問題解答2

文責：松田 一徳

平成 22 年 5 月 12 日

問 17 $|z| \leq 1$ のとき，

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{1}{n^a}z^n\right| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$$

となる．$a > 1$ であるからこれは収束する．また，$|z| > 1$ のとき発散することが分かるから，収束域は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ である．

問 18 略

問 19 $c_n = n!$ とおき，系 3.4 を用いると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

となる．従って収束半径は 0 である．

問 20 $f(z) = \sum_{m\geq 0} f_m z^m$, $g(z) = \sum_{n\geq 0} g_n z^n$ とおく．

$$\begin{aligned}
f(z)g(z) &= \sum_{k\geq 0}(f_0g_k + f_1g_{k-1} + \cdots + f_kg_0)z^k \\
&= \sum_{k\geq 0}(g_0f_k + g_1f_{k-1} + \cdots + g_kf_0)z^k \\
&= g(z)f(z)
\end{aligned}$$

となる．従って交換法則を満たす．結合法則も満たすことが確かめられる．

問 21 $f(z)$ が $|z| < r$ で，$g(z)$ が $|z| < s$ で絶対収束するから，$f(z)g(z)$ は $|z| < \min\{r, s\}$ で絶対収束する．従って，$f(z)g(z)$ の収束半径は $\min\{r, s\}$ 以上である．

問 22 $f(z) = \sum_{m\geq 0} f_m z^m$, $g(z) = \sum_{n\geq 0} g_n z^n$ とおく．$f(z)g(z) = 1$ とすると，$f_0g_0 = 1, f_0g_1 + f_1g_0 = 0, f_0g_2 + f_1g_1 + f_2g_0 = 0, \ldots$ となる．これが解を持つのは $f_0 \neq 0$ のときで、かつそのときに限る．

問 23

$$\begin{aligned}
e^z\sqrt{1+z} &= \left(1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{128}z^4 + \cdots\right) \\
&= 1 + \frac{3}{2}z + \frac{7}{8}z^2 + \frac{17}{16}z^3 + \frac{11}{128}z^4 + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1-z}{1-z^3} &= (1-z)(1 + z^3 + z^6 + \cdots) \\
&= 1 - z + z^3 - z^4 + \cdots
\end{aligned}$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \cdots$$

問 24

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots , \log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots$$

であるから,

$$\begin{aligned} e^{\log(1+z)} &= 1 + \frac{1}{1!}\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots\right)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots\right)^4 \\ &= 1 + z \end{aligned}$$

となる.