$\boxed{1}$

(i) 複素数の極表示とオイラーの関係式について述べよ。

(ii) 方程式 $z^3 = -1 + \sqrt{3}i$ の複素数解で $\mathrm{Im}\, z > 0$ となるものを $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\, 0 \leq \theta < 2\pi)$ の形ですべて求めよ。

(iii) (ii) で求めた複素数を図示し、それらの和の極表示を求めよ。

(i) 複素数 z を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r \geq 0$, θ は実数）の形で表したものを z の極表示という。極表示の $\cos\theta + i\sin\theta$ の部分を複素指数の形に

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

とおいたものをオイラーの関係式という。

(ii) $-1 + \sqrt{3}i = 2e^{2\pi i/3}$ という表示を使えば、方程式は

$$r^3 e^{3i\theta} = 2e^{2\pi i/3}$$

となるので、$0 \leq 3\theta < 6\pi$ に注意して両辺を比較すれば、

$$z = 2^{1/3}e^{2\pi i/9}, \quad 2^{1/3}e^{8\pi i/9}, \quad 2^{1/3}e^{14\pi i/9}$$

であるが、このうち $\mathrm{Im} z > 0$ となるのは、

$$2^{1/3}e^{2\pi i/9}z, \quad 2^{1/3}e^{8\pi i/9}$$

の２つである。

(iii) (ii) で求めた２つの複素数の成す角が１２０度であることに注意すれば、その和は、

$$2^{1/3}e^{5\pi i/9}.$$

$\boxed{2}$

(i) 複素級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が絶対収束することの定義と意義（重要な性質）について述べよ。

(ii) 実数 θ に対して、$|1 - e^{2i\theta}|$ を $\sin\theta$ で表せ。

(iii) 複素級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{i\pi/n}\right)$$

が絶対収束するか否か判定せよ。

(i) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が絶対収束するとは、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$$

となること。このとき、級数 $\sum_{n\geq 1} c_n$ は収束し、その値は和をとる順序によらずに一意的に定まる。

(ii)

$$|1 - e^{2i\theta}| = |e^{i\theta}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})| = |e^{-i\theta} - e^{i\theta}| = |-2i\sin\theta| = 2|\sin\theta|.$$

(iii) (ii) と $\sin\theta \geq (2/\pi)\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ に注意すれば、

$$|1 - e^{\pi i/n}| = 2\left|\sin\frac{\pi}{2n}\right| \geq \frac{2}{n}$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - e^{\pi i/n}| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = \infty$$

となり、絶対収束しない。