問題解答3

文責：松田 一徳

平成22年5月20日

問25

$$
\begin{aligned}
(z^n)' &= \lim_{c\to 0}\frac{(z+c)^n - z^n}{c}\\
&= \lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\left\{nz^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}c^2 + \cdots + c^n\right\}\\
&= nz^{n-1}
\end{aligned}
$$

から従う.

問26

$$
\begin{aligned}
\{f(z)g(z)\}' &= \lim_{c\to 0}\frac{f(z+c)g(z+c) - f(z)g(z)}{c}\\
&= \lim_{c\to 0}\frac{f(z+c)g(z+c) - f(z)\{g(z+c)\} + f(z)\{g(z+c)\} - f(z)g(z)}{c}\\
&= \lim_{c\to 0}\frac{g(z+c)\{f(z+c) - f(z)\} + f(z)\{g(z+c) - g(z)\}}{c}\\
&= f'(z)g(z) + f(z)g'(z).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{f(z)}\right\}' &= \lim_{c\to 0}\frac{\frac{1}{f(z+c)} - \frac{1}{f(z)}}{c}\\
&= \lim_{c\to 0}\frac{1}{f(z+c)f(z)}\cdot\frac{f(z) - f(z+c)}{c}\\
&= -\frac{f'(z)}{f(z)^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{f(g(z))\}' &= \lim_{c\to 0}\frac{f(g(z+c)) - f(g(z))}{c}\\
&= \frac{f(g(z+c)) - f(g(z))}{g(z+c) - g(z)}\cdot\frac{g(z+c) - g(z)}{c}\\
&= f'(g(z))g'(z).
\end{aligned}
$$

問27

$$
\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)
$$

であるから,

$$
\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)
$$

となる．

問 28 $u(x,y)=e^x a\cos y$, $v(x,y)=e^x\sin y$ に対して定理 4.6 を用いると，

$$e^x a\cos y=e^x\cos y,\ -e^x a\sin y=-e^x\sin y$$

となる．従って $a=1$ となる．

問 29 問 27 と定理 4.6 から従う．

問 30 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ に対し，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

であるから，$f^{'}(z)=0$ とすると $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$ となる．これと定理 4.6 から，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

を得る．従って u,v は定数だから，f も定数である．

問 31 $|f(z)|=0$ のときは明らか．$|f(z)|\neq 0$ とする．

$$0=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}|f(z)|^2=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\{f(z)\overline{f(z)}\}=f(z)\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\overline{f(z)}=f(z)\overline{f'(z)}$$

であるから，これと $|f(z)|\neq 0$ から $f^{'}(z)=0$ となる．従って $f(z)$ は定数である．