問題解答4

文責：松田 一徳

平成22年6月17日

問32 定理4.7から, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n$の収束半径は$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}$の収束半径と一致するので1となる.

また, $z=1$のとき$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$は発散する．$|z|=1$かつ$z\neq 1$のとき，$S_n=1+z+\cdots+z^n$とおくと,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}z^n &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}(S_n-S_{n-1})\\ &= \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)S_n+\frac{1}{N}S_N-1\\ &= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n(n+1)}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}+\frac{1}{N}\frac{1-z^{N+1}}{1-z}-1\end{aligned}$$

となることから，収束することがわかる．従って，求める収束域は$\{z\mid |z|\leq 1,\, z\neq 1\}$である.

問33 経路Cの方程式を$z=z(t)$ $(\alpha\leq t\leq\beta)$とすると,

$$\int_C f^{'}(z)dz=\int_{\alpha}^{\beta}f^{'}(z(t))z^{'}(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d}{dt}f(z(t))dt=[f(z(t))]_{\alpha}^{\beta}=f(b)-f(a)$$

となる.

問34 線分C_1,C_2,C_3は，それぞれ

$$C_1\colon t,\ \ C_2\colon 1+ti,\ \ C_3\colon t(1+i)\ \ (0\leq t\leq 1)$$

とパラメトライズされるから,

$$\begin{aligned}\int_{C_1}z^2dz+\int_{C_2}z^2dz &= \int_0^1 t^2dt+\int_0^1(1+ti)^2idt\\ &= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1+\left[\left(t-\frac{t^3}{3}\right)i-t^2\right]_0^1\\ &= -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i\end{aligned}$$

となる．一方,

$$\begin{aligned}\int_{C_3}z^2dz &= \int_0^1 t^2(1+i)^3dt\\ &= (1+i)^3\left[\frac{t^3}{3}\right]\\ &= -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i\end{aligned}$$

となる．従って両者は一致する．

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} e^z dz + \int_{C_2} e^z dz &= \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 e^(1+ti)idt \\
&= [e^t]_0^1 + [e^{1+ti}]_0^1 \\
&= e^{1+i} - 1
\end{aligned}
$$

となる．一方，

$$
\begin{aligned}
\int_{C_3} e^z dz &= \int_0^1 e^{t(1+i)}(1+i)dt \\
&= [e^{1+ti}]_0^1 \\
&= e^{1+i} - 1
\end{aligned}
$$

となる．従って両者は一致する．

$f(z) = x + y$ については省略する．