問題解答 6

文責：松田 一徳

平成 22 年 7 月 5 日

問 40 特異点は $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ で，これらは全て 1 位の極であるから，各特異点での留数は

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{z=n\pi} &= \lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) \frac{e^z}{\sin z} \\ &= (-1)^n e^{n\pi} \end{aligned}$$

である．

問 41 (1) 積分経路として，線分 C_1: $[-R, R]$ と上半円 C_2: $z = Re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi)$ からなる閉曲線 C を考える．ここで $R > 1$ としておく．すると

$$\int_C \frac{1}{z^2+z+1} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2+z+1} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2+z+1} dz$$

である．

$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，左辺は留数定理から

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z=w} \\ &= 2\pi i \frac{1}{\omega - \overline{\omega}} \\ &= 2\pi i \frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる．

また，$|z^2 + z + 1| \ge R^2 - R - 1$ であるから，

$$\left| \int_{C2} \frac{1}{z^2+z+1} dz \right| \le \frac{|C_2|}{R^2 - R - 1} = \frac{\pi R}{R^2 - R - 1} \to 0 \ (R \to +\infty)$$

となる．従って

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

となる．

(2) $n = 1$ のときは明らかに $+\infty$ となる．

$n \ge 2$ のとき，積分経路として，線分 C_1: $[0, R]$，円弧 C_2: $z = Re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \frac{2\pi}{n})$ および線分 C_3: $z = e^{\frac{2\pi i}{n}} t$ $(R \ge t \ge 0)$ からなる閉曲線 C を考える．ここで $R > 1$ としておく．すると

$$\int_C \frac{1}{z^n+1} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^n+1} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^n+1} dz + \int_{C_3} \frac{1}{z^n+1} dz$$

である．

ここで，$\zeta = e^{\frac{\pi}{n}}$ とおく．

$$\frac{1}{z^n+1} = \frac{1}{(z-\zeta)(z-\zeta^3)\cdots(z-\zeta^{2n-1})}$$

となることから，左辺は留数定理により

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=\zeta} \\ &= 2\pi i \frac{1}{(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)\cdots(\zeta-\zeta^{2n-1})}\end{aligned}$$

となる．

また，$|z^n+1| \geq R^n - 1$ であることから

$$\left|\int_{C_2} \frac{1}{z^n+1} dz\right| \leq \frac{|C_2|}{R^n-1} \leq \frac{\pi R}{R^n-1} \to 0 \ (R \to +\infty)$$

となり，さらに

$$\int_{C_1} \frac{1}{z^n+1} dz + \int_{C_3} \frac{1}{z^n+1} dz = (1-\zeta^2)\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1} dx$$

となる．

$(1-\zeta^2)(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)\cdots(\zeta-\zeta^{2n-3}) = n$ となることと，$\zeta - \zeta^{2n-1} = 2i\sin\frac{\pi}{n}$ となることから，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1} dx &= 2\pi i \frac{1}{n \cdot 2i\sin\frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

となる．

問 42 $f(z)$ の収束半径は 1 であるが，解析接続すると

$$z\log(1-z) - \log z + z$$

という，$\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ で定義された解析関数を得る．