問題解答5

文責：松田 一徳

平成22年6月17日

問 36 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とすると，

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\partial D}(udx - vdy) + i\int_{\partial D}(udy + vdx)$$

である．ここで，Green の公式から

$$\int_{\partial D}(udx - vdy) = \iint_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy,$$

$$\int_{\partial D}(udy + vdx) = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f(z)dz &= \iint_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy + i\iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy \\ &= \iint_D i\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)dxdy \\ &= 2i\iint_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z)dxdy\end{aligned}$$

となる．

問 37

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z+z^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\frac{1}{1-\omega} - \frac{1}{1-\bar{\omega}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i}\{(1+\omega+\omega^2+\cdots) - (1+\bar{\omega}+\bar{\omega}^2+\cdots)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i}(\omega - \bar{\omega} + \omega^2 - \bar{\omega}^2 + \cdots).\end{aligned}$$

問 38 $w = 2z + z^2$ とおくと，$z = -1 \pm \sqrt{1+w}$ である．$w = 0$ で $z = 0$ を満たすのは $z = -1 + \sqrt{1+w}$ である．従って，

$$\begin{aligned}g(w) &= -1 + \sqrt{1+w} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} w^n\end{aligned}$$

となる．

問 39 略