問題解答7

文責：松田 一徳

平成22年7月16日

問43 (i) $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対し，$R_a = \inf\{|a-t| \mid t \in \mathbb{R}\}$ とおくと，$F(z)$ は $|z-a| < R_a$ で

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

とべき級数展開されることを示せばよい．

$0 < \rho < R_a$ を任意に取り固定する．$|z-a| \le \rho$ で考えると，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\frac{|z-a|}{|t-a|} \le \frac{\rho}{R_a} < 1$ だから

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-a)-(z-a)} &= \frac{1}{t-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}} \end{aligned}$$

となる．従って

$$\frac{f(t)}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(t)}{(t-a)^{n+1}}$$

となる．これは $t \in \mathbb{R}$ に対し一様収束する．実際，$\mathbb{R}$ 上で $|f(t)| \le M$ と押さえられるとすると，

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t)}{t-z} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(z-a)^n f(t)}{(t-a)^{n+1}} \right| &= \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(t)}{(t-a)^{n+1}} \right| \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-a|^n f(t)}{|t-a|^{n+1}} \\ &\le \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{R_a^{n+1}} \\ &\le \left(\frac{\rho}{R_a}\right)^{k+1} \frac{M}{R_a-\rho} \\ &\to 0 \ (k \to \infty) \end{aligned}$$

となることからわかる．これにより，積分と極限が交換可能であるから

$$\begin{aligned} F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \end{aligned}$$

となる．よって

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$$

とおけば，$|z-a| \leq \rho$ の範囲で

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

が得られる．ここで ρ は $0 < \rho < R_a$ を満たす任意の数だったから，この展開は $|z-a| < R_a$ の各点で成立する．これで主張が示せた．

(ii) 十分小さい $r > 0$ をとる．線分 $-R \leq t \leq x-r$，半円 $x + re^{i\theta}(-\pi \leq \theta \leq 0)$，線分 $x+r \leq t \leq R$ を合わせた経路を C_x^- とする．$R \to \infty$ を考えると，

$$\lim_{y \to 0} F(x+iy) = \int_{C_x^-} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

となる．また，$-R \leq t \leq x-r$，半円 $x + re^{i\theta}(\pi \geq \theta \geq 0)$，線分 $x+r \leq t \leq R$ を合わせた経路を C_x^+ とすると，同じようにして

$$\lim_{y \to 0} F(x-iy) = \int_{C_x^+} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

が得られる．さらに，経路 $-C_x^+ + C_x^-$ は正の向きの円周 $|t-x| = r$ だから，

$$\begin{aligned} \lim_{y \to 0} (F(x+iy) - F(x-iy)) &= \int_{|t-x|=r} \frac{f(t)}{t-x} dt \\ &= \int_{|t-x|=r} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} dt + \int_{|t-x|=r} \frac{f(x)}{t-x} dt \\ &= 2\pi i f(x) \end{aligned}$$

となる．

(iii) 略

問 44 有理関数が $\overline{\mathbb{C}}$ 上の有理型関数になることは明らか．

逆を示す．f を $\overline{\mathbb{C}}$ 全体で定義された有理型関数とする．このとき f の極は高々有限個である．∞ 以外の極を $b_1, \ldots, b_n$ とし，$b_{n+1} = \infty$ とおく．さらに，各 b_k のまわりで Laurent 展開したときの主要部を

$$P_k(z) = \sum_{l=1}^{m_k} \frac{c_{-l}^{(k)}}{(z-b_k)^l} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$$P_{n+1}(z) = c_1^{(n+1)} z + c_2^{(n+1)} z^2 + \cdots + c_{m_{n+1}}^{(n+1)} z^{m_{n+1}}$$

とする．

$$g(z) = f(z) - (P_1(z) + P_2(z) + \cdots + P_{n+1}(z))$$

とおけば，g は b_k $(1 \leq k \leq n+1)$ 以外で正則である．また，各 $k = 1, \ldots, n$ に対し

$$g = (f - P_k) - (P_1 + \cdots + P_{k-1} + P_{k+1} + \cdots + P_{n+1})$$

と書きなおすことにより，b_k は g の除去可能な特異点であることがわかる．従って g は $\mathbb{C}$ 上の正則関数と考えてよい．

一方，f の ∞ のまわりでの Laurent 展開の定数項を c とすると

$$\lim_{z\to\infty}(f(z)-P_{n+1}(z))=c$$

となる．また，$k=1,\ldots,n$ に対し

$$\lim_{z\to\infty}P_k(z)=0$$

である．従って

$$\lim_{z\to\infty}g(z)=\lim_{z\to\infty}(f(z)-P_{n+1}(z))-\lim_{z\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P_k(z)=c$$

となる．

以上により，g は有界な整関数であるから，Liouville の定理により g は定数である．従って，結局

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}P_k(z)+P_{n+1}(z)+c$$

と書ける．この右辺は明らかに有理関数である．

問 45 一次分数変換

$$\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+b}\ \ (ad-bc\neq 0)$$

は，行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ (\mathrm{det}A\neq 0)$$

で与えられる．これを $\varphi_A(z)$ と書くことにする．

関数の合成は行列の積に対応していること，単位行列 E が恒等写像を定めること，そして逆行列には逆関数が対応していることから，リーマン球面をリーマン球面にうつす正則全単射は一次分数変換に限ることがわかる．

問 46 略