、等式

$$\sum_{l=0}^{\infty} h_l z^l = \sum_{k=0}^{\infty} g_k f(z)^k$$

条件 (3) の下で成り立つこともわかる。

問 103. ベキ級数の逆元の収束域については、合成関数の結果を適用することも可能である。具体的には、$\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} \varphi_n z^n$ が $\varphi_0 \neq 0$ であれば、

$$\frac{1}{\varphi(z)} = g(f(z)), \quad g(z) = \frac{1}{1+z}, \quad f(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi_0}{\varphi_0}$$

と見る。このとき、合成関数の収束域についての評価式が、逆元の収束域の評価式に一致することを確認する。

問 104. ベキ級数 $f(z) = z + z^2$ と $g(z) = \log(1+z)$ の合成である $\log(1+z+z^2)$ の収束半径を上の方法で見積り、得られる最大値を求めよ。

最後に、ベキ級数に対する逆関数の存在を優級数を使って示そう。

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^k$$

の逆関数 $g(z)$ の収束半径について。

$$g(z)^k = \sum_{l\geq k} g_l^k z^l, \quad g_l^k = \sum_{l_1+\cdots+l_k=l} g_{l_1}\cdots g_{l_k}, \quad g_l^1 = g_l, \quad g_l^l = g_1^l = 1$$

を使って $f(g(z))$ を計算すれば、

$$-g_l = \sum_{k=2}^{l} f_k g_l^k \quad (l \geq 2).$$

ここで、g_l^k $(k \geq 2)$ が、$g_2, \dots, g_{l-1}$ の正係数多項式 $G_l^k(g_2, \dots, g_{l-1})$ であることに注意。

$$G_l^l = 1, \quad G_l^{l-1} = (l-1)g_2, \quad G_l^{l-2} = (l-2)g_3 + \binom{l-2}{2} g_2 g_3, \quad \cdots$$

$$G_l^2 = 2g_{l-1} + g_2 g_{l-2} + \cdots + g_{l-2} g_2.$$

したがって、$|f_k| \leq F_k$ $(k \geq 2)$ であるとき、正数列 G_l $(l \geq 2)$ を

$$G_l = \sum_{k=2}^{l} F_k G_l^k(G_2, \dots, G_{l-1})$$

で定めると、

$$|g_l| \leq G_l$$

である。さらに、$F_k = M/R^k$ $(k \geq 2)$ である場合を考えると、

$$\begin{aligned}
G(z) - z = \sum_{l=2}^{\infty} G_l z^l &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{l} \frac{M}{R^k} G_l^k(G_2, \dots, G_{l-1}) z^l \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{M}{R^k} G_l^k(G_2, \dots, G_{l-1}) z^l \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M}{R^k} \left(z + \sum_{l\geq 2} G_l z^l \right)^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M}{R^k} G(z)^k \\
&= \frac{M}{R} \frac{G(z)^2}{R - G(z)}.
\end{aligned}$$

すなわち、形式的べき級数 $G(z) = z + \sum_{l\geq 2} G_l z^l$ は、二次方程式

$$(M+R)G(z)^2 - R(z+R)G(z) + R^2 z = 0$$

をみたす。これから、

$$G(z) = \frac{R(z+R) - R^2\sqrt{1 - 2(1+2M/R)(z/R) + (z/R)^2}}{2(M+R)}$$

という表示を得る。これから、$G(z)$ の収束域 D は、

$$|2(R+2M)z - z^2| < R^2$$

を含むことがわかる。とくに、$|z| \leq R + 2M$ という制限の下に、上の不等式を強く評価すれば、D は

$$|z| < \frac{R^2}{R+2M}$$

を含むことがわかるので、$G(z)$ の収束半径は $R^2/(R+2M)$ 以上であるとわかる。

問 105. $G(z)$ の収束半径を求めよ。

問 106. $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ の逆関数をベキ級数で表し、その収束半径を求めよ。また、上で与えた見積り $R^2/(R+2M)$ の最大値を求め、これと比較せよ。

付録C　道の道とすべきは

日常語で曲線というときは、なめらかなものを指すようで、折れ線を曲線という人は稀であろうが、数学の用語としては、ジグザグした動きもすべて曲線 (curve) ということが多い。本文では、その点に配慮した経路 (path=道) という言葉も使ってきたのであるが、そこでは、実用的ではあるが一方で人為的にも思える「区分的に滑らか」という性質を仮定していた。この余計とも思われる条件を取り除いたらどうなるかは、誰しも気になるところであろう。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の運動 (motion) とは、閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像 ϕ をいう。2 つの運動が同値であるとは、連続で向きを保つパラメータの変換で相互に移り合えることを指す。運動の同値類を $\mathbb{R}^n$ における道 (みち) といい、運動 ϕ の定める道を $[\phi]$ で表す。数学の用語としては、道のことを曲線と称することが多いのであるが、日常用語の曲線に近いのは、$[\phi]$ よりもむしろその像 $\phi[a,b]$ の方である。道 $C = [\phi]$ に対して、パラメータの向きを変えることで得られる道を $-C = -[\phi]$ で表す。

運動 ϕ が単純 (simple) であるとは、$\phi(s) = \phi(t)$ $(a \leq s < t \leq b)$ となるのは、$s = a$, $t = b$ に限る場合をいう。また、運動が閉じているとは、$\phi(a) = \phi(b)$ であること。これらの運動に関する性質は、パラメータの取替えで不変であることから、道に対する性質でもある。パラメータ表示に C^1 の意味での滑らかさを仮定し、さらに向きを保つパラメータの取替え $t = h(\tau)$ $(\alpha \leq \tau \leq \beta)$ およびその逆に同様の滑らかさを要求して[*33]得られる同一視（同値類）のことを C^1 道と呼ぶ。

運動 ϕ に対して、その全変動 (total variation) を

$$\sup\{\sum_{j=1}^{l} |\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})|; a = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = b\}$$

[*33] 言いかえると、h' の連続性と正値性 $h'(\tau) > 0$ $(\alpha \leq \tau \leq \beta)$ を要求して

で定める。ここで、$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $|x|=\sqrt{(x_1)^2+\cdots+(x_n)^2}$ は x の長さを表す。運動 ϕ の全変動は、パラメータのとり方に依らないので、道 $C=[\phi]$ で定まる量である。これを $C=[\phi]$ の道のりと呼び $|C|$ で表す。

命題 C.1. 道 C が区分的に滑らかな関数 ϕ で表わされるとき、

$$|C|=\int_a^b\left|\frac{d\phi}{dt}\right|\,dt.$$

さて、道についてのイメージがわいたであろうか。

例 C.2. 関数

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$$

のグラフとして実現される曲線は、パラメータ表示 $\phi(t)=(t,f(t))$ $(t\in\mathbb{R})$ により、なめらかな道となっているのであるが、x 軸と交点が原点付近に集中して繰り返し現れることに注意しよう。なめらかな道とて侮れないということである。

他に、半径 $r>0$ の円に外から巻き付く曲線

$$\phi(t)=(r+e^{-t})(\cos(at+b),\sin(at+b))$$

のようなものもある。これを、パラメータの範囲が有限閉区間でないという理由で、除外してよいものかどうか。

上の例で $r=0$ とおけば、原点に収束する曲線を表すことになるが、ここで新たなパラメータ $s=e^{-t/2}$ を導入して書きなおすと、

$$\varphi(s)=s^2(\cos(-2a\log s+b),\sin(-2a\log s+b)),s>0$$

という表示を得る。これは、$s=0$ まで、なめらかに拡張できるので、$0\leq s\leq 1$ に限定すれば、原点と半径 1 の円周上の点 $(\cos b,\sin b)$ とを結ぶなめらかな道 C_b を得る。曲線族 C_b $(0\leq b<2\pi)$ は、原点以外に共有点を持たないので、例えば、C_0 と C_π をつなげることで区分的になめらかな道を得る（巴曲線）。だんだん、不安になってこないか。

さらに、連続性だけを仮定した曲線の例として、カントル関数と呼ばれる連続関数のグラフを取り上げよう。[*34]これは、本来、集合・位相の中で扱うべき大事な内容であるが、幾何と解析の境界に位置する話題でもあり、取り上げられることは稀であろうか。困ったことである。

自然数 N に対して、有限集合 $\{0,1,\dots,N-1\}$ を値にとる数列全体を N^∞ という記号で表す。2つの数列 $a=(a_n)$, $b=(b_n)$ は、$a_n=b_n$ となる $n\geq 1$ が多いほど「近い」とみなすことで、コンパクト位相空間となる。さらに、N^∞ から閉区間 $[0,1]$ への連続な全射を、

$$[a]_N=\sum_{k=1}^{\infty}N^{-k}a_k$$

で定めることができる。3^∞ の閉部分集合 $\{(2a_n);(a_n)\in 2^\infty\}$ の像がカントル集合 (Cantor set) と呼ばれるものであり、数 $0\leq t\leq 1$ を 3 進展開した際に、1 という数字が現れないもの全体となっている。

[*34] もう少し詳しい説明は、予備知識のところで挙げた URL 参照。

３進展開を利用して、この Cantor 集合の上だけで「増加」する閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 (Cantor function) を作ってみよう。３進実数 $c = [c_1c_2\dots]_3$ に対して、２進実数 $f(c)$ を次のように定める。$c \notin C$ のときには、$n \geq 0$ を「$c_j \neq 1$ for $j \leq n$ and $c_{n+1} = 1$」であるように選び、

$$f(c) = \left[\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_n}{2}1\right]_2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

とおく。$c \in C$ のときには、$c_j \neq 1$ for $j \geq 1$ に注意して、

$$f(c) = \left[\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\right]_2 = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{2^{j+1}}$$

とおく。そうすると、(i) f は単調増加連続関数で、(ii) $[0,1]\setminus C$ の上では微分可能で、$f'(x) = 0$ である。そのグラフは、悪魔の階段 (the devil's staircase) とも呼ばれ、曲線の長さを計算すると、2 であることがわかる。一見、隙間だらけのように見えて、天網恢恢疎にして漏らさず、といったところ。

こんなものでは済まない連続曲線。単純性を犠牲にすれば、こんなこともできる。カントル集合が 2^∞ と同相であることに注目して、偶数項と奇数項に組み分けする同相写像 $2^\infty \cong 2^\infty \times 2^\infty$ を経由することで、連続な全射 $C \to [0,1]\times[0.1]$ を得る。さらに $[0,1]\setminus C$ が、可算個の開区間の分割和になっていることに注意すれば、これを $[0,1]$ まで連続に拡張できることがわかる。ということで、道 $[\phi]$ で、その像が正方形 $[0,1]\times[0,1]$ すべてを埋め尽くすものが得られた。こういった一連の埋め尽くし曲線は、最初の発見者にちなんで、ペアノ曲線 (Peano curve) と呼ばれる。[*35]

世にいわれるジョルダンの曲線定理「単純閉曲線は、平面を２つの領域に分ける」が、直感的に明らかなどとても言えた代物でないことが実感できよう。

付録D　線積分のギザギザ近似

いわゆるグリーンの定理[*36]を直感に訴える形で導くことは難しくない、微分積分の公式を使うだけなので。ただ、その証明となると、そもそも定式化そのものがそれなりに鬱陶しく、面倒なものである。最初の理解としては、そこまでこだわる必要もなく、ほどほどでお茶を濁すのが大人の知恵というものであるが、運悪く気になってしまった人のみならずとも、線積分の積分経路に関する連続性を認識しておくのも悪くないと思うので、積分定理と併せて少しだけ補足しておこう。

まず、領域 D の境界 ∂D が区分的に滑らかであるということの定義を述べよう。これが既にして面倒である。点 p が D の境界点であるとは、p のどのような近傍 $|z-p| < r$ を取ってきても、近傍には、D の点と D 以外の点が混在することをいう。形式的に書けば、

$$\forall r > 0, \exists z \in D, \exists z' \in \mathbb{C}\setminus D, |z-p| < r,\ |z'-p| < r.$$

境界点全体を ∂D で表して、D の境界 (boundary) と呼ぶ。。そこで、∂D が区分的に滑らかであるということを、各境界点 $p \in \partial D$ に対して、次のいずれかが満たされることと定義する。

[*35] できるだけ長く細かくした迷路といったらよいか。http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve を見よ。

[*36] V.J. Katz, The History of Stokes' Theorem, Mathematics Magazine, 52(1979) によれば、ベクトル解析における積分定理の名称については、いろいろな経緯の下、不適切な呼び方が定着してしまっているということである。グリーンの定理および線積分の最初の出処は、コーシーの１８４６年の論文であり、いわゆるベクトル解析の定式化に先立つこと５０年以上も前のことであった。一方、Georg Green が１８２８年に論じたのは、ベクトル解析における発散定理に関係するもので、今ある形の発散定理自体は、Michael Ostrogradsky の１８２６年の論文による。Stokes の定理の名称に至っては、さらに混線気味で、正しくは、Kelvin の定理と呼ぶべきものであるらしい。

(i) 境界が点 p の付近で滑らかな曲線で表される場合。点 p を正則点と呼ぶ。適当な座標の下、境界が x 軸の一部、D が上半平面の一部として表される。

(ii) 境界が、点 p の付近で区分的に滑らかであり、p がその区分点である場合。境界は、p を端点とする二本の滑らかな曲線からなる。このとき p を特異点と呼ぶ。特異点は、さらに 2 つの場合に分けられる。点 p を原点に写す適当な座標の下、p の近傍と D との共通部分が第一象限によって切り取られる原点の近傍表される場合と、原点で実軸に接する 2 つの曲線（それぞれ第一象限と第四象限内にある）の間の領域で表される場合。

この定義のうち、正則点付近での記述で現れた x 軸の正の向きを境界を表す曲線の向きと定める。領域 D が有界であるとき、∂D は有限個の単純閉曲線からなること、境界の特異点は有限個であることに注意。

さて、区分的になめらかな境界をもつ有界領域 D にその境界を合わせた集合 $\overline{D}$ 上で定義されたベクトル場 $F(x,y)\mathbf{i} + G(x,y)\mathbf{j}$ に関する積分定理とは次のようなものである。

$$\int_{\partial D} (F(x,y)dx + G(x,y)dy) = \int_D \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right) dxdy.$$

ここで、左辺は、ベクトル場 $F\mathbf{i} + G\mathbf{j}$ の曲線 ∂D に沿った線積分と呼ばれるもので、∂D の区分的になめらかなパラメータ表示 $(x(t), y(t))$ $(a \leq t \leq b)$ を使って、

$$\int_{\partial D} (F(x,y)dx + G(x,y)dy) = \int_a^b \left(F(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + G(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt$$

で定められる。また、右辺に現れる偏導関数は、D 上で存在し連続かつ $\overline{D}$ まで連続に拡張できるものとする。

まず、積分定理の右辺に現れる二重積分がリーマン和の極限として意味をもつことから確かめよう。

補題 D.1. 滑らかな曲線は、2 次元的に無視できること。区分的になめらかな境界 ∂D をもつ有界領域 D に対して、$\overline{D} = D \cup \partial D$ 上の連続関数はリーマン積分可能である。

Proof. 連続関数を領域 D の上でリーマン積分する際に生じる不連続部分は、境界に由来するので、そこでの変動量がいくらでも小さくなることがわかれば良い。[*37] そのためには、滑らかな平面曲線 $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ に対して、$\phi[a,b]$ を覆う 2 次元閉区間の集まり $R_1, \cdots, R_n$ を適切に選ぶことで、$|R_1| + \cdots + |R_n|$ を好きなだけ小さくできればよい。これを見るために、$M = \max\{|\phi'(t)|; a \leq t \leq b\}$ とし、分割 $\Delta : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ において、

$$|\phi(t) - \phi(t_j)| \leq M|t - t_j|, \quad t \in [t_{j-1}, t_j]$$

であることに注意し、R_j として、$\phi(t_j) \pm M(t_j - t_{j-1})(1,1)$ を対角点とする正方形を取れば、まず $\phi[t_{j-1}, t_j] \subset R_j$ であり、

$$\sum_{j=1}^n |R_j|^2 = \sum_{j=1}^n 4M^2 (t_j - t_{j-1})^2 \leq 4M^2 |\Delta| \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = 4M^2 |\Delta| (b - a)$$

も $|\Delta| = \max\{t_j - t_{j-1}; 1 \leq j \leq n\}$ とともに好きなだけ小さくできる。 □

積分定理が成り立つことの素朴な理由は、微分して積分の公式を使った次の計算による。

$$\int_a^b F(x, \psi(x))\, dx - \int_a^b F(x, \varphi(x))\, dx = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F_y(x,y)\, dydx = \int_{a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)} F_y(x,y)\, dxdy.$$

[*37] リーマンによる積分可能条件の重積分版である。

一般の場合は、この計算ができるように D を分割すれば良い、ということであるが、境界に $x = y^2 \sin(a/y)$ のような曲線が現れると分割が有限ではすまなくなり、領域積分・線積分に関する近似の議論が避けられず、それは意外と面倒なものである。

ここでは、コーシーの積分定理を示した際に行った計算を拡張する形でその証明を与えておこう。

正方形領域 $R = [0,1] \times [0,1]$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への C^1 写像 $\varphi : (s,t) \mapsto z(s,t)$ で、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}$$

が存在し連続であるものを考え[*38]、各 $0 \leq s \leq 1$ に対して、曲線 C_s を $z(s,t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ で定める。

このとき、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_{C_s} f(z)\,dz &= \frac{d}{ds}\int_0^1 f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial t}\,dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial t}\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}\,dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}\,dt + \int_0^1 f(z(s,t))\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}\,dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}\,dt + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial s}\right)dt - \int_0^1 \frac{\partial f(z(s,t))}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(s,t)}\,dt + f(z(s,1))\frac{\partial z}{\partial s}(s,1) - f(z(s,0))\frac{\partial z}{\partial s}(s,0)
\end{aligned}$$

となるので、$0 \leq s \leq 1$ について積分すれば、

$$\int_{\varphi(\partial R)} f(z)\,dz = \int_R \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(s,t)}\,dsdt.$$

そこで、もし、φ が R の内部から領域 D の上への変数変換を与え、φ の ∂R への制限が D の区分的になめらかな境界を与えるならば、重積分の変数変換公式[*39]により、

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}dz = 2i\int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy.$$

両辺の実部を比較すると、積分定理

$$\int_{\partial D}(udx - vdy) = -\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy$$

を得る。実用的にはこれで十分であろうが、区分的にならめらかな境界をもつ有界領域 D を有限分割することで、この φ で表される場合に帰着させられるかどうかは、明らかとは言いがたい。もうひと頑張りが必要である。

コーシーの積分定理の証明では、二重積分の項が現れないこともあり、積分経路を多角形近似することで処理したのであるが、ここでは、二重積分のリーマン和による近似に配慮して、座標軸に平行な折れ線による近似を考えよう。

まず、なめらかな曲線 $C : z(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ と点 c を結んだ放射写像 $\varphi : (s,t) \mapsto sz(t) + (1-s)c$ の場合は、

$$\frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(s,t)} = s\overline{(z(t)-c)}\frac{dz}{dt} - s(z(t)-c)\frac{d\overline{z}}{dt}$$

*38 $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}$ であることに注意。

*39 この証明がまた面倒であるが、行列の LU 分解の変数変換版を用意して処理するのが比較的簡明。

より、

$$\left|\int_C f(z)\,dz - \int_L f(z)\,dz\right| = \left|\int_R \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(s,t)}\,dsdt\right| \leq \left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\|_{\varphi(R)} \int_0^1 |z(t) - c| \left|\frac{dz}{dt}\right| dt.$$

ここで、L は、線分 $[z(0), c]$, $[c, z(1)]$ をこの順番でつないだ折れ線を表し、

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\|_{\varphi(R)} = \max\{\left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\varphi(s,t))\right|; 0 \leq s, t \leq 1\}$$

である。

さて、区分的になめらかな境界をもつ有界領域 D に対して、境界 ∂D の区分的になめらかなパラメータ表示 $z(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ を用意し、すべての特異点を含むように、境界 ∂D の分点 $z_0 = z(0), z_1 = z(t_1), \ldots, z_{n-1} = z(t_{n-1})$ を選び、複素数 c_j $(1 \leq j \leq n)$ を $z_j - c_j \in i\mathbb{R}$, $z_{j-1} - c_j \in \mathbb{R}$ で定める（ただし、$z_n = z_0$ とおく）。$|z_{j-1} - c_j| \leq |z_j - z_{j-1}|$, $|z_j - c_j| \leq |z_j - z_{j-1}|$ に注意。$\partial D = C_1 + \cdots + C_n$ と分割し、各 C_j を近似する座標軸と平行または垂直な折れ線を L_j で表し、$L = L_1 + \cdots + L_n$ と置けば、

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\,dz - \int_L f(z)\,dz\right| &\leq \sum_{j=1}^n \left|\int_{C_j} f(z)\,dz - \int_{L_j} f(z)\,dz\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |z(t) - c_j| \left|\frac{dz}{dt}\right| dt \\ &\leq \Delta \left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\| |\partial D|.\end{aligned}$$

ここで、

$$\Delta = \max\{|z(t) - c_j|; 1 \leq j \leq n, t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$$

は、関数 $z(t)$ の一様連続性により、分点を適切に選べば、0 に近づけることができる一方で、L で囲まれた領域を D_L で表せば、二重積分の定義から、

$$\lim_{\Delta \to 0} \int_{D_L} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy = \int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy$$

が成り立つ。$L = \partial D_L$ に対しては、素朴な計算により積分定理が成り立つので[*40]、以上のことから、区分的になめらかな境界をもつ場合の積分定理が得られた。

もういちど要点をふりかえると、区分的に滑らかな線積分が座標軸的折れ線で近似（ギザギザ近似と呼ぼう）できるかどうかが問題で、その証明には、積分定理の少し特殊な場合が必要であったということである。したがって、線積分をギザギザ近似して Green の定理を得るという説明は、そのままでは、トートロジーに陥ってしまうことになる。線積分の近似だけであれば曲線の長さが近似される折れ線を使えばよいのであるが、今度は、近似折れ線が単純とは限らず、二重積分の近似も確かめなければならず、その処理が面倒となる。痛し痒しといったところ。

問 107. 線積分のギザギザ近似に関連して、

$$|C| = \lim_{\Delta \to 0} |L|$$

が成り立つかどうか考えよ。

[*40] ここの部分の厳密な議論については、Lang の本の IV, §3 にあるアルティンの方法を参照。

付録E　Riemann-Stieltjes 積分

本文で述べた線積分と曲線の長さの計算公式について補足しよう。複素数値連続関数 $f(t)$ $(a \leq t \leq b)$ と正数 $\delta > 0$ に対して、

$$H_\delta = \max\{|f(s) - f(t)|; |s - t| \leq \delta\}$$

とするとき、$\lim_{\delta\to 0} H_\delta = 0$ が成り立つ。[*41] これは、関数の連続性の性質を強めた形になっており、一様連続性 (uniform continuity) と称する。ここでは、これを認めた上で、2つの計算公式を導く。

そのために、なめらかな曲線 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ のパラメータ区間の分割 $\Delta : a = t_1 < \cdots < t_n = b$ を考え、$z_k = z(t_k)$, $|\Delta| = \max\{t_k - t_{k-1}; 1 \leq k \leq n\}$ とおく。このとき、

$$|z_k - z_{k-1} - z'(t_k)(t_k - t_{k-1})| = \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (z'(t) - z'(t_k))\,dt \right| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |z'(t) - z'(t_k)|\,dt \leq H_{|\Delta|}(t_k - t_{k-1}) \quad (4)$$

より

$$\left| \sum_{k=1}^n f(z_k)\Big(z_k - z_{k-1} - z'(t_k)(t_k - t_{k-1})\Big) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(z_k)| H_{|\Delta|}(t_k - t_{k-1}) \leq (b-a)\|f\| H_{|\Delta|} \to 0$$

であるから、

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n f(z(t_k)) z'(t_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b f(z(t)) z'(t)\,dt.$$

また、(4) から導かれる

$$|z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) - H_{|\Delta|}(t_k - t_{k-1}) \leq |z_k - z_{k-1}| \leq |z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) + H_{|\Delta|}(t_k - t_{k-1})$$

を k について加えると、

$$\sum_{k=1}^n |z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) - (b-a)H_{|\Delta|} \leq \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq \sum_{k=1}^n |z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) + (b-a)H_{|\Delta|}$$

となり、これから

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n |z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b |z'(t)|\,dt$$

もわかる。

[*41] 例えば、http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/set/real.pdf を見よ。