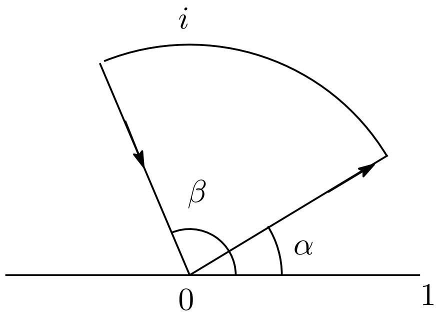
CA3 (2010/7/1)

実数 $0 \le \theta < 2\pi$ に対して、複素平面上の原点 0 から点 $e^{i\theta}$ に至る線分を L_θ で表す。また $0 < \alpha < \beta < \pi$ に対して、図のような扇型の外周（向きは反時計回り）を C とする。



$\boxed{1}$

(i) 線積分

$$\int_{L_\theta} |z|^2\,dz$$

の値を求めよ。

(ii) 周回積分

$$\oint_C |z|^2\,dz$$

の値を求めよ。

(i) 線分 L_θ のパラメータ表示として、$z(t) = te^{i\theta}$ $(0 \le t \le 1)$ を採用すると、

$$\int_{L_\theta} |z|^2\,dz = \int_0^1 |z(t)|^2 \frac{dz}{dt}\,dt = \int_0^1 t^2 e^{i\theta}\,dt = \frac{1}{3}e^{i\theta}.$$

(ii) 円弧の部分のパラメータ表示として $C_{\alpha,\beta} : z(t) = e^{it}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ を採用すると、

$$\int_{C_{\alpha,\beta}} |z|^2\,dz = \int_\alpha^\beta ie^{it}\,dt = e^{i\beta} - e^{i\alpha}$$

であるから、

$$\oint_C |z|^2\,dz = \int_{L_\alpha} |z|^2\,dz + \int_{C_{\alpha,\beta}} |z|^2\,dz - \int_{L_\beta} |z|^2\,dz = \frac{1}{3}e^{i\alpha} + e^{i\beta} - e^{i\alpha} - \frac{1}{3}e^{i\beta} = \frac{2}{3}(e^{i\beta} - e^{i\alpha}).$$

$\boxed{2}$

(i) コーシーの積分定理について説明せよ。

(ii) 周回積分

$$\oint_C \frac{1}{e^{iz}+1}\,dz$$

の値を求めよ。

(i) 教科書を見よ。

(ii) 被積分関数は、$e^{iz}+1=0$、すなわち $z \in \{\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots\}$ 以外で (複素) 微分可能であることに注意すると、閉曲線 C の内部には、これら除外点が含まれないことから、コーシーの積分定理の成立条件を満たす。したがって

$$\oint_C \frac{1}{e^{iz}+1}\,dz = 0$$

である。