問題解答

文責：松田 一徳

平成 22 年 5 月 5 日

問 1 略
問 2

$$
\begin{aligned}
0 \leq \frac{1}{a+k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{a+x}dx = \int_k^{k+1} \frac{x-k}{(a+k)(a+x)}dx &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{(a+k)(a+x)}dx \\
&\leq \frac{1}{(a+k)^2}
\end{aligned}
$$

だから，極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+n}-\log(a+n)\right)$$

は存在する．従って，極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+n}-\log\frac{a+n}{a+1}\right)$$

も存在し，それは正の数である．
問 3 無限積分

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\log x)^a}dx$$

の収束性を調べればよい．$t=\log x$ とおくと，$dx = xdt$ であるから，

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\log x)^a}dx = \int_2^{+\infty}\frac{1}{t^a}dt$$

となる．従って，$0<a\leq 1$ のとき発散し，$1<a$ のとき収束する．
問 4 $\cos x$ についての展開式

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

から，x が十分小さければ $\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}$ となる．従って $1-\cos x\leq\frac{x^2}{2}$ から $1-\cos\frac{\pi}{n}\leq\frac{\pi^2}{2n^2}$ となる．
$\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\pi^2}{2n^2}$ は収束するから，$\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ は絶対収束する．
問 5 略

問 6 次数ごとにまとめて考えると,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\right) &= 1+\left(\frac{x+y}{1!}\right)+\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{2!}\right)+\cdots \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{(x+y)^k}{k!}\end{aligned}$$

となる.

問 7 略

問 8 $zw = xu - yv + i(xv + yu)$ であるから,

$$|zw|^2 = |z|^2|w|^2 \iff (xu-yv)^2+(xv+yu)^2 = (x^2+y^2)(u^2+v^2)$$

となる.

問 9 略

問 10 $|z| < 1$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty}(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) = \frac{1}{1-z}$$

となる.

問 11 略

問 12 略

問 13 $z = i, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i, \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ である.

問 14 $(x,y) = (\frac{5}{2},\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ である.

問 15 略

問 16 $x^2-y^2=-1$ かつ $2xy=0$ から $(x,y)=(0,1)$ である.