複素解析入門

山上 滋

平成22 年5 月25 日

<u>オイラーの公式</u>

　実数 θ に対して、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

なる関係式を**オイラーの公式** (Euler's formula) とよぶ。

　これは、複素指数関数の定義式と思うこともできるが、指数関数・三角関数の冪級数展開 (いわゆるテイラー展開) を複素数に拡張した公式とみることもできる。それぞれを θ の関数と思って、単振動の微分方程式を考察してみてもよい。

　関数の変数を複素数にまで拡張することにより、指数関数・三角関数は一つの実体の二つの投影であるという認識に到達する。

　このことは、単なる数学的な形式にとどまらず、自然の本質に深く関わっていることは、量子力学の教えるところである。

　その神秘的ともいえる調和の世界は、初等的な級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

の値を考察することからでもうかがい知ることができる。

　和をとる前の数列 $\{1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots\}$ の**母関数** (generating function)

$$f(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots$$

を求めてみよう。関数 $f(t)$ を微分すると、

$$f'(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \frac{1}{t+1}$$

となるので、これを積分して、

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{t+1}dt = \log(x+1).$$

とくに、$x = 1$ を代入すると

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

なる公式が得られる。

つぎに、$x = i$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(i) = 1(i) - \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{3}(-i) - \frac{1}{4}(1) \\ + \frac{1}{5}(i) - \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{7}(-i) + \dots \end{aligned}$$

$$= i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right).$$

他方、

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$$

であるから、

$$f(i) = \log(i+1) = \log\sqrt{2} + \log e^{\pi i/4} = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}i$$

と計算すれば、

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

なるさらに意外な公式も得られる。

こういったなにかしら手品のトリックにも似た雰囲気をただよわせる複素数の数学の入り口付近をのぞいてみようというのが、この講義の主旨である。

問 1. 上の 2 つの公式の妥当性を電卓あるいは計算機を使って確かめよ。(収束のスピードが遅いので、最低、複数項をまとめて計算すべきである。また計算実験であるから誤差の評価も考察しなくてはいけない。)

1　級数の収束

級数の収束は、

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

であることからもわかるように数列の収束に過ぎないのであるが、一方でまた級数特有の性質というものもある。後ほど繰り返し使われる基本的な部分を少し一般的に述べておこう。

正 (または 0) の数の集まり $\{a_i\}_{i\in I}$ に対して、次の二条件を満たす $A \in [0,\infty]$ がただ一つ定まる。これを $A = \sum_{i\in I} a_i$ と書いて、$\{a_i\}_{i\in I}$ の**和**と呼ぶ。

(i) 任意の有限部分 $\{a_i\}_{i\in F}$ に対して、$\sum_{i\in F} a_i \leq A$ をみたす。

(ii) A は、この性質をもつ最小の数（または無限大）である。

正数の和は、定義からして、和を取る順序のようなものに無関係である（このことを強調して総和と呼ぶこともある)。さらに、次の分割和の等式が成り立つ：添え字集合 I が $I = \bigsqcup_{n\geq 1} I_n$ と分割表示されるならば、

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right).$$

総和はまた単調性を有する：同じ添字集合をもつ正数の集まり $\{a_i\}_{i\in I}$, $\{b_i\}_{i\in I}$ が、$a_i \leq b_i$ $(i \in I)$ であるならば、

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i.$$

さて、具体的な級数の収束性については、次が基本的である。

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx < +\infty \iff \alpha > 1,$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1.$$

とくに、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

この発散級数の増大度のスピードは、

$$1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log n}=1.$$

さらに、

$$0\leq\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_k^{k+1}\frac{x-k}{kx}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{kx}dx\leq\frac{1}{k^2}$$

より、

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

が存在する。

問 2. 正数 a に対して、極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+n}-\log\frac{a+n}{a+1}\right)$$

が存在し、正の数であることを示せ。

問 3. 正数 a について、級数

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log n)^a}$$

の収束性を調べよ。

定義 1.1. 級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 1}a_n$ は、

$$\sum_{n\geq 1}|a_n|<+\infty$$

であるとき、**絶対収束** (converge absolutely) するという。

定理 1.2. 絶対収束する級数に対して、級数

$$\sum_n a_n$$

は収束しその値は和をとる順番によらない。さらに、不等式

$$\left|\sum_n a_n\right|\leq\sum_n|a_n|$$

が成り立つ。

Proof. まず、

$$a_n = b_n - c_n, \quad b_n \geq 0, \quad c_n \geq 0, \quad |a_n| = b_n + c_n$$

とわけて考えると、絶対収束性から

$$\sum_n b_n \qquad \text{も} \qquad \sum_n c_n \qquad \text{も}$$

ともに存在し、

$$\sum_n a_n = \sum_n b_n - \sum_n c_n$$

となる。正数の和については、加える順序によらないので、この関係式から、$\{a_n\}$ の和も順序によらない。 □

問 4. 級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ は絶対収束する。

問 5. 多項式 $f(x)$ と実数 $0 < r < 1$ に対して、級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)r^n$ は、絶対収束する。

もうすこし一般的に、数の集団 $\{a_i\}_{i\in I}$ に対して、$\displaystyle\sum_{i\in I}|a_i| < +\infty$ ならば $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ が意味をもち、

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leq \sum_{i\in I}|a_i|.$$

例題 1.3.

$$\sum_n |a_n| < +\infty, \qquad \sum_n |b_n| < +\infty$$

のとき、

$$I = \{i = (m, n); m \geq 1, n \geq 1\}, \qquad c_i = a_m b_n$$

とすると、$\displaystyle\sum_{i\in I}|c_i| < +\infty$ であり、

$$\sum_{i\in I} c_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_k \sum_{l=1}^n b_l = \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^n b_l\right) = \sum_m a_m \sum_n b_n.$$

左辺は、普通、

$$\sum_{m,n\geq 1} a_m b_n$$

と書く。

問 6. 実数 x, y に対して、

$$\sum_{m\geq 0} \frac{x^m}{m!} \sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{n!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

を示せ。

級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

は、絶対収束しないが、値自体は存在する。

和の順序を変えることにより、その値がいろいろと変化する様子をみてみよう。そのために、$+$ の項を p 個、$-$ の項を q 個順次取りだし、交互に和をとった級数を考える。プラス・マイナスそれぞれを n ブロック足した和

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q} + \dots \\ + \frac{1}{2(n-1)p+1} + \dots + \frac{1}{2np-1} - \frac{1}{2(n-1)q+2} - \dots - \frac{1}{2nq} \end{aligned} \quad (1)$$

すなわち、

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2np-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2nq}\right)$$

を考えると、これは、

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2np} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2np} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{qn}\right)$$

に等しいので、

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

を使うと、

$$\log(2pn) + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}(\log(pn) + \gamma_{pn}) - \frac{1}{2}(\log(qn) + \gamma_{qn})$$

$$= \log(2p) - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log q + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}\gamma_{pn} - \frac{1}{2}\gamma_{qn}$$

となって、これは、$n \to \infty$ のとき、

$$\log(2p) - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log q = \log(2\sqrt{p/q})$$

に近づく。

例題 1.4.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2.$$

実は、$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ (より一般に条件収束級数) を並べ替えて、任意の与えられた実数に等しくなるようにすることができる (リーマン)。

2 複素数の幾何学

高校で「複素数の幾何学」をやらなくなって久しい。幾何学はおろか、複素数そのものの扱いも表層的なままである。かように実用性と芸美性を兼ね備えた数学的対象もめずらしいのだが。

複素数 $z = x + iy$ に対して

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z,$$

を z の**実部・虚部** (real part, imaginary part) 、$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を**絶対値** (modulus) 、$\overline{z} = x - iy$ を z の**複素共役** (complex conjugate) という。

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad |z + w| \leq |z| + |w|, \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}}, \quad |zw| = |z||w|$$

が成り立つ。

Remark . 電気工学方面では虚数単位を表す記号として i ではなく j が使われる。i は電流を表すのに使うという理由で。また、共役複素数を表す記号として z^* も良く使われる。とくに物理方面では。一方、-1 の平方根として、$\sqrt{-1}$ をそのまま使うことも古い文献とかに見られる。ただ、２つある -1 の平方根 $\pm\sqrt{-1}$ は、本来、対等のもので、一方を i と書けば他方は $-i$ と表せるという便宜的な区別でしかない。したがって、も

しある複素数の等式が成り立つのであれば、その中で現れる i をすべて一斉に $-i$ で置き換えた等式も成り立つことになる。この操作を複素数 $z = x + iy$ に行った結果が共役複素数に他ならない。複素数のもつある種の対称性を表している。

問 7. 実数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を係数とする方程式

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$$

が $z = x + iy$ という解をもてば、$\overline{z}$ も同じ方程式の解である。

問 8. $z = x + iy$, $w = u + iv$ とした場合に、$|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ はどのような等式に相当するか。

複素数の列 $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n\geq 1}$ が複素数 $z = x + iy$ に収束するとは、

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

が成り立つことと定める。このとき、z を $\{z_n\}_{n\geq 1}$ の極限値と呼び、

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n$$

と書くことは実数列の場合と同様。

問 9. 不等式

$$\frac{|x| + |y|}{2} \leq |z| \leq |x| + |y|$$

を示し、収束条件の同値性を確かめよ。

問 10. 複素数 $z \neq 1$ に対し、

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

であることを確かめ、$|z| < 1$ であるとき、

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right)$$

を求めよ。

複素数を見ようと思ったら、$z = x + iy$ を座標平面上の点 (x, y) と同一視すればよい。これを**複素平面** (complex plane) という。**極座標** (polar coordinates) (r, θ) を使えば、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ なる表示を得る。これを複素数の極形式 (polar form) という。オイラーの関係式を使えば、

$$z = re^{i\theta}.$$

ここで、r は z の絶対値 $|z|$ に等しいことに注意。また、θ は z の**偏角** (argument) と言い $\theta = \arg(z)$ と書く。偏角には、2π の整数倍の不定性があることに注意。2 つの複素数の和あるいは差は、ベクトルのそれに等しい。オイラーの関係式を使えば、三角関数の加法定理は指数法則

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

の形を取り、このことから、

$$|zz'| = |z|\,|z'|, \qquad \arg(zz') = \arg(z)\ \arg(z')$$

が従う。

問 11. 加法定理と指数法則（偏角の加法性）が同等であることを確かめよ。

問 12. 問 10 の等式に $z = e^{i\theta}$ を代入したものの実部と虚部を取り出すことで何がわかるか。

例題 2.1. 自然数 $n \geq 2$ に対して、n 次方程式 $z^n = 1$ の複素数解は、$z = e^{2\pi ik/n}$ $(1 \leq k \leq n)$ で与えられ、この n 個の解（1 の n 乗根）は、複素平面上で、単位円周に内接する正 n 角形の頂点を形成する。

問 13. $z^3 = -i$ の解を図示せよ。

例題 2.2. 複素平面上の 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 がこの順序である円周上にあるための条件は、

$$\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1}\frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3} = -\frac{|z_4 - z_1|\,|z_2 - z_3|}{|z_2 - z_1|\,|z_4 - z_3|}$$

問 14. 複素平面上の 3 点 $a = 1 + i$, $b = 2 - i$, $c = x + iy$ が c を直角点とする直角二等辺三角形を表すように実数 x, y を定めよ。

複素数の存在に疑問をもつ人のために、実数の組 (x,y) 全体に、次の演算を考える。

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'),\quad (x,y)\,(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$$

こころは、$(x,y)=x+iy$ ということである。

問 15. 積の結合法則を確かめよ。また、逆数を表す式を導け。

問 16. $(x,y)(x,y)=(-1,0)$ となる (x,y) を求めよ。

複素数のもう一つの構成方法は行列によるものである。実数 a を平面の一次変換 $(x,y)\mapsto(ax,ay)$ とみなせば、-1 は、角度 π の回転である。そこで、その半分の回転である角度 $\pi/2$ の回転を表す行列に虚数単位の i を対応させると、複素数 $x+iy$ の行列表示

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

を得る。

3　複素級数

複素級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n$ についても絶対収束の概念が有効である。

$$\sum_{n\geq 0}|c_n|<\infty$$

ならば、

$$\sum_{n\geq 0} c_n$$

が存在して和をとる順序によらない。さらに

$$\left|\sum_{n\geq 0} c_n\right|\leq\sum_{n\geq 0}|c_n|.$$

<u>冪級数</u>

複素数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ と複素変数 z に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

の形の級数を z の**冪** (べき) **級数** (power series) という。冪級数の**収束域** (domain of convergence) を

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \text{ が存在する }\}$$

で定義する。冪級数を表すために関数の記号がしばしば用いられる。

Remark . 複素級数における和の添字を、1 からではなく 0 から始めた理由は、べき級数の表示を見やすくしたいがためであった。

例題 3.1.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

の収束域は、$\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

補題 3.2.

(i) 正数 $r > 0$ に対して、

$$\sum_{k\geq 0} |c_k| r^k < \infty \implies \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\} \subset D.$$

(ii) 複素数 $z \in D$ と正数 $r < |z|$ に対して、

$$\sum_{k\geq 0} |c_k| r^k < \infty.$$

この補題から、$D \neq \mathbb{C}$ であれば、ある $\rho > 0$ が存在して

$$\{|z| < \rho\} \subset D \subset \{|z| \leq \rho\}$$

であることがわかる。この正数 ρ を冪級数

$$\sum_{k\geq 0} c_k z^k$$

の**収束半径** (radius of convergence) という。

上の補題はまた、収束半径の内側では、冪級数が絶対収束していることも意味する。

問 17. $a > 1$ とする。

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}z^n$$

の収束域を求めよ。

定理 3.3.

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

である。

Proof. 簡単のために

$$s = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

が存在するとしよう。すると、十分大きい n について

$$s-\epsilon \leq \sqrt[n]{|c_n|} \leq s+\epsilon$$

となるので、もし $|z| < (s+2\epsilon)^{-1}$ ならば、

$$|c_n||z|^n \leq \left(\frac{s+\epsilon}{s+2\epsilon}\right)^n$$

となって、

$$\sum_{n\geq 0}|c_n z^n| < +\infty$$

がわかる。したがって $\rho \geq s^{-1}$.

一方、

$$\sum_{n\geq 0}|c_n|r^n < +\infty$$

とすると、十分大きい n に対して

$$|c_n|r^n \leq 1$$

が成り立ち、したがって

$$s = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{1}{r}.$$

r を限界点 ρ に近づけると、$s \leq \rho^{-1}$ となって逆向の不等式が得られる。 □

系 3.4. $\lim_{n\to\infty} |c_n|/|c_{n+1}|$ が存在するならば、

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

である。

Proof. $\sigma = \lim_{n\to\infty} |c_{n+1}|/|c_n|$ とする。小さい数 $\epsilon > 0$ に対して、k を十分大きくとると、

$$\sigma - \epsilon \leq \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} \leq \sigma + \epsilon$$

となるので、$k = N, k = N+1, \ldots, k = n-1$ について掛合わせると

$$(\sigma - \epsilon)^{n-N} \leq \frac{|c_n|}{|c_N|} \leq (\sigma - \epsilon)^{n-N}$$

となって、

$$\sigma - \epsilon \leq \liminf_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \sigma + \epsilon$$

がわかる。ϵ は好きなだけ小さくとれるので、

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$$

が示された。 □

Remark . 収束半径の計算では、まず比の公式を試みる。

問 18. $\limsup$ の意味を復習し、収束半径の公式の証明を完成させよ。

問 19. 冪級数 $\sum_{n\geq 0} n! z^n$ の収束半径を求めよ。

定理 3.5 (Taylor の公式)**.**

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) t^{n-1} + R_n$$

ここで、

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) t^n$$

または

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f^{(n)}(x)(t-x)^{n-1} dx.$$

ここで関数の増大度のスピードについて、

$$\log n << n^{\alpha} << e^{\beta n} << n!$$

($\alpha > 0, \beta > 0$) を注意しておく。記号 $<<$ の意味は、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\beta n}}{n!} = 0$$

などである。

例題 3.6.

$$\log n^{1/n} = \frac{\log n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから、$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$

命題 3.7. 最初の *3* つは $\rho = \infty$ であとの *2* つは $\rho = 1$ である。最後の公式は、*Taylor* の定理を使いづらいので、後の方で微分方程式を利用して証明する。ここでは、収束半径の計算に止める。

(i)

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots.$$

(ii)

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \dots.$$

(iii)

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \dots.$$

(iv)

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots.$$

(v)

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

例題 3.8. $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ と $\sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$ は同じ収束半径をもつ。

命題 3.9. 複素数 z, w に対して、

$$\text{(i) } \overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \quad \text{(ii) } |e^z| = e^{\Re z}, \quad \text{(iii) } e^{z+w} = e^z e^w$$

である。

とくに実数 x, y に対して**オイラーの公式**

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

が成り立つ。

Proof. (i) は定義から明らか。(ii) は (i) と (iii) よりわかる。(iii) は絶対収束級数の性質を使って、

$$\begin{aligned}
e^z e^w &= \left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} z^m\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} w^n\right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m+n=l} \frac{1}{m!n!} z^m w^m \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (z+w)^l \\
&= e^{z+w}
\end{aligned}$$

からわかる。 □

<u>冪級数の積と逆数</u>

$f(z) = \sum_{m\geq 0} f_m z^m$ と $g(z) = \sum_{n\geq 0} g_n z^n$ の積を

$$f(z)g(z) = \sum_{n\geq 0} (f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + \cdots + f_n g_0) z^n$$

で定める。冪級数の積は、交換法則と結合法則をみたす。

問 20. これを確かめよ。

問 21. 冪級数 $f(z), g(z)$ の収束半径をそれぞれ r, s とすると $f(z)g(z)$ の収束半径は $\min\{r, s\}$ 以上である。

冪級数 $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ に対して、$f(z)g(z) = 1$ をみたす冪級数 $g(z)$ が存在するための必要十分条件は、$f_0 \neq 0$ であ。このとき $f(z)g(z) = 1$ をみたす冪級数は、一意的に定まり $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ と書く。

問 22. これを確かめよ。

例題 3.10 (ベルヌーイ数)**.**

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!},$$

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}.$$

問 23. 以下の関数を冪級数展開し、z について 4 次の項まで求めよ。

$$e^z\sqrt{1+z}, \qquad \frac{1}{1+z+z^2}, \qquad \tan z.$$

問 24. 恒等式 $e^{\log(1+z)} = 1 + z$ を冪級数の立場から検証せよ。

4 複素関数

$D \subset \mathbb{C}$ を**領域** (連結開集合) とする。

定義 4.1. D 上の複素関数 $f(z)$ が（複素）**微分可能**であるとは、任意の $c \in D$ に対して

$$f'(c) = \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

が存在すること。微分可能関数のことを正則関数 (holomorphic function) ともいう。

要求されている条件は、見かけ以上に強いものである。

例題 4.2. 複素微分が存在しない例。$f(z) = x$, $f(z) = x - iy$ ($x = \Re z$, $y = \Im z$) など z だけの式で書けないもの。

例題 4.3.　整数 n に対して

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

但し、$n < 0$ の場合は、$D = \{z \neq 0\}$ で考える。

問 25. これを示せ。

複素変数の関数についても、実変数の関数と同様の微分の公式が成り立つ。例えば、

命題 4.4. 複素変数の関数 $f(z)$, $g(z)$ が微分可能であるとき、$f(z)g(z)$, $1/f(z)$, $f(g(z))$ も微分可能で、

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = -\frac{f'(z)}{f(z)^2},$$
$$(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z).$$

となる。

問 26. これを示せ。

座標の関係式

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

を使って形式的に偏微分作用素の計算を行うと

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

例題 4.5.

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1, \qquad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0.$$

問 27.

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

定理 4.6 (Cauchy-Riemann)**.** 連続微分可能な関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ を使って $u(x,y) + iv(x,y)$ と表される関数 $f(x+iy) = f(x,y)$ について、f が複素微分可能であるための必要十分条件は、$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$、すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となること。

Proof. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ で、u, v が連続的微分可能であるとき、

$$\begin{aligned}
f(z) - f(c) &= u(x,y) - u(a,b) + i(v(x,y) - v(a,b)) \\
&= u_x(a,b)(x-a) + u_y(a,b)(y-b) + iv_x(a,b)(x-a) + iv_y(a,b)(y-b) \\
&\quad + o(\sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(c)(z-c) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)\overline{(z-c)} + o(|z-c|)
\end{aligned}$$

が成り立つことからわかる。 □

Remark . $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ の心は、f が z だけの関数であり $\overline{z}$ 変数に依存しないということ。詳しくは、後で述べる冪級数展開を参照。

問 28.

$$f(x,y) = e^x(a\cos y + i\sin y)$$

が複素微分可能であるように実数 a を定めよ。

問 29. 関数 $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ が複素微分可能で、$u(x,)$, $v(x,y)$ が二階まで偏微分可能であれば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v = 0$$

であることを示せ。

問 30. $f'(z) \equiv 0$ であれば、$f(z)$ は定数である。

問 31. 微分可能関数 $f(z)$ で $|f(z)|$ が定数であるものは、定数関数に限る。

可微分関数の実部と虚部である実数値関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ の勾配ベクトル場は互いに直交する。より詳しく、∇v は、∇u を角度 $\pi/2$ だけ回転させたものになっている。とくに、$f'(z) = 0$, $\nabla u(x,y) = 0$, $\nabla v(x,y) = 0$ は同値な条件である。$f'(c) = 0$ かつ $f''(c) \neq 0$ である点 $c = a + ib$ の付近での関数 u, v の様子を調べてみると、局所的に $u = |f''(c)|(X^2 - Y^2)/2$, $v = |f''(c)|XY$ の形になっている。ここで、X, Y は、$(x-a, y-b)$ を回転させて得られる座標である。したがって、(a,b) は、u, v の鞍点で、（3次以上の無限小を無視すると）互いに $\pi/4$ の角度の回転で移り合う形になっている。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

複素関数の積分

連続関数 $f(t) = g(t) + ih(t)$, $a \le t \le b$ に対してその積分を

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt + i\int_a^b h(t)dt$$

で定義する。

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(t_j)(t_j - t_{j-1})$$

となるので、

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$$

が成り立つ。

定理 4.7. 冪級数 $\sum_{n\ge0} c_n z^n$ は収束域の内部で微分可能で

$$\left(\sum_{n\ge0} c_n z^n\right)' = \sum_{n\ge1} n c_n z^{n-1}.$$

(右辺の収束半径はもとの冪級数のそれに等しい。)

Proof. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ であるから、形式的に微分して得られる冪級数ともとの冪級数の収束半径 ρ は一致する。

そこで、$|z| < \rho$ に対して $|z| < r < \rho$ となる実数 r を取ると、$\sum_{n\ge2} n(n-1)|c_n|r^{n-2} < +\infty$ である。

このとき、$|w| \le r$ である複素数 w に対して、$\sum_{n\ge1} n c_n z^{n-1}$ と

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \sum_{n\ge1} c_n \frac{z^n - w^n}{z - w}$$

とを比較する。

$$\frac{w^n - z^n}{w - z} = n\int_0^1 (z + t(w - z))^{n-1} dt$$

を使って、

$$\sum_{n\ge0} c_n \frac{w^n - z^n}{w - z} - \sum_{n\ge1} n c_n z^{n-1} = \sum_{n\ge1} n c_n \int_0^1 \left((z + t(w - z))^{n-1} - z^{n-1}\right) dt$$

と表し、さらに右辺の被積分関数に（$z(t) = z + t(w - z)$）、

$$\begin{aligned}|z(t)^{n-1} - z^{n-1}| &= t|w - z|\,|z(t)^{n-2} + z(t)^{n-3}z + \cdots + z^{n-2}| \\ &\leq t|w - z|(n - 1)r^{n-2}\end{aligned}$$

なる評価を使うと、

$$\left|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n\geq 1} nc_n z^{n-1}\right| \leq \frac{1}{2}|w - z| \sum_{n\geq 2} n(n - 1)|c_n|r^{n-2}$$

は、$w \to z$ のとき、0 に近づく。 $\square$

この定理の応用として、冪関数の Taylor 展開の公式（= Newton の公式）を証明してみよう。開区間 $(-1, 1)$ において、冪級数

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}x^3 + \ldots$$

で定義された関数を $f(x)$ で表す。関数 $f(x)$ は、冪級数の微分の公式により、

$$(1 + x)f'(x) = \alpha f(x)$$

をみたす。一方冪関数 $(1 + x)^\alpha$ も同じ微分方程式をみたすので、

$$\left(\frac{f(x)}{(1 + x)^\alpha}\right)' = 0$$

となる。これから、

$$f(x) = C(1 + x)^\alpha$$

となり (問 30)、$x = 0$ での値を比較して、$C = 1$、すなわち求める公式が得られた。

問 32.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}z^n$$

の収束域を求めよ。

<u>線積分</u>

領域 D 内のなめらかな曲線 $C : z(t),\, 0 \leq t \leq 1$ に対して、積分

$$\int_0^1 f(z(t))\frac{dz}{dt}dt$$

はリーマン和

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}), \quad z_k = z(t_k)$$

の極限に一致し、曲線のパラメータの取り方によらない。これを

$$\int_C f(z)\, dz$$

と書いて $f(z)$ の曲線 C に沿った**線積分**または経路積分 (line integral or path integral) と呼ぶ。

- $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$ （このような曲線を区分的になめらかという）のとき

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\, dz.$$

- 曲線 C の向きを反対にしたものを $-C$ で表すとき、

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

線積分の値の評価については、

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz| \leq |C| \max\{|f(z)|; z \in C\}$$

なる不等式が役に立つ。($|C|$ は、曲線 C の長さを表す。)

例題 4.8.

$$\int_{|z|=1} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{if } n = -1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とくに、関数 $1/z$ の線積分は、始点・終点が同じでも、経路の取り方に依存する。

問 33. 点 $a \in \mathbb{C}$ から点 $b \in \mathbb{C}$ への経路 C を含む領域の上で微分可能な関数 $f(z)$ について、

$$\int_C f'(z)dz = f(b) - f(a)$$

となる。

とくに、$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で $f'(z) = 1/z$ となる関数 $f(z)$ は存在しない。

問 34. 原点 0 から点 1 への線分を C_1, 点 1 から点 $1+i$ への線分を C_2, 点 0 から点 $1+i$ への線分を C_3 で表すとき、関数

$$f(z) = z^2, \quad f(z) = e^z, \quad f(z) = x + y$$

に対して、線積分

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz, \qquad \int_{C_3} f(z)dz$$

を計算し比較してみよ。

補題 4.9. なめらかな二変数関数 $f(s,t)$ に対して、

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 f(s,t)dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)dt.$$

Proof. これは、左辺を不定積分して二重積分の公式を使うと

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)dt\right) ds &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)ds\right) dt \\
&= \int_0^1 [f(s,t)]_{s=0}^{s=x} dt \\
&= \int_0^1 f(x,t)du - \int_0^1 f(0,t)dt
\end{aligned}$$

となって、$\displaystyle\int_0^1 f(s,t)dt$ は $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)dt$ の原始関数であることからわかる。 □

定理 4.10. 与えられた領域 D（連結開集合）の上で定義された微分可能複素関数 $f(z)$ で、$f'(z)$ が D で連続であるものを考える。

領域 D 内の 2 点 a, b に対して、a を始点 b を終点とする曲線 C_0 が同じく a を始点 b を終点とする曲線 C_1 に始点・終点を固定したまま領域内で連続的に変形できるとき、

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz.$$

Proof. なめらかな曲線のパラメータ s による連続的な変形 $\{C_s\}_{0\le s\le 1}$ は、なめらかな二変数関数 $z(s,t)$ によって、$C_s : [0,1] \ni t \mapsto z(s,t)$ と表すことができる。このとき、始点・終点が固定される条件は、

$$z(s,0) = a, \quad z(s,1) = b \ (0 \le s \le 1)$$

となる。とくに、

$$\frac{\partial z}{\partial s}(s,0) = 0 = \frac{\partial z}{\partial s}(s,1)$$

である。

以上の状況で、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_{C_s} f(z)dz &= \frac{d}{ds}\int_0^1 f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial t}(s,t)dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial t}(s,t)\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(f'(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial s}(s,t)\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) + f(z(s,t))\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}(s,t)\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial s}(s,t)\right)dt \\
&= \left[f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial s}(s,t)\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

系 4.11 (Cauchy の積分定理)**.** 閉曲線 C が内部も含めて領域 D に含まれるとき、

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

問 35. 定理 4.10 の証明を系 4.11 の場合に使えるように書き改めよ。ヒント： $z(s,0) = z(s,1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial s}(s,0) = \dfrac{\partial z}{\partial s}(s,1)$.

問 36. Green の公式を複素積分の形に書き直すことで、等式

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 2i\int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\,dxdy$$

が成り立つことを確かめよ。

補題 4.12. 上半平面 $\{z\in\mathbb{C};\Im z\geq 0\}$ から円板 $\{z\in\mathbb{C};|z|\leq R\}$ を除いた領域の上で定義された連続関数 $f(z)$ に対して、$M(r)=\max\{|f(z)|;|z|=r\}$ なる量が条件 $\lim_{r\to\infty} M(r)=0$ をみたすならば、$t>0$ に対して、

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} e^{itz}f(z)dz=0$$

となる。ここで、$C_r : z=re^{i\theta}$ *(*$0\leq\theta\leq\pi$*).*

Proof.

$$\left|\int_{C_r} e^{itz}f(z)\,dz\right| \leq rM(r)\int_0^\pi e^{-rt\sin\theta}\,d\theta \leq \frac{\pi}{t}M(r)(1-e^{-rt}).$$

□

例題 4.13.

(i) 円環 $r\leq|z|\leq R$ の上半分を C とするとき、

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

から

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

が得られる。

(ii) 扇形 $0\leq r\leq R$, $0\leq\theta\leq\pi/4$ の周囲を C とするとき、

$$\int_C e^{-z^2}dz=0$$

から

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{ix^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pi i/4}\quad\text{(Fresnel 積分)}$$

が得られる。

定理 4.14 (Cauchy の積分公式)**.** 領域 D の上で定義された複素関数 $f(z)$ に対して、*Cauchy* の積分定理（系 *4.11* の性質）が成り立つならば、閉曲線 C 内部の点 z に対して、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Proof. z を中心として半径 $r > 0$ の円 C_r を考えて、領域 $\overline{C} \setminus \overline{C_r}$ に公式を適用すると、

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

ここで、

$$\begin{aligned}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= \int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta + f(z)\int_{C_r} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta + 2\pi i f(z)\end{aligned}$$

から得られる

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - 2\pi i f(z)\right| = \left|\int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta\right| \leq (|f'(z)| + \epsilon)|C_r|$$

において、$r \to 0$ とすれば求める公式が得られる。 □

テーラー展開

関数 $f(z)$ が $z = a$ の付近 $(|z - a| \leq R)$ で定理 4.14 の条件を満たすとき（とくに $f(z)$ が微分可能であるとき）、上の積分公式を $|z - a| < R$, $|\zeta - a| = R$ に適用すると、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - a| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

ここで、$|z - a|/|\zeta - a| < 1$ に注意して、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

を代入すれば、

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n,\ |z - a| < R, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - a| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta$$

なる表示が得られる。

上の式変形で、積分と級数和の順序交換が可能であることは、

$$\begin{aligned}
\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k (z-a)^k \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R} \sum_{k \geq n} f(\zeta) \frac{(z-a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - a| = R} \sum_{k \geq n} |f(\zeta)| \frac{|z-a|^k}{|\zeta - a|^{k+1}} |d\zeta| \\
&\leq \sum_{k \geq n} M \frac{|z-a|^k}{R^k} \\
&= \frac{M}{R - |z-a|} \frac{|z-a|^n}{R^{n-1}} \to 0
\end{aligned}$$

からわかる ($|z-a| < R$ に注意)。

逆に、冪級数で表示される関数は、何度でも微分可能であることから次のようにまとめることができる。

定理 4.15. 領域 D の上で定義された複素関数 $f(z)$ に対して、以下の *3* 条件は同値である。

(i) 関数 f は微分可能であり $f'(z)$ が連続である。

(ii) 関数 f は連続であり、内部まで D に含まれるような全ての（区分的になめらかな）閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

(iii) 関数 f は、任意の $a \in D$ の付近で冪級数表示をもつ。すなわち、$\exists r > 0, \exists \{c_n\}_{n \geq 0}$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n \qquad for\ |z-a| < r.$$

定義 4.16. 上の性質 (iii) をもつ関数（すなわち定義域内の各点の近くで冪級数表示をもつ関数）を**解析関数** (analytic function) と呼ぶ。

上の定理はまた、解析関数が微分可能性によって特徴付けられるということである。たとえば、解析関数の合成関数が再び解析関数であることがこのことから即座にわかる。

命題 4.17. 解析関数の冪級数表示

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n(z-a)^n$$

で、

$$f_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

となる。とくに、解析関数の冪級数表示は、中心点 a を与えると一意的に定まる。

Remark . 後ほど、冪級数の一意性のより強い形を、「一致の原理」として与える。

<u>冪級数の代入</u>

上で指摘したように、$z=a$ のまわりで定義された解析関数 $f(z)$ と $w=f(a)$ のまわりで定義された解析関数 $g(w)$ があるとき、合成関数 $h(z)=g(f(z))$ は $z=a$ のまわりで解析的である。合成解析関数 $h(z)$ の $z=a$ のまわりでの冪級数表示を具体的に求めるには、冪級数表示の一意性に注意して、次のようにすればよい。冪級数表示

$$w = f(z) = \sum_{k\geq 0} f_k(z-a)^k$$

を

$$g(w) = \sum_{l\geq 0} g_l(w-f(a))^l$$

に代入することで得られる絶対収束級数

$$\sum_{l\geq 0}\left(\sum_{k\geq 1} f_k(z-a)^k\right)^l$$

を $z-a$ の冪級数としてくくり直す。

例題 4.18.

$$\frac{1}{1+z+z^2} = 1-(z+z^2)+(z+z^2)^2-(z+z^2)^3+\cdots = 1-z+z^3-z^4+\cdots.$$

問 37. $\omega = (-1+\sqrt{3}i)/2$ を使って $1/(1+z+z^2)$ を部分分数和に分解する方法で冪級数展開を求めてみよ。

定理 4.19 (逆関数)**.** 解析関数 $f(z)$ が、$f'(a) \neq 0$ をみたすならば、$w = f(a)$ のまわりで定義された解析関数 $g(w)$ で、$g(f(z)) = z$, $f(g(w)) = w$ をみたすもの（g は、f の逆関数と呼ばれる）が存在する。

Proof. 一次式による変数変換を施すことで、$a = f(a) = 0$ かつ $f'(0) = 1$ と仮定して一般性を失わない。$\phi(z) = f(z) - z$ とおくと、$\phi(z)$ は z の解析関数で $\phi'(0) = 0$ であることから、$r > 0$ を小さく取ると、$|\phi'(z)| \leq 1/2$ ($|z| \leq r$) とできる。

さて、$w = f(z)$ という関係式を $z = w - \phi(z)$ と書き直すと、条件 $w = f(g(w))$ は、$z = g(w)$ が方程式 $z = \Phi_w(z)$ の解であることを意味する。ここで、$\Phi_w(z) = w - \phi(z)$ と置いた。このとき、

$$|\Phi_w(z) - \Phi_w(z')| = |\phi(z) - \phi(z')| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt}\phi(tz + (1-t)z')\,dt \right| \leq \frac{|z - z'|}{2}$$

であるから Φ_w は縮小的であり、さらに $|w| \leq r/2$ であれば、

$$|\Phi_w(z)| \leq |w| + |\phi(z)| \leq |w| + \frac{|z|}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

となるので、Φ_w は閉円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ における縮小写像を定める。したがって、$|w| \leq r/2$ に対して

$$g(w) = \lim_{n\to\infty} \Phi_w^n(0)$$

と置くと、$\Phi_w(g(w)) = g(w)$, すなわち $f(g(w)) = w$ をみたす。さらに、

$$|g(w) - g(w')| = |w + \phi(g(w)) - w' - \phi(g(w'))| \leq |w - w'| + \frac{1}{2}|g(w) - g(w')|$$

を書き直すと

$$|g(w) - g(w')| \leq 2|w - w'|$$

となるので、$g(w)$ は w について連続である。

次に $g'(w) = 1/f'(g(w))$ を示す。実際、$z = g(w)$, $z' = g(w')$ とするとき、$w = f(g(w)) = f(z)$, $w' = f(g(w')) = f(z')$ に注意すれば、

$$\frac{g(w') - g(w)}{w' - w} = \frac{z' - z}{f(z') - f(z)}$$

であるので、$w' \to w$ とすればよい。

以上により、$g(w)$ は微分可能で、$g'(0) = 1/f'(0) = 1$ であるので、同様の議論を $g(w)$ に対して行えば、$z = 0$ のまわりで定義された解析関数 $h(z)$ で $h(0) = 0$ かつ $g(h(z)) = z$ を満たすものが存在する。最後に、

$$f(z) = f(g(h(z)) = h(z)$$

であるから、$h(z)$ は $f(z)$ に一致する。 □

冪級数 $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ で $f_1 \neq 0$ であるものに対して、その逆関数に相当する冪級数 $g(z) = \sum_{n\geq 0} g_n z^n$ を

$$z = f(g(z)) = \sum_{n\geq 0} f_n \left(\sum_{m\geq 0} g_m z^m \right)^n$$

で定める。

例題 4.20.

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}, \ |z| < 1$$

の逆関数の冪級数表示を求め、$\tan z$ のテーラー展開と一致することを確かめる。

問 38. $f(z) = 2z + z^2$ の逆級数 $g(w)$ を求め、それを $\sqrt{1+w}$ の二項展開と比較せよ。

<u>ローラン展開</u>

関数 $f(z)$ が $z \neq a$ で微分可能なときにも、積分公式を利用して $z = a$ の付近での関数の様子を調べることができる。そのために、円環 (annulus) $\{r < |z-a| < R\}$ を考える。$r < |z-a| < R$ についての Cauchy の積分公式から、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

ここで、$|\zeta - a| = R$ のときには、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

$|\zeta - a| = r$ のときには、

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n \geq 0} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}$$

を使うと、

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n,$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \qquad n \geq 0 \\ c_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

なる表示が得られる。

これを関数 $f(z)$ の $z = a$ における**ローラン展開** (Laurent expansion) とよぶ。ローラン展開において負冪が現れるとき、a を $f(z)$ の**孤立特異点** (isolated singularity) とよぶ。ローラン展開における負冪の項が無限に続く場合と、有限で終わる場合は、本質的に異なる状況を表す。後者は、逆数関数が特異点のまわりで解析的になる「良い」特異点であるのに対して、前者はそのような形の処理ができない。「良い」特異点のことを**極** (pole) と呼び、負冪の最大指数を極の位数という。

$(z - a)^{-1}$ の係数 c_{-1} を $f(z)$ の $z = a$ における**留数** (residue) とよび、$\mathrm{Res}_a(f)$ と書く。複素数 a が f の特異点でないときは、$\mathrm{Res}_a(f) = 0$ であるが、特異点であっても $\mathrm{Res}_a(f) = 0$ となり得ることに注意。

問 39. 上の計算で積分と級数和の順序を交換してよいことを確かめよ。

例題 4.21.

(i) 自然数 n と複素数 a に対して、関数 $\dfrac{e^z}{(z-a)^n}$ の特異点は、$z = a$ の一箇所だけで、その点のまわりでのローラン展開は、

$$e^a \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (z - a)^{k-n}$$

となる。

(ii) 関数 $\dfrac{1}{z^2+1}$ の特異点は、$z=\pm i$ の 2 点で、$z=\pm i$ のまわりでのローラン展開は、それぞれ、

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i}{2}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{4}+\frac{i}{8}(z-i)+\dots,\\
&\frac{i}{2}\frac{1}{z+i}+\frac{1}{4}-\frac{i}{8}(z+i)+\dots
\end{aligned}
$$

となる。

(iii) 「悪い」特異点のまわりでのローラン展開の例として

$$e^{1/z}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^{-n}.$$

問 40. 関数 $\dfrac{e^z}{\sin z}$ の特異点および各特異点における留数を求めよ。

定理 4.22 (留数公式)**.** 関数 $f(z)$ が閉曲線 C 内にちょうど n 個の孤立特異点 $a_1,\dots,a_n$ をもつとき、

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}Res_{a_j}(f)$$

<u>留数計算</u>

例題 4.23. 積分

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+2a\sin\theta+a^2}d\theta \qquad (0<a<1)$$

の計算。

Proof.

$$t=\tan\frac{\theta}{2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad d\theta=\frac{1}{1+t^2}dt$$

という置換積分の定石を利用しても計算できるが、ここでは、

$$z=e^{i\theta},\quad \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i},\quad d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

なる変数変換を用いて、

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+2a\sin\theta+a^2}d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{(az+i)(z+ia)}dz$$

と書きなおす。ここで、積分域内の特異点は $z=-ia$ だけである。$z=-ia$ の近くでは、$w=z+ia$ とおくと、

$$\frac{1}{(az+i)(z+ia)} = \frac{1}{w(a(w-ia)+i)} = \frac{1}{w}\frac{1}{i-ia^2+aw} = \frac{1}{w}\left(\frac{1}{i-ia^2}+\dots\right)$$

であるから、

$$\mathrm{Res}_{z=-ia} = -\frac{i}{1-a^2}.$$

これから、

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{(az+i)(z+ia)}dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=-ia} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

□

例題 4.24. 積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$$

の計算。

Proof. $\dfrac{1}{x^4+1}$ の部分分数分解を考えて … としても可能ではあるが計算は結構大変である。線分 $C_1:[-R,R]$ と上半円 C_2 からなる閉曲線 C を考えると、$z^4+1=(z-\zeta)(z-\zeta^3)(z-\zeta^5)(z-\zeta^7)$ $(\zeta=e^{\pi i/4})$ に注意して

$$\int_C \frac{1}{z^4+1}dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=\zeta} + 2\pi i \mathrm{Res}_{z=\zeta^3}.$$

右辺に現れる留数は、

$$\mathrm{Res}_{z=\zeta} = \frac{1}{(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)(\zeta-\zeta^7)} = \frac{1}{4\zeta^3} = -\frac{\zeta}{4},$$

$$\mathrm{Res}_{z=\zeta^3} = \frac{1}{(\zeta^3-\zeta)(\zeta^3-\zeta^5)(\zeta^3-\zeta^7)} = \frac{1}{4\zeta}$$

となるので、右辺の量は、

$$\frac{\pi i}{2}(\zeta^{-1}-\zeta) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

一方、左辺の積分のうち、

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^4+1} dz$$

で、$z = Re^{i\theta}$ なる変数変換を使うと、$|z^4+1| \geq |z^4| - 1 = R^4 - 1$ であるから、

$$\left| \int_{C_2} \frac{1}{z^4+1} dz \right| \leq \frac{|C_2|}{R^4-1} = \pi \frac{R}{R^4-1} \to 0 \quad \text{as } R \to +\infty$$

となって、

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を得る。 □

問 41. 留数公式を用いて次の積分を計算せよ。

(i)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(ii)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^n+1} dx$$

の計算。

例題 4.25. 和の公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} - \frac{1}{2a^2}.$$

Proof. 関数 $\pi \cot \pi z$ は、$z = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ に一位の極をもち、そこでの留数は 1 であるから、関数 $f(z)$ が実軸の近傍で正則であれば、区間 $[-N, N]$ を囲む細長い積分路 C をとって、

$$2i \sum_{n=-N}^{N} f(n) = \int_C f(z) \cot \pi z dz.$$

とくに、$f(z)$ が有理関数で、$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ であるとき、C に大きな積分路 R: $|x+y| + |x-y| = N + \frac{1}{2}$ (N は自然数) を付け加えて、$N \to \infty$ とすれば、R の上で $|\cot \pi z| \leq 2$ となるので、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum (f(z) \text{ の極における } f(z) \cot \pi z \text{ の留数})$$

であることがわかる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}$$

と書けるので、$f(z) = 1/(z^2+a^2)$ に上の公式を適用すればよい。

$z = \pm(N+\frac{1}{2}) + iy$ のとき、

$$|\cot(\pi z)| = \frac{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}} \leq 1,$$

$z = x \pm iR$ $(R > 0)$ のとき、

$$|\cot(\pi z)| \leq \frac{e^{\pi R} + e^{-\pi R}}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}}.$$

□

例題 4.26. 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}e^{-|t|a}, \quad t \in \mathbb{R}, a > 0$$

の計算。

より一般に、上半平面（の近傍）で定義された有限個の孤立特異点のみをもつ関数 $f(z)$ で、(i) f は、$\mathbb{R}$ の上に特異点を持たない、(ii) $f(z) = O(1/|z|)$ $(z \to \infty)$ であるとき、$t > 0$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\Im z > 0} \mathrm{Res}_z(e^{itz} f(z))$$

となる。

5 一致の原理と解析接続

定数でない解析関数の零点は孤立している。言いかえると、零点集合が定義域の内点に集積しているような解析関数は恒等的に零に等しい。

実際、解析関数 $f(z)$ の (互いに異なる）零点列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の集積点 a が f の定義域に含まれるとすると、$f(z)$ の $z = a$ のまわりでの冪級数展開

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

は、f の $\{a_n\}$ での値を使って、まず $c_0 = f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$。次に、$c_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-c_0}{a_n-a}$。以下、帰納的に

$$c_m = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - c_0 - c_1(a_n - a) - \cdots - c_{m-1}(a_n - a)^{m-1}}{(a_n - a)^m}$$

と決まっていく。

このことはまた、次のようにも解釈される。今、二つの開円板 D_1, D_2 の上で定義された解析関数 $f_1(z), f_2(z)$ があって、ある $a \in D_1 \cap D_2$ の近傍で、f_1 と f_2 が一致しているとすると、$D_1 \cap D_2$ の上で一致し、したがって、$D_1 \cup D_2$ 上の解析関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{if } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{if } z \in D_2 \end{cases}$$

によって、定めることができる。このような操作を繰り返すことによって、解析関数の定義域を広げていく方法を**解析接続** (analytic continuation) という。

例題 5.1. 等比級数

$$\sum_{n\geq 0} z^n$$

の収束半径は 1 であるが、これを解析接続すると、$1/(1-z)$ という、$\mathbb{C} \setminus \{1\}$ で定義された解析関数を得る。

問 42.

$$f(z) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} z^n$$

の解析接続について調べよ。

問 43. 可積分関数 $f(x)$ のコーシー変換 (Cauchy transform) を

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\, dt$$

で定める。

(i) $F(z)$ は、$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ の解析関数である。

(ii) Stieltjes の反転公式

$$2\pi i f(x) = \lim_{y\to 0}(F(x+iy) - F(x-iy))$$

が成り立つ。

(iii) $F(z)$ が、$z = t$ の付近で実軸を越えて解析接続できるならば、$x = t$ の付近で $f(x) = 0$ である。

6 対数関数とリーマン面

対数関数 $\log x$ の $x = 1$ のまわりでの冪級数展開

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots$$

の収束半径は 1 であるから、$|z-1| < 1$ である複素数 z に対しても

$$\log z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \dots$$

と定めるのが自然である。

この定義域は、実数に限定すると、$0 < x < 2$ となって本来全ての正数に対して定義し得る対数関数の一部しかカバーしない。そこで、複素変数の場合にも定義域の拡張を考えたいところである。

天下り的ではあるが、複素平面から半直線 $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$ を除いた残りの領域を D とし、

$$\mathrm{Log} z = \int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

なる $z \in D$ の関数を考えてみよう。ここで、積分は D 内で 1 から z に向かう経路に関する線積分を意味する。D の上で関数 ζ^{-1} は微分可能であり、さらに D には「穴が開いていない」ことから、積分の値は z だけで決まり経路の取り方によらない。

定理 6.1. 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ で、コーシーの積分定理が成り立つ、すなわち、内部まで込めて D に含まれる閉曲線 C に対して、いつでも

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

が成り立てば、$f(z)$ は解析関数である。

Proof. 実際、D 内の一点 c を勝手に選んだ後、$z \in D$ の関数 $g(z)$ を

$$g(z) = \int_c^z f(\zeta)d\zeta$$

で定めると、これは（局所的に）積分経路の取り方によらず、（すくなくとも局所的には）矛盾なく定義されていて、さらに $g'(z) = f(z)$ であるので、$g(z)$ が従って $f(z) = g'(z)$ も z の解析関数である。 □

命題 6.2. 関数 $\mathrm{Log} z$ は z の解析関数で、$|z-1| < 1$ に対しては上の冪級数表示をもち、さらに $z = re^{i\theta}$ *(*$r > 0$*,* $-\pi < \theta < \pi$*)* と表すとき、

$$\mathrm{Log} z = \log r + i\theta$$

となる。

Proof. まず、一般論から「不定積分」は微分可能でしたがって解析関数を定める。前半は、$0 < x < 2$ に限定して一致の定理を使う。後半は、円弧と線分の組み合わせで線積分を計算する。 □

上の「不定積分」表示をさらに拡張すると、経路の取り方（正確には、そのホモトピー）に依存した「多価関数」が出現する。すなわち、上で導入した対数関数 $\mathrm{Log} z$ を、その定義域を越えて解析接続すると解析接続の「経路」に依存した「関数」

$$\log z = \int_{C:1\to z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

が得られる。これは、z のみならず、1 から z に到達するまでの経路（のホモトピー）に依存する量なので、正しくは関数と呼べないものではあるが、値の不定性は角の表示の不定性 $2\pi i\mathbb{Z}$ だけであり、関数の様子が「ほぼ決まる」という意味で、「多価関数」(multivalued function) と呼び慣わしている。

例題 6.3. 複素平面で、1 から $z = -1$（の付近）へ、半円 $\{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| = 1, \Im\zeta \geq 0\}$ に沿って解析接続して得られる対数関数 $\log z$ は、$z = -1$ のまわりで、

$$\log z = \pi i + \int_0^1 \frac{z+1}{t(z+1)-1} dt$$

という積分表示を持ち、したがって、

$$\pi i - (z+1) - \frac{1}{2}(z+1)^2 - \frac{1}{3}(z+1)^3 - \dots$$

とテーラー展開される。

例題 6.4. 正数 $r > 0$ に対して、定積分

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{x+i} dx$$

の値を求めて見よう。

コーシーの積分定理により、

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{x+i} dx = -\int_{C} \frac{1}{z+i} dz$$

である。ここで、C は $-i$ を中心とした半径 $\sqrt{r^2+1}$ の円周上を r から $-r$ に反時計廻りに向かう円弧を表す。

円弧 C の開きを表す角度 2θ は、

$$\tan\theta = r$$

を満たすので、

$$\int_{C} \frac{1}{z+i} dz = 2i\theta = 2i \arctan r$$

となって、これから

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{x+i} dx = -2i \arctan r$$

である。

準備が整ったので、導入部分で述べた「手品」のタネを明かしておこう。複素数 $\zeta \neq -1$ に対して成り立つ

$$1 - \zeta + \cdots + (-1)^m \zeta^m = \frac{1 + (-1)^m \zeta^{m+1}}{1+\zeta}$$

を $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 内の経路で積分すると、

$$z - \frac{1}{2} z^2 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m+1} z^{m+1} = \int_0^z \frac{1 + (-1)^m \zeta^{m+1}}{1+\zeta}\, d\zeta$$

を得る。ここで、$m = 2n,\ z = i$ を代入すると、

$$i \left(1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right) \\ = \int_0^i \frac{1 + \zeta^{2n+1}}{1+\zeta}\, d\zeta.$$

右辺の積分は、積分経路を it $(0 \leq t \leq 1)$ に取っておくと、$n \to \infty$ のとき、

$$\int_0^i \frac{1}{1+\zeta}\, d\zeta = \log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} i$$

に近づく。

例題 6.5. 積分

$$\int_0^{+\infty} x^a F(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_j \mathrm{Res}_{c_j}(z^a F(z))$$

の計算。ただし、$0 < a < 1$, で $F(z)$ は、正半直線 $[0, \infty)$ 上にない有限個の点 $c_1, \ldots, c_n$ と 0 を除いた複素平面上で定義された正則関数で、

$$F(z) = O(1/|z|^2)(z = \infty), \quad zF(z) = O(1)(z = 0)$$

なるもの。(無限遠点で 2 位以上の零点、原点で高々1 位の極。)

Proof. 小さな半径 r と大きな半径 R の間の円環状の領域から、正半直線 $(0, \infty)$ を含む上下の開き角 $\epsilon > 0$ の扇形の図形を除いた部分を D とすると、D は単連結であるから、D(の近傍)上の正則関数 $z^a = e^{a \log z}$ として、$(-t)^a = e^{\pi a i}$ となる分枝を取って、関数 $f(z) = z^a F(z)$ に留数定理を適用すれば、

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{c_j}(f)$$

となる。この左辺の線積分は、

$$\int_r^R f(\rho e^{i\epsilon}) e^{i\epsilon} d\rho + \int_\epsilon^{2\pi - \epsilon} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \\ - \int_r^R f(\rho e^{i(2\pi-\epsilon)}) e^{i(2\pi-\epsilon)} d\rho - \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta$$

であるので、$F(z) = O(1/|z|^2)$ $(z \to \infty)$, $zF(z) = O(1)$ $(z \to 0)$ に注意して極限 $r \to +0$, $R \to +\infty$ を取ると、

$$\int_0^{+\infty} f(\rho e^{i\epsilon}) e^{i\epsilon} d\rho - \int_0^{+\infty} f(\rho e^{i(2\pi-\epsilon)}) e^{i(2\pi-\epsilon)} d\rho$$

となる。ここで、

$$f(\rho e^{i\beta}) = \rho^a e^{ia\beta} F(\rho e^{i\beta})$$

に注意して、さらに極限 $\epsilon \to +0$ を取ると、

$$(1 - e^{2\pi i a}) \int_0^{+\infty} \rho^a F(\rho) d\rho$$

に一致することが判る。 $\square$

例題 6.6. 上の公式で、$F(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ と取ると、原点以外の極は $z = 1$ ($n = 1$, $c_1 = 1$ ということ）であり、$z^{a-1}/(z+1)$ の $z = -1$ における留数は

$$e^{(a-1)\log z}|_{z=-1} = e^{\pi i(a-1)} = -e^{\pi i a}$$

となるので、

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1} dx = -2\pi i \frac{e^{\pi i a}}{1 - e^{2\pi i a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

リーマンは、複素平面にこだわる限り多価が避けられない対数関数の「一価関数化」を図るために、「無限小螺旋階段」状の「図形」を導入した。より一般に、いくつかの複素変数を「正則同型」で張り合わせた 2 次元図形（リーマン面 (Riemann surface) という）を考えて複素関数の「棲息する場所」と考えた。

他の有用な例として、リーマン球面。これは、二つの複素平面、$\mathbb{C}_z$ と $\mathbb{C}_w$ のうち、原点を除いた部分を、関係、

$$w = \frac{1}{z}$$

により張り合わせたもの。位相（空間）としては、重なっている部分の無駄を省けば、$\{z \in \mathbb{C}_z; |z| \leq 1\}$, $\{w \in \mathbb{C}_w; |w| \leq 1\}$ という二つの円板の周囲を上の関係で張り合わせたものと思えるので、球面と同一視できる。このようにして得られるリーマン面をリーマン球面と呼び $\overline{\mathbb{C}}$ と書く。リーマン球面はまた、複素平面 $\mathbb{C}_z$ に、$w = 0$ に対応する点（無限遠点）∞ を付け加えたものと見ることもでき、$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ といった書き表すことも多い。

いずれにしても、リーマン球面はただの球面ではなく、複素数による座標表示を併せ持ったものと理解すべきである。

例題 6.7. 領域 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の解析関数 $1/z^n$ は、リーマン球面から原点を除いた $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の解析関数に拡張できて、$\mathbb{C}_w$-表示では、w^n と表わされる。

有理型関数（meromorphic function）とは、$\overline{\mathbb{C}}$ に値を取る複素変数可微分関数のこと。リーマン球面に関連したいくつかの結果。

定理 6.8. $\overline{\mathbb{C}}$ 全体で定義された有理型関数は、有理関数に限る。

問 44. これを示せ。

定理 6.9. リーマン球面をリーマン球面に移す正則全単射は、一次分数変換に限る。

問 45. これを示せ。

定理 6.10. 単連結リーマン面は、リーマン球面、複素平面、単位円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ のいずれかと正則同型になる。

例題 6.11. 指数関数は、複素平面から $\log z$ の定めるリーマン面（無限螺旋階段）への正則同型を定める。

7 最大値原理とその応用

正則関数の冪級数表示を得る際に使った公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

で、$C = \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta - z| = r\}$（向きは反時計廻り）としてパラメータ表示 $\zeta = z + re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$、を使うと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta$$

を得る。これから導かれる不等式

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|d\theta$$

により、もし $|f(z)|$ が、$|f(\zeta)|$ $(|\zeta - z| \leq r)$ の最大値になっていたとすると、

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|d\theta \leq |f(z)|$$

となって、

$$|f(z + re^{i\theta})| = |f(z)|, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

ところが最初の公式は、$f(z)$ が、円周上の点 $\{f(z+r^{i\theta}); 0 \leq \theta < 2\pi\}$ の重心に一致することを主張するので、この円周上の点の集まりは実は一点に集中しており、$f(z) = f(z+re^{i\theta})$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ である。$r > 0$ は十分小さい限り任意であるから、$f(\zeta)$ は定数関数である。

まとめると、解析関数 $f(z)$ は定数関数でなければ、定義域の内部で $|f(z)|$ が極大値を取ることはない。

定理 7.1 (最大値原理 (maximum modulus principle))**.** 解析関数の絶対値は、定義域の境界で最大値を取る。

この定理は様々な応用を持つ。理論的なところでは、

定理 7.2 (代数学の基本定理)**.** 複素数を係数とする多項式で定数でないものは、必ず一次式の積に分解される。

Proof. もし、定数でない多項式関数 $f(z)$ が零点をもたなければ、$1/f(z)$ は複素平面全体で定義された解析関数で、

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0$$

となるから、最大値原理に反する。 □

補題 7.3. 半円 $\{|z| < r; \Re z > 0\}$ の上で定義された解析関数が、

$$\lim_{z\to iy} f(z) = 0 \quad \mathit{for}\ y \in (-r, r),$$

をみたせば、恒等的に零に等しい。

Proof. 円全体で連続関数を

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } \Re z > 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義すれば、$h(z)$ はコーシーの積分公式

$$\oint_C h(z)dz = 0$$

を満たし、したがって解析関数である。一方、$h(z)$ は円の左半分で恒等的に零であるから、円の右半分でも零となる。 □

定理 7.4 (三線定理 (three line theorem)). 帯状閉領域 $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \Re z \leq 1$ の上で定義された有界連続関数 $f(z)$ で、$\overline{D}$ の内部で解析的なものに対して、

$$M_x = \sup\{|f(x+iy)|; y \in \mathbb{R}\}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

とおくと、不等式

$$M_x \leq M_0^{1-x} M_1^x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

が成り立つ。

Proof. もし、$M_0 =$ または $M_1 = 0$ であれば、前の補題から $f(z)$ は恒等的に零となり、したがって定理の主張は自明なものになる。

そこで、$M_0 \neq 0$, $M_1 \neq 0$ と仮定する。関数 $F(z) = f(z) M_0^{z-1} M_1^{-z}$ を考えると、これも帯状閉領域で連続かつその内部で解析的でさらに、

$$|F(z)| = |f(z)| M_0^{\Re z - 1} M_1^{-\Re z}$$

は有界であり、

$$|F(iy)| = |f(iy)| M_0^{-1} \leq 1, \qquad |F(1+iy)| = |f(1+iy)| M_1^{-1} \leq 1$$

となる。そこで、$\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$ であれば、最大値原理により、$|F(z)| \leq 1$ となって、不等式 $|f(z)| \leq M_0^{1-\Re z} M_1^{\Re z}$ が得られる。

そうでないときでも、（十分大きい）自然数 n に対して、関数 $F_n(z) = F(z) e^{(z^2-1)/n}$ を考えると、

$$|F_n(iy)| = |F(iy)| e^{-(y^2+1)/n} \leq |F(iy)| \leq 1,$$
$$|F_n(1+iy)| = |F(1+iy)| e^{-y^2/n} \leq |F(1+iy)| \leq 1$$

であり、さらに

$$|F_n(z)| = |F(z)| e^{-(y^2+1-x^2)/n} \to 0 \quad \text{as } y \to \infty \text{ with } 0 \leq x \leq 1$$

であるから、$|F_n(z)| \leq 1$ がわかり、$n \to \infty$ とすると、

$$|F(z)| = \lim_{n\to\infty} |F_n(z)| \leq 1$$

となってめでたい。 □

例題 7.5. 任意に与えられた自然数 n と正数列 $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_n,$ $c_1, \ldots, c_n$ および実数 $0 \leq x \leq 1$ に対して、不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^x \, b_j^{1-x} \, c_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} b_j c_j \right)^{1-x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j c_i \right)^{x}$$

が成り立つ。

とくに、$b_j = c_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ と取れば、

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^x \leq n^{1-x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^{x}$$

である。

Proof. 複素数 z に対して、

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j a_j^z b_j^{1-z}$$

と置くと、$z = x + iy$ に対して、

$$|f(z)| \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \left| a_j^{x+iy} b_j^{1-x-iy} \right| = \sum_{j=1}^{n} b_j c_j \left(\frac{a_j}{b_j} \right)^{x} = f(x)$$

であるから、$f(z)$ は $0 \leq \Re z \leq 1$ で有界であり、三線定理を使えば、

$$|f(x+iy)| \leq f(0)^{1-x} f(1)^x, \qquad 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}$$

となって、とくに $y = 0$ と置けば、最初の不等式が得られる。 □

Remark . 上の例題の最後の不等式に関連して、

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^{x} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

は次のように初等的に示すことができる。

両辺は $a = (a_1, \ldots, a_n)$ の同次式であるから、$a_1 + \cdots + a_n = 1$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^x \geq 1$$

を示せばよく、これは、$0 \leq a_j \leq 1$ に注意して、$a_j^x \geq a_j$ を足し合わせると得られる。

例題 7.6 (Hölder's inequality)**.** 正数 $p \geq 1$, $q \geq 1$ は関係 $p^{-1} + q^{-1} = 1$ を満たすものとする。任意に与えられた自然数 n と複素数列 $z_1, \ldots, z_n$, $w_1, \ldots, w_n$ に対して、不等式

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j w_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^q \right)^{1/q}$$

が成り立つ。

Proof. 例題 6.5 で、$a_j = |z_j|^p$, $b_j = |w_j|^q$ と置いて、$x = 1/p$ を考えると、上の不等式が得られる。このとき、a_j, b_j の中に 0 が含まれていても、極限操作で、不等式自体は正しいことに注意。 □

問 46. 上の説明で、極限操作の部分を確かめよ。