微積分の手習い

山上　滋

2015 年 3 月 13 日

目次

以前から気になっていたことだが、稽古のための手引きを作ろうと思い立った。難儀なことではあるが、まずはやってみることにする。風まかせ波まかせの不動明王。２０１１年３月。

あれから早４年。手習いならぬ手直しすらままならぬもどかしさもまた。

1　微分の公式

微分の意味は、幾何学的には接線の傾き。力学的には、変数を時間のパラメータ t として、**速度** (velocity) ということになる。とくに、３次元空間における質点の運動が、

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

というベクトル値関数で表されているとき、その速度（ベクトル）は、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

によって与えられる。

導関数の微分を繰り返すことで、高次（高階ともいう）の微分も考えられるが、微分の意味は、２回までが重要だ。これは、３回以上の微分が無意味であることを意味しない。

そこで２回微分の意味である。これを最初に認識したのはニュートンで、力学でいうところの加速度（＝速度の微分）においてであった。乗り物などで日常的に経験しているあれである。加速度は、目を閉じていても感じられるものであるが、これは大げさながら力が質量と加速度の積であるという物理法則*1 に基づいている。

２回微分の幾何学的意味となると曲線の凹凸との関係ということになるが、こちらは、ヨハン・ベルヌーイとかその辺りのようである。

さて、２回微分の心理学方面への応用として、つぎのような解釈はどうであろうか。ある時刻 t のある人の状態（たとえば経済的）を関数 $f(t)$ で表したときに、

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t)$$

はその時刻における希望の大きさを表す。良い方向への変化の手応えが欲しい、震災後の希望ありやなしや。

答えを知っているからといって、次の問題を飛ばしてはいけない。淡々と計算するだけであるが、定義を理解していないとできない。

問 1. 微分の定義に基づいて

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

を導いてみる。

連続関数は奥が深い、いや、底なしだ。ということで、次をやってみる。

問 2. 連続だが $x = 0$, $x = 1$ の二ヶ所で微分できない、実数全体で定義された関数を無数に作れ。あらゆる点で微分できない連続関数は存在すると思うか否か。

まあ、だまされ続けるのも人生。皆が皆、抜け目なくある必要はないが、しかし１００人に一人か二人は、という良識。同じような人間の同じような意見を集めるだけでは、大きな変化に対応できないんだな。

問 3. 合成関数の微分の公式が成り立つ理由として、高校の教科書では次のような「証明」があげられているのだが、実は欠陥がある。どこに問題点があるか考えよ。また、$o(h)$ 方式では、そのような不都合が生じないことを確認せよ。

---

*1　あえて誤解を招くかもしれない書き方をすれば、力学の基本法則をこの形で定式化したのは、ニュートンではなくオイラーであったことは意外と知られていない。

関数 $y = f(u)$ に関数 $u = g(x)$ を代入した合成関数 $f(g(x))$ の $x = a$ での微分を計算するために、$k = g(a+h) - g(a)$ とおいて、

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \frac{f((g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$

と書き直して、$x \to a$ のとき $g(x) \to g(a)$ であることに注意すれば、

$$\lim_{x \to a} \frac{f((g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = f'(g(a))$$

となるので、結局

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = f'(g(a))g'(a)$$

である。

微分の計算で大事な点は、対象となる式を基本関数の組合せとして正しく認識することである。これさえできれば、あとは微分の線型性、積の微分、合成関数の微分を適宜組合せて慎重にあるいは辛抱強く計算していくだけである。とくに積は沢山かけてあるとその分多くの項が出てきて結果が複雑になりやすい。

$$\begin{aligned}
(af(x) + bg(x))' &= af'(x) + bg'(x), \\
\Big(f(x)g(x)h(x)\Big)' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x), \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x).
\end{aligned}$$

基本関数は次の 5 種類、準基本関数の $\tan\theta$ を入れても 6 種類。そのすべてのグラフがサラサラと描けないといけない、いや、すぐ頭に浮かぶようでなくては。

定数関数 簡単すぎて関数と思えないかもしれないが、これも真っ当な関数。

$$f(x) = c.$$

べき関数（実数 α のとり方に応じた定義域の変化に注意）

$$x^\alpha.$$

指数関数と対数関数

$$e^x, \quad \log x.$$

この二つが互いの逆関数であることを認識せよ、グラフの上でも式の上でも。等式 $\log e^x = x$ は、対数の性質と $\log e = 1$ から馴染みやすいが、$e^{\log x} = x$ の方はすぐには見えないかも知れない。この二つは、実質的に同じ式を表しており、例えば $y = e^{\log x}$ とおいて、両辺の対数を取ると $\log y = \log x$ であるから、$y = x$ という正しい関係が得られる。

三角関数

$$\sin\theta, \quad \cos\theta, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

三角関数は、他にもあって全部で 6 種類か。直角三角形の二辺の比のとり方だけあるが、サインとコサインがあれば、残りはその簡単な組合せで書ける。そのサインとコサインにしても $\sin(\theta) = \cos(\pi/2 - \theta) = -\cos(\theta + \pi/2)$ であるから、実質一つとも思える。そうはいっても、上で挙げた 3 つくらいの冗長性は必要だ。

問 4. 基本関数のグラフを手早く正確に手書きせよ。その際に、グラフの形をまず描き、座標の目盛りはあとで入れるようにする。

関数を組合せる方法としては、加減乗除、それと合成（代入）である。逆関数も入れておいて良いのだが、とりあえずは、加減乗除代入と唱えておこう、六根清浄。

例 1.1.

$$1+2x+3x^2, \quad \frac{2x+1}{x-1}, \quad \sqrt{x^2-1}, \quad \log(1+x), \quad a^x$$

問 5. 次の式[*2] が基本関数のどのような組合せになっているか説明せよ。

$$y = x^{x^x}, \quad \sqrt{(1+x)(1+x^2)}, \quad y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

基本関数の微分

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\log|x|)' = \frac{1}{x} \ (x \neq 0), \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (x>0),$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2.$$

例 1.2.

(i) 正数 $a>0$ を底とする指数関数 $y=a^x$ の微分は、$a^x = e^{x\log a}$ と書きなおして（$a = e^{\log a}$ を使う)、合成関数の微分の公式を適用すれば、

$$\frac{d}{dx}a^x = e^{x\log a}\log a = a^x \log a.$$

(ii) 同じく実数 a に対して x の冪関数 x^a $(x>0)$ の微分は、$x^a = e^{a\log x}$ と書きなおして、合成関数の微分の公式を適用すれば、

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}.$$

問 6. 正数 $a>0$ を変化させるとき、指数関数 $y=a^x$ のグラフがどのように変わるか確認する。冪関数 $y=x^a$ のグラフについてはどうか。曲線 $|x|^a+|y|^a=1$ で、さわると痛いのは $a>0$ がどんなときか。

問 7. x^x $(x>0)$ の導関数を求めよ。

問 8. $x<0$ のとき、

$$(\log(-x))' = \frac{1}{x}$$

を確認。これと $x>0$ の場合をまとめて $(\log|x|)' = 1/x$ と書くことが多い[*3]。

例 1.3. 合成関数の微分を二重に行う計算。これは、深謀遠慮の例であるのだな。

$$\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

問 9. 上の例で、x の範囲 (関数の定義域) を (実数 a の正負で場合分けし) 吟味する。

商の微分は、公式として挙げないで欲しいものだ。覚える必要がないものなので。

[*2] 指数が積み重なった a^{b^c} のような場合、$a^{(b^c)}$ の意味か、$(a^b)^c$ の意味か紛らわしくないか。これは、案外どこにも書かれていないが、前者を表すのが慣習である。理由は簡単で、後者であれば、a^{bc} と書けばよいので。ということで、e^{x^2} とかの意味も明らかだと思うが、e^{2x} だと誤解するひとがいると困るので、入試問題なんかでは気を使うところ。

[*3] 最初にこれを見たときは違和感を覚えたものである。左辺は $|x|$ の関数であるのに右辺はそうなっていないから。理由を説明できるか。

例 1.4. $\dfrac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$ を微分して

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -(f(x))^{-2} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

問 10. 商の微分の公式[*4]

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

を導け。

問 11. $\tan x$ の微分の公式を確認。これぐらいは、覚えておいても良いだろうが。

次の問は、意外と[*5] できないかも知れぬ。

問 12. 三角関数の微分において、角度を測る単位として radian を使う理由は何か。

問 13. 具体的な関数の微分の公式の中で基本的なものは何か。また派生的なものは何か。

対数微分法

それほどの重要度かどうか。知らなくてもあまり困らないような気もする。積の微分を

$$\frac{(f(x)g(x)h(x))'}{f(x)g(x)h(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}$$

と言い換えただけのものなので。

問 14.

$$y = \frac{(1+x)\sqrt{1+2x}}{(1-3x)^{1/3}}$$

の微分を $\log y$ を x で微分することで計算してみよ。

2 関数の増大度

グラフを描いても思い出せるだろうが、無限大のスピード比較は、覚えておく[*6]。

$$\log x << x^a << e^x \qquad (x \to +\infty).$$

問 15. 勝手な $a > 0$, $b > 0$ に対して、$x^a << e^{bx}$ $(x \to +\infty)$ を確かめよ。また、$0 < a < b$ であるとき、x^a と x^b, e^{ax} と e^{bx} のスピードを比較せよ。

[*4] あ、挙げてしまった、不覚なり。

[*5] ある大学の工学部の先生で、このことを理解していない人がいたのには、驚いたの何の。計算は、ブラックボックスで良いと思っているらしい。恐ろしいことだ。三流は、政治だけではなかったのだな。

[*6] 指数・対数の間に冪あり。なぜか授業でも教科書でも強調されぬ謎。

例 2.1. 極限

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$$

を求めてみよう[*7]。ややこしげな冪が出てきたら対数である。$\log x << x$ に注意して、

$$\lim_{x\to\infty} \log(x^{1/x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

これから

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

問 16. 極限 $\lim_{x\to+0} x^x$ を求めよ。

問 17. 正数 $a > 0$ と実数 $|b| < 1$ に対して、$\lim_{n\to\infty} n^a b^n = 0$ であることを確かめよ。

問 18. つぎの関数のグラフの概形を、定義域の端での様子に注意して描け。

(i) $y = x^2 e^{-x}$.
(ii) $y = x \log x$ $(x > 0)$.

少し入試問題風に。

問 19. $\sin(x^2) = 0$ となる $x > 0$ を小さい順に $a_1 < a_2 < \cdots$ と並べる。

(i) 極限 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$ を求めよ。
(ii) 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_{n+1} - a_n}\right\}$ の増大度は、n と比べて速いか遅いか。

3 逆三角関数

逆関数 (inverse function) の復習（縦のものを横に見る）。$y = f(x)$ の逆関数 g は、$x = g(y)$ という関係をみたす。すなわち、

$$g(f(x)) = x, \qquad f(g(y)) = y$$

が恒等的に成り立つ。逆関数を表す一般的な記号は f^{-1} であるが、これと $(f(x))^{-1}$ を混同せぬように。

問 20. $f(x) = x^3$ のときに、$f^{-1}(x)$ と $(f(x))^{-1}$ を具体的に書いてみる。

問 21. 定義域に注意して逆三角関数

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x.$$

のグラフを描け。

つぎは、小学生の知識だな、実質。

問 22. 等式 $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$ $(0 \le x \le \pi/2)$ を図形的に示せ。

問 23. $0 < a < \pi/2$ とする。$\sin x = \sin a$ をみたす実数 x をすべて求めよ。

[*7] ロピタルは、知ってても使わない、理由もわからずに使わない！　科学するものの良心なり。

問 24. $5\pi/4$ を含む閉区間で $\sin x$ の逆関数が定義できる最大のものは何か。

問 25. 関数

$$\cos(\arcsin x)$$

が具体的に何を表しているか調べ、そのグラフを描け。

微分の公式：これは、当面、覚えておこうか。そのあとで忘れても、記憶に引っ掛かりができるので、いざというときの役に立つ。

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

問 26. $\arctan x$ の微分の公式を導け。

問 27. $\arccos x$ の導関数を求めよ[*8]。

次は、双曲線関数と呼ばれるもので、指数関数と三角関数の関係[*9]が見え隠れする。

問 28. 関数 $y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ について、

(i) グラフの概形を描け。
(ii) 逆関数 $g(y)$ の導関数を求めよ。
(iii) 逆関数 $g(y)$ を y の式として具体的に表わせ。その式をみて何か思い出さないか。

4 積分のこころ

積分の最も直感的な意味は、関数のグラフが区間 $[a,b]$ で切り取られる部分の「符号付面積」であるが、関数および変数の値のもつ意味に応じてさまざまな現実的な解釈が可能であることも知るべきである。立体の切り口の面積の積分としての体積

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

電流 $I(t)$ の時間 t に関する積分としての電荷

$$Q = \int_a^b I(t)\,dt.$$

速さの積分としての道のり（曲線の長さ）

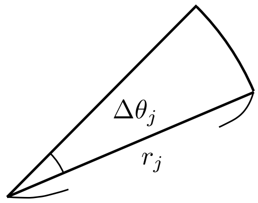
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

極座標 (r,θ) を使って、$r = f(\theta)$ と表される曲線と直線 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれた扇状図形の面積は、

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta$$

といった具合。

[*8] 問 22 を使えば簡単だが、ここでは、逆関数の微分の計算として稽古する。
[*9] オイラーの関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ というのがある。等式の美の極致なり。これが量子論の基礎に関わるという驚異。



問 29. 上で述べたこと以外で積分の事例になっているものを一つ挙げよ。

問 30. ハート形 (cardioid): 曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ の概形を描き、これがハート形と呼ばれることを納得せよ。この曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。また外周の全長を求めよ。

問 31. 正定数 a, b に対して、曲線 $(x, y) = (a\cos t, b\sin t)$ $(0 \le t \le \pi/2)$ の長さを積分[*10]を使って表せ。とくに $a = b$ の場合は何を意味するか。

問 32. 積分表示

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

と積分の分点公式を使って、対数関数の性質 $\log(xy) = \log x + \log y$ を（図形的に）示せ。

問 33. 正数 $b > a > 0$ に対して、

$$\frac{b-a}{b} \le \int_a^b \frac{1}{t}\, dt$$

を確かめ、これを使って、どのような $a > 0$ に対しても、$b > a$ を十分大きく取れば、

$$\int_a^b \frac{1}{t}\, dt > \frac{1}{2}$$

であることを示せ。さらに、$x > 0$ の関数 $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ は、単調増加で

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = +\infty, \quad \lim_{x\to+0} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\infty,$$

であることを対数の性質を使わずに[*11]示せ。

次のような問にすっきり答えられるようになりたいねえ、今や。

問 34. 原始関数と不定積分の違いについて述べよ。

問 35. 積分定数と不定積分との関係について述べよ。

問 36. 分かりきった関係式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt$$

を使って、微分が連続であるような関数 $f(x)$ $(a < x < b)$ に対して、

[*10] これから楕円積分、ひいては楕円関数という言葉が生まれた。円関数＝三角関数。では、円積分とは？

[*11] どうして、こういう不自由な制限をつけたかというと、対数の性質のもとになった指数法則をきちんと示すのは、かなり大変。高校では、グラフを描けばなめらかな曲線が見えてくるので、とか言ってごまかしている。だれも曲線を描く計算をしていないにも関わらず。そこで、不審に思った人は、才能あり。信じてしまった人は、今からでも反省。これに対して、積分を使って、最初に対数関数を定義し、その性質を示しておいて、その逆関数として指数関数を導入するという、趣味的な試みを意識してのものであった。

(i) $f'(x) \geq 0$ $(a < x < b)$ ならば、f は、区間 (a,b) で増加 (increasing)、
(ii) $f'(x) > 0$ $(a < x < b)$ ならば、f は、区間 (a,b) で強い意味で増加 (strictly increasing)、

であることを示せ。

微分の結果を解釈しなおすと、積分の公式が得られる。

新たに記憶に留めるべき不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = a^{-1} \arctan \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log(x + \sqrt{x^2 + A}).$$

「新たに記憶すべき」と書かない親心、わかるか。

次の等式に心動かされないか。人の心をどれだけ動かし得るか、そのためには己の心が動かされぬようでは。

例 4.1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4}.$$

積分の技法もある程度は稽古しておこうか。

置換積分　(integration by substitution)

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

部分積分　(integration by parts)

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

まずは置換積分。しかし、語感がよろしくない。同音異義の悲しさ*12。置き換え積分と訓読してみる。これでよし。

例 4.2. 正数 $0 < t \neq 1$ に対して、

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^t} dx = \frac{1}{2 - 2t} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{t-1}}.$$

問 37. 上の積分で $t = 1$ のときはどうなるか。右辺に積分定数を追加調整して $t \to 1$ としてみたものと比較せよ。

問 38. 不定積分

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \qquad \int x e^{-x^2} dx$$

を求めよ。

*12 その不幸の由来については、高島俊男「漢字と日本人」(文春新書) を見よ。

世に蔓延する「部分積分」は、邪法なり。正法をこそ身につけよ。

例 4.3.

$$\int \log x \, dx$$

を「部分積分の方法」で求めてみよう。

そのために、積の微分の結果 $\log x$ という項が現れる $x \log x$ という関数の微分を書き下してみる。

$$(x \log x)' = \log x + 1.$$

次に、両辺の積分を取って、

$$x \log x = \int \log x \, dx + \int 1 \, dx$$

より、

$$\int \log x \, dx = x \log x - x$$

であることがわかる

次は、漸化式。これも難しい漢語である。ようやく化けるとは意味不明。わずかずつ変化するの意であったか。しかし、変化は良いとして、少しかどうかは、何とも。英語は、recursive relation （くり返し関係）で、これならばよく分かる。

例 4.4. 不定積分

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

を部分積分の方法で調べてみよう。

積の微分の計算式[*13]

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n}\right)' &= \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} - 2n \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \\ &= -\frac{2n - 1}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2a^2 n}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\end{aligned}$$

を積分して、

$$2a^2 n I_{n+1}(x) - (2n - 1) I_n(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n}$$

という漸化式を得るので、

$$I_1(x) = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

から出発して、$I_2(x), I_3(x), \ldots$ を次々と求めることができる。

問 39. 自然数 $n = 1, 2, 3$ に対して、

$$\int x^n e^{-x} \, dx$$

を求めよ。やさしい問題で自信回復。

例 4.5.

[*13] $x^2 + a^2$ をかたまりとしてとらえる眼力かな。

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \arcsin\frac{x-2}{2}$.

(ii) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right)$.

Proof. (i) まず平方根の中身を処理しやすい形に書き直してから置きかえ積分を使って、

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx = \arcsin\frac{x-2}{2}.$$

(ii) これは部分積分による。ただし、公式丸暗記ではない柔軟性が必要となる。$\sqrt{x^2+A}$ が現れるものとして、$x\sqrt{x^2+A}$ の微分を計算してみると、

$$(x\sqrt{x^2+A})' = \sqrt{x^2+A} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}.$$

ここで、求めるものよりも一見複雑そうな形の第二項の出現にめげそうになるが、不定積分の公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

を思い起こし、

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}} = \sqrt{x^2+A} - \frac{A}{\sqrt{x^2+A}}$$

という書き直しを実行すると、うれしや、第一項と同じものが出てきて、

$$(x\sqrt{x^2+A})' = 2\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{\sqrt{x^2+A}}$$

となる。あとはこれを積分して $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx$ について解けばよい。 □

問 40. 微分 $(x\sqrt{a^2-x^2})'$ を利用して、

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

を示せ。また定積分

$$\int_0^x \sqrt{a^2-t^2}\,dt$$

を扇方の面積と結びつけることで、公式を幾何学的に解釈せよ。

つぎを大学院入試（大学入試にあらず）で出したら、そのできの悪さよ。部分積分の邪法にそまっているということか。

問 41 (半円分布のモーメント)**.** $x^{2n-1}(1-x^2)^{3/2}$ の微分を考えることで、定積分

$$\int_{-1}^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

の値を求めよ。

<u>有理関数の不定積分の求め方</u>

必要に応じて割り算を実行することにより、

$$\int \frac{g(x)}{f(x)}dx, \qquad \deg g < \deg f$$

の場合が問題である。

分母の式 $f(x)$ を（実数の範囲で）因数分解して、

$$(x^2+ax+b)^m, \qquad (x+c)^n$$

の形の積で表しておく。

このとき

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum \frac{p(x)}{(x^2+ax+b)^m} + \sum \frac{q(x)}{(x+c)^n}$$

という表示が可能である。ここで、$p(x)$、$q(x)$ は分母よりも次数の低い多項式を表す。

$p(x)$ を x^2+ax+b で割った商をさらに x^2+ax+b で割って、そのまた商を x^2+ax+b で割って、という操作を繰り返すことにより、$p(x)$ は

$$(\alpha x+\beta)(x^2+ax+b)^k, \qquad 0 \le k < m$$

の和で書き表せるので、結局

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^l}dx, \qquad 1 \le l \le m$$

の形の不定積分に帰着する。

$q(x)$ の部分も同様に処理して、こちらは、

$$\int \frac{1}{(x+c)^l}dx = \begin{cases} \frac{1}{(1-l)(x+c)^{l-1}} & \text{if } l \neq 1, \\ \log|x+c| & \text{if } l = 1 \end{cases}$$

と簡単に求まる。

最後に、１次式／２次式の冪、の不定積分は、$x^2+ax+b=(x+a/2)^2+b-a^2/4$ により、$y=x+a/2$ という変数変換を使えば、

$$\int \frac{Ay+B}{(y^2+C)^l}\,dy$$

の計算に還元され、これは、例 4.3, 例 4.4 で調べたように具体的に求めることができる。

例 4.6.

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx$$

を計算してみよう。

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であるから、

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

とおいて、a, b, c を求めると $a=1/3$, $b=-1/3$, $c=2/3$ となるので、

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{2(x-1/2)-1}{(x-1/2)^2+3/4}dx \\
&= \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}d(x-1/2)^2 + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}dx \\
&= \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{3}\log(x^2-x+1) + 2\sqrt{3}\arctan(2x/\sqrt{3}-\sqrt{3})
\end{aligned}$$

という表示を得る。(こう書いたからといって何か良いことがあるのかどうか。)

問 42.

$$\int \frac{1}{x^3-1}dx, \qquad \int \frac{1}{x^4-1}dx$$

問 43.

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx$$

を求めよ。(1 の 8 乗根が関係している。)

例 4.7. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x+e^{2x}}\,dx$ は、$t=e^x$ という置き換え(置換積分)をすると、有理関数の不定積分

$$\int \frac{1}{1+t+t^2}\frac{1}{t}\,dt$$

に帰着する。

問 44. 上の有理関数の不定積分を実行して、

$$\int \frac{1}{1+e^x+e^{2x}}\,dx$$

を求めよ。

有理曲線と積分

積分における変数変換でおもしろい技の一つに、曲線の有理式表示がある。関数 $y=f(x)$ が、曲線のパラメータ表示 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ で t を消去したものであれば、x, y の有理式 $R(x,y)$ に対して $x=\varphi(t)$ を変数変換とみて、

$$\int R(x,f(x))\,dx = \int R(x,y)\,dx = \int R(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\,dt$$

と計算できる。とくに、φ, ψ ともに t の有理式であるならば[*14]、有理関数の不定積分に還元され、具体的な表示が(原理的に)可能となる。

円 $x^2+y^2=1$ の場合、円周上の点、例えば $(-1,0)$ 、を通る直線の傾き t をパラメータに取って、

$$y=t(x+1), \qquad x^2+y^2=1$$

と連立させて解くことにより、

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

という有理式表示を得る。例えば

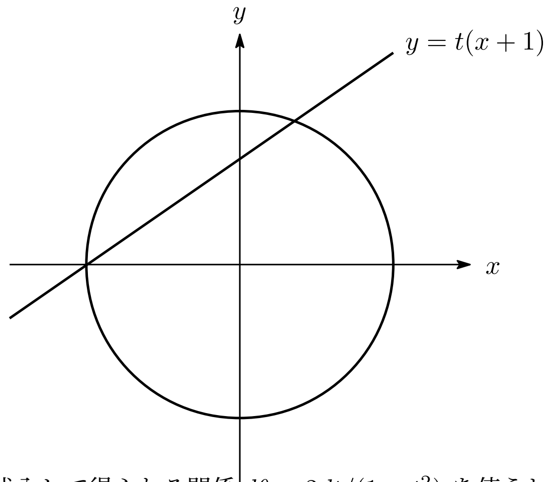
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{y}dx$$

は t の有理積分に帰着する。

また、$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ という表示と結びつけることにより、三角関数の有理式の積分は、やはり t の有理積分を使って表せることがわかる。実際、$\sin\theta$ を t で微分した

$$\cos\theta d\theta = 2\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

[*14] このようなパラメータ表示をもつ曲線を有理曲線 (rational curve) という



に $\cos\theta = (1-t^2)/(1+t^2)$ を代入して得られる関係 $d\theta = 2dt/(1+t^2)$ を使うと、

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となるので、有理関数の不定積分に帰着する。

つぎのような問題はいくらでも作れるが、結局は、有理関数の積分へどう帰着させるかだけなので、たくさん稽古する必要はない。他に稽古すべきことは山ほどある。ほどほどに。（こういうことをしつこく書いてある本が多いので、惑わされぬよう。）

問 45. 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos\theta}\, d\theta$ を計算せよ。

問 46. 半角の公式

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1, \quad \sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

を使うと、$t = \tan(\theta/2)$ である。これをチェック。

同じ方法は、他の二次曲線にも有効で、例えば、双曲線 $y = \sqrt{x^2-1}$ については、

$$y = t(x+1), \qquad y^2 = x^2 - 1$$

と連立させて解くと、

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1-t^2}$$

となるので、この場合も t の有理積分に帰着する。

問 47. 不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

をこの方法で求めよ。そうして、例 1.3 と比較せよ。

5　関数の状態と近似式

微分係数が接線の傾きを表しているという幾何学的意味から、

$$\begin{cases} f'(a) > 0 \text{ ならば} \quad f(x) \text{ は } x = a \text{ で増加の状態} \\ f'(a) = 0 \text{ ならば} \quad f(x) \text{ は、} x = a \text{ で瞬間的に変化を止めている状態} \\ f'(a) < 0 \text{ ならば} \quad f(x) \text{ は } x = a \text{ で減少の状態} \end{cases}$$

であるので、$f'(a) = 0$ のとき、$f'(x)$ の符号が、$x = a$ の前後で正から負へ（負から正へ）変化すれば、$y = f(x)$ のグラフは、$x = a$ でピーク（谷底）になっていることが分かる。そのときの関数の値 $f(a)$ を**極大値**（**極小値**）と呼ぶ。

一方、微分の定義式から

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

は、$|x - a|$ が小さい時、ほぼ $f'(a)$ に等しいので、

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \fallingdotseq a$$

という近似式が成り立つ*15。これを関数 $f(x)$ の $x = a$ の付近での**一次近似式** (linear approximation) という。

近似はきらいだなどど言ってないで、つぎの問題で微小変化の心を知る。

問 48. 一次近似式の意味を、接線と結びつけて幾何学的に説明せよ。

例 5.1.

(i) $\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1 + x/2$ の x に $x = 0.001$ を代入して、$\sqrt{1.001} \fallingdotseq 1.0005$.

(ii) $\sin x \fallingdotseq x$ の x に $1^\circ = 2\pi/360$ を代入して、$\sin 1^\circ \fallingdotseq 0.017$.

例 5.2. 半径 x の球の体積を表す関数 $f(x) = 4\pi x^3/3$ の $x = r$ の付近での近似式から、半径が Δ 増加したときの体積増加率は

$$\frac{f(r + \Delta r) - f(r)}{f(r)} \fallingdotseq 3\frac{\Delta r}{r}$$

となる。これを使って地球の体積 V と大気圏の体積 ΔV の比を見積もってみよう。地球および大気圏の形状は完全な球ではなく回転楕円体に近いもので、赤道付近での半径と大気圏の層の厚さが 6378Km と 17km、極点付近での半径と大気圏の層の厚さが 6357Km と 7Km であるから、

$$\frac{7}{6378} \leq \frac{\Delta r}{r} \leq \frac{17}{6357}$$

という不等式が成り立ち、$\Delta V/V$ は、0.3% と 0.8% の間であることが分かる。

例 5.3. 一次近似式の精度は、x が a に近いほど上がるということで、次のような使い方もできる。

$$e^x - e^{-x} \fallingdotseq 2x, \quad \log(1 + x) \fallingdotseq x \quad (x \fallingdotseq 0)$$

の比を取って、

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1 + x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

*15 ほぼ等しいを表す国際標準の記号は $\approx$ であるのだなあ、波枕。

誤差項つき一次近似式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

この誤差の大きさを見積もるために、$a \leq t \leq x$ での $|f''(t)|$ の最大値を M として、積分の基本不等式を使えば、

$$\left|\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f''(t)|(x-t)\,dt \leq M\int_a^x (x-t)\,dt = \frac{M}{2}(x-a)^2$$

を得る。したがって誤差の絶対値は $M|x-a|^2/2$ 以下であることがわかる。

問 49. 誤差を表す積分を評価する際に $a < x$ を暗黙裡に仮定したが、最後に得られた評価式は $x < a$ の場合でも成り立つ。これを確かめよ。

例 5.4. $|(\sqrt{1+t})''| = |(1+t)^{-3/2}|/4$ の $0 \leq t \leq 0.001$ での最大値は $1/4$ であるから、

$$|\sqrt{1.001} - 1.0005| \leq \frac{1}{8}(0.001)^2 = 1.25 \times 10^{-7}$$

のように小さい

問 50. $\sin 1^\circ$ の一次近似計算の誤差を見積もれ。

二次近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \quad (x \fallingdotseq a).$$

例 5.5.

(i) 二次近似式 $\cos x \fallingdotseq 1 - x^2/2$ に $x = 1^\circ = 2\pi/360$ を代入すると、$\cos 1^\circ \fallingdotseq 0.99986$

(ii) 二次近似式 $\sqrt{1+x} - 1 - x/2 \fallingdotseq -x^2/8$ と $1 - \cos x \fallingdotseq x^2/2$ $(x \fallingdotseq 0)$ の比を取って、

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2/8}{x^2/2} = -\frac{1}{4}.$$

二次近似式で、$x = a$ が極値を与えるかもしれない $f'(a) = 0$ の場合には、係数 $f''(a)$ が、グラフの山あるいは谷の深さを表す。

問 51. 関数 $x^a e^{-x}$ $(x > 0)$ のピークの開き具合が、パラメータ $a > 0$ の増加とともにどのように変化するか調べよ。

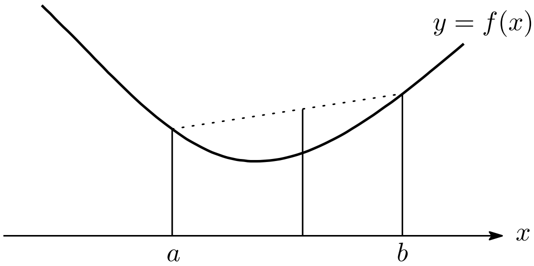
一般に、ある区間で $f''(x) \geq 0$ が成り立っていれば、接線の傾き $f'(x)$ は x の増加関数となるので、$f(x)$ のグラフは、下に凸になっている。

このことをもう少し正確に記述してみよう。まず、ある区間で関数 f （のグラフ）が（下に）凸であるとは、区間内の勝手な 2 点 a, b に対して

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

という不等式が成り立つことと定義する。

このとき、次が成り立つ。



命題 5.6 (Jensen 不等式)**.** 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ を含むある範囲で定義されていて、2 階微分可能で $f''(x)$ が連続かつ $f''(x) \geq 0$ *(*$a \leq x \leq b$*)* であれば、上の不等式が成り立つ。より強く、$t_1, \ldots, t_n$ という確率分布（すなわち、$t_j \geq 0$ かつ $\sum_j t_j = 1$）と数列 $\{c_j\}_{j=1}^n \subset [a, b]$ に対して、

$$f\left(\sum_{j=1}^n t_j c_j\right) \leq \sum_{j=1}^n t_j f(c_j)$$

が成り立つ。

例 5.7. 二つの確率分布 $p = \{p_j\}_{1 \leq j \leq n}$, $q = \{q_j\}_{1 \leq j \leq n}$ （ただし、$p_j > 0$, $q_j > 0$ とする）に対して、その相対エントロピー (relative entropy) を、

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^n p_j \log \frac{p_j}{q_j}$$

で定めるとき、$\log x$ が凸関数であることに注意すれば、

$$-H(p, q) = \sum p_j \log \frac{q_j}{p_j} \leq \log\left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{q_j}{p_j}\right) = \log 1 = 0$$

であることがわかる。

問 52. 正数 $a_1, \ldots, a_n$ に対して、

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

を示せ。

問 53. 正数 a, b と実数 $0 \leq t \leq 1$ に対して、次の不等式を示せ。

$$a^t b^{1-t} \leq at + b(1-t).$$

関数のグラフの図形的な性質をさらに調べるために、$f(x)$ は、$f''(x)$ が存在して連続であると仮定し、$f''(x) = 0$ となる点 c の前後で $f''(x)$ の符号が変わるものとしよう。

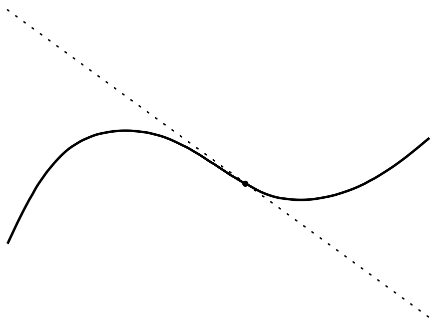
具体的に考えるために、

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{if } x < c, \\ f(x) > 0 & \text{if } x > c \end{cases}$$

であったとする。

このとき、関数 $f(x)$ のグラフは、$x < c$ の範囲で（下に）凹、$x > c$ の範囲で（下に）凸となるので、$x = c$ の点で、グラフの凹凸が変化することがわかる。

こうのように凹凸の変化する点を**変曲点** (point of inflection) と呼ぶ。



例 5.8. 関数 $f(x) = x^3$ のグラフは $x = 0$ で変曲している。

例 5.9. 関数 $f(x) = \sin x$ の変曲点は、$x = \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ である。

例 5.10. 関数 $f(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$ のグラフは、

$$f'''(x) = e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4}$$

より、$|x| < \sigma$ で上に凸、$|x| > \sigma$ で下に凸であり、$x = \pm\sigma$ が変曲点である。

問 54. 3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は、変曲点を丁度一つだけもつことを示せ。また、そのグラフは変曲点を中心に点対称であることを示せ。

問 55. 関数 $f(x) = x^a e^{-x}$ $(x \geq 0)$ の変曲点について調べよ。ただし $a > 0$ とする。

問 56. 関数 $y = a\log(1 - x) - b\log x$ $(0 < x < 1)$ の変曲点を求め、グラフの概形を描け。ただし、$a > 0, b > 0$ とする。

問 57. 関数 $y = f(x)$ は、$f''(c) = 0$ かつ $f'''(c) \neq 0$ であるとき、$x = c$ を変曲点にもつことを示せ。

問 58. 関数 $f(x)$ に対して、変曲点での接線は、曲線 $y = f(x)$ を変曲点付近で二分割することを示せ。

すこししつこかったかな、変曲点。しかし、集中するというのは、そういうことだ。それが無心にできる人は幸いなり、一生の楽しみならん。

曲率半径

一次近似式を使って、平面曲線の曲率半径 (radius of curvature) の公式を導いてみよう。ここで曲率半径とは、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P = (x, f(x))$ を通る法線を L_x で表し、2 つの法線 L_x, $L_{x+\Delta x}$ の交点を Q とするとき、極限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \overline{PQ}$$

で与えられる。曲線を円で[*16] 近似したときの半径という意味がある。

点 P における接線が x 軸となす角度を θ で表せば、

$$f'(x) = \tan\theta.$$

[*16] 空間曲線の場合は、円ではなく螺旋（らせん）というかバネで近似することになり、曲率半径の他に捩率というものが出てくる。捩率は「れいりつ」と読むのだが、難読語に入るだろう。「ねじれりつ」と湯桶読みする場合もあるようだが、それならば「ねじれ」で良いだろう。英語では torsion というのだから。ちなみに、曲率（＝曲率半径の逆数）は curvature (発音に注意) という。この辺のことに興味がわいたら、微分幾何の本を見るといい。どうでもいいことながら、バネは「はねる」からの転用でれっきとした和語であるが、音を似せた発条という漢字を当てることもある。人前でそのまま音読みするととんでもないことになるが、これも難読語か。難読語の知識を競う向きもあるが、くだらないことだ。

曲線の微小部分の長さは、

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt \fallingdotseq \sqrt{1+f'(x)^2}\,\Delta x.$$

一方簡単な幾何学により、$\overline{PQ}\Delta\theta \fallingdotseq \Delta s$. また、$f'(x)$ と $\tan\theta$ の一次近似式から

$$f''(x)\Delta x \fallingdotseq f'(x+\Delta x) - f'(x) = \tan(\theta+\Delta\theta) - \tan\theta \fallingdotseq \frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta}.$$

以上の関係式から $\Delta s, \Delta x,\ \Delta\theta,\ \theta$ を消去すれば、

$$\overline{PQ} \fallingdotseq \frac{(1+f'(x)^2)^{3/2}}{|f''(x)|}$$

を得るので、極限 $\Delta x \to 0$ を取ることで曲率半径の表示式を得る。

問 59. 上で導いた公式を使って円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ の曲率半径を求めよ。

問 60. 正弦曲線 $y = a\sin x$ の曲率半径の最小値を求めよ。直感と合うかどうか。

問 61. 曲線が $(x(t), y(t))$ とパラメータ表示された場合の曲率半径を表す公式を導け。

6 テイラー展開

定義 6.1. 開区間の上で定義された関数 $f(x)$ は、n 回微分できて n 次導関数 $f^{(n)}$ が連続であるとき、C^n 級であるという。また、何度でも微分できる関数を C^∞ 級と呼ぶ。

次は、よく取り上げられるのであるが、使う場面はそれほど多くないようにも思う。ということで、本文には入れなかったが、よい稽古にはなる。

問 62 (Leibniz Rule)**.** C^n 級関数 $f(x)$, $g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ も C^n 級で、次が成り立つ。

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big(f(x)g(x)\Big) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

とくに、$f(x)=e^{ax}$, $g(x)=e^{bx}$ とおけば、どのような等式が得られるか。

次の重要な等式は、テイラーの定理と不当に呼ばれることが多い。他の本とかと見比べるときは注意。

定理 6.2 (de Prony の公式)**.** 実数 a を含む開区間で定義された C^{n+1} 級関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x),$$
$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

と表示される。($R_n(x)$ を剰余項[*17] *(remainder)* と呼ぶ。)

[*17] 剰余項の表示は、他にもいろいろあるが、この積分を使ったものが最も強力である。

例 6.3.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x e^t (x-t)^n \, dt. \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\
&\qquad\qquad + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\int_0^x (x-t)^{2n}\cos t \, dt. \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \\
&\qquad\qquad + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x (x-t)^{2n+1}\cos t \, dt. \\
\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt. \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\
&\qquad + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \, dt.
\end{aligned}
$$

問 63. 上の例を確かめよ。面倒がらずに確かめる。

問 64. 連続関数 g に対して、

$$
\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x g(t)(x-t)^{n-1}dt = g(x)
$$

である。何故か。

問 65. ウェッブ上にあるテイラー展開のアニメーションをいくつか鑑賞し、それから分かることを記せ。

問 66. つぎの 3 つの関数

$$
((t-a)f(t))', \qquad ((b-t)f(t))', \qquad ((b-t)(t-a)f'(t))'
$$

を区間 $[a,b]$ で積分することにより、積分の関係式（台形公式）

$$
\int_a^b f(t)\,dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-t)(t-a)f''(t)\,dt
$$

を導け。

<u>オーダー記号について</u>

以前、無限大のスピードの比較をした際に、$|x^a e^{-x}| \le Ce^{-x/2}$ $(x > 0)$ という形の不等式を利用した。このように、関数の漸近的な振る舞いを調べるために、素性のわかっている関数と比較することが良く行われる。そこで、こういった状況を表す記号を導入しておくと便利である。2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して、定数 $C > 0$ をうまく選べば、x が大きいところで

$$
|f(x)| \le Cg(x)
$$

が成り立つとき、$f(x)$ は、漸近的に $g(x)$ 程度以下であるといい、$f(x) = O(g(x))$ と書く。上の例であれば、$x^a e^{-x} = O(e^{-x/2})$ となる。この記号はまた、数列の漸近的性質を記述する際にも用いられる。

例 6.4. 階乗 $n!$ は、n が大きくなるとき急激に増大することが知られている。その増大のスピードが指数関数 A^n $(A>1)$ のそれと比べてどの程度か調べてみよう。大きな数が出てきたら、まずは対数である。

$$\log(n!) = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$$

の大きさを下から評価する。これを積分 $\int_1^n \log x\,dx$ と比べることで、不等式

$$\log n! \geq \int_1^n \log x\,dx = n\log n - n + 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を得るので、

$$\frac{A^n}{n!} = O((Ae/n)^n)$$

であることがわかる。急激な増加の代名詞にもなっている指数関数と比べてもなお、階乗のスピードが勝るということである。

問 67. 階乗を上から評価することで、$n! = O((n/e)^n)$ を示せ。ついでに、Stirling's formula を調べ認識しておく。

例 6.5. 関数として $f(x) = x^2\sin(1/x)$, $g(x) = x^2$ とすれば、$|f(x)| \leq |g(x)|$ であるから、$C=1$ と取ることで、$x^2\sin(1/x) = O(x^2)$ がわかる。

問 68. 極限 $\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ が存在するならば、$f(x) = O(g(x))$ であるが、逆は成り立たない。反例を求む。

定理 6.6 (テイラー近似式)**.** 実数 a を含む開区間で定義された C^{n+1} 級関数 $f(x)$ は、$x=a$ の付近で、次のように近似式表示される。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}).$$

また、このような表示は一つしかない。すなわち、

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + O((x-a)^{n+1})$$

が成り立てば、$c_k = f^{(k)}(a)/k!$ $(0 \leq k \leq n)$ である。

例 6.7. 以下の近似式が $x=0$ の付近で成り立つ。

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^{n+1}).\\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}).\\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2}).\\
\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n}x^n + O(x^{n+1}).\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3).
\end{aligned}$$

問 69. $f(x) = \tan x$ に対して、$x=0$ の付近での近似式を低次の項から求めてみて、その計算量の増え方を実感せよ。

以下では、$a=0$ の場合、すなわち、原点のまわりでのオーダーについて考える。

命題 6.8. 原点 0 のまわりでのオーダーについて、$f(x) = O(x^m)$, $g(x) = O(x^n)$ であれば、次が成り立つ。ただし、α, β は定数、$m \wedge n = \min\{m, n\}$ であり、*(iii)* では $m \geq 1$ を仮定する。

(i) $\alpha f(x) + \beta g(x) = O(x^{m \wedge n})$.
(ii) $f(x)g(x) = O(x^{m+n})$.
(iii) $g(f(x)) = O(x^{mn})$.

問 70. (iii) で $m = 0$ を除外する理由を認識せよ。こういうことは、言われなくてもするものだ。

例 6.9. $f(x) = 2x - x^2 + O(x^3)$, $g(x) = 1 - x + 3x^2 + O(x^3)$ であれば、

(i)
$$f(x) - g(x) = -1 + 3x - 4x^2 + O(x^3).$$

(ii)
$$f(x)g(x) = (2x - x^2 + O(x^3))(1 - x + 3x^2 + O(x^3)) = 2x - 3x^2 + O(x^3).$$

(iii)
$$g(f(x)) = 1 - (2x - x^2 + O(x^3)) + 3(2x - x^2 + O(x^3))^2 + O(x^3) = 1 - 2x + 13x^2 + O(x^3).$$

例 6.10. 積の利用：$e^x \sin x$ の近似式を 3 次の項まで求めようと思ったら、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4), \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

の積を展開し、オーダーの性質を使うことで、

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$$

を得る。

例 6.11. 合成関数の利用：

$$y = \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^6)$$

を

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + O(y^3)$$

に代入すれば、

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - (-x^2/2 + x^4/4! + O(x^6)) + (-x^2/2 + O(x^4))^2 + O(x^6) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6).$$

例 6.12. 近似式の唯一性の利用：$\tan x$ が奇関数であることに注意すれば、$\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + O(x^7)$ と表すことができて、これと $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + O(x^6)$ を $\tan x \cos x$ に代入したものを計算すると

$$(1 - x^2/2 + x^4/4! + O(x^6))(ax + bx^3 + cx^5 + O(x^7)) = ax + (b - a/2)x^3 + (c - b/2 + a/4!)x^5 + O(x^7)$$

となる。そこで、これと $\sin x = x - x^3/6 + x^5/5! + O(x^7)$ を比較して得られる

$$a = 1, \quad b - \frac{a}{2} = -\frac{1}{6}, \quad c - \frac{b}{2} + \frac{a}{4!} = \frac{1}{5!}$$

を解いて、

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7).$$

以上、テイラーの近似式を使用するにあたって、剰余項のオーダー表示を明記してきたが、実際の計算においては、どのオーダーまでが関係するのかはその状況次第で変化する。ということで、以下では、多少曖昧ではあるが剰余項を明示しない

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots$$

といった書き方も許すことにする。

以下、いろいろ出てくるが、無限小解析の心に触れるためでもあるので、できるだけ多く稽古する。

例 6.13. 極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$$

を求めよ。

Proof.

$$\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \frac{1-(1-x^2/2+\cdots)}{x(x-x^3/3!+\cdots)} = \frac{x^2/2-x^4/4!+\cdots}{x^2-x^4/3!+\cdots} = \frac{1/2+O(x^2)}{1+O(x^2)} \to \frac{1}{2}.$$

□

例 6.14. $2^{10} = 1024$ を利用して、

$$\sqrt{1000} = \sqrt{1024-24} = 2^5\sqrt{1-\frac{24}{1024}} = 32\left(1-\frac{1}{2}\frac{24}{1024}+\dots\right)$$

と計算してみる。

手計算は、数に対する感覚を養うという意味で大事なんだなあ。技術力のみなもとでもある、これが。

問 71. テイラー近似を利用して、e の値を小数点以下５桁まで正確に求めよ。

問 72. $\sin 61^\circ$ の値を小数点以下５桁まで正確に求めよ。また作図による計測値とこれを比較せよ（実験数学？）。

問 73. 関数 $\sqrt{\cos x}$ のテイラー近似を x^4 の項まで求めよ。また関数 $\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ ($m>0, c>0$ は定数) のテイラー近似を v の２次の項まで求めよ。とくに前者については、

(i) $\sqrt{1+t}$ の近似式に $t = \cos x - 1$ のテイラー近似を代入することで、
(ii) (ii) $(1+c_1x+c_2x^2+\dots)^2 = \cos x$ の両辺を比較することで、

求めてみよ。

問 74. 関数 $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ のテイラー近似を x の５次の項まで求めよ。

ここから、テイラー近似の極限計算への応用についてひとしきり。

例 6.15.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Proof. 対数の極限値を調べる。

$$\begin{aligned} n\log\left(1+\frac{a}{n}\right) &= n(\frac{a}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\cdots) \\ &= a-\frac{1}{2}\frac{a^2}{n}+\cdots \\ &\to a. \end{aligned}$$

□

上の２つの例題を組み合わせた次のような問題はどうであろうか。

例 6.16. 極限

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x\sin x}$$

を求めよ。

Proof.

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots, \quad x\sin x = x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \cdots$$

であるから、

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)^{1/x^2} = e^{-1/2}.$$

□

例 6.17. 上の例題の結果から、

$$\lim_{n\to\infty}((1+1/n)^n - e) = 0$$

であるが、この左辺の量の 0 に近づくスピードはどうであろうか。

Proof. 以前と同様の考えで、

$$\log(1+1/n)^n = n\log(1+1/n) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

であるから、

$$\begin{aligned} e^{-1}(1+1/n)^n - 1 &= e^{-1/2n+1/3n^2+\cdots} - 1 \\ &= \left(-1/2n + 1/3n^2 + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(-1/2n + 1/3n^2 + \cdots\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(-1/2n + 1/3n^2 + \cdots\right)^3 + \cdots \\ &= -\frac{1}{2n} + \frac{11}{24}\frac{1}{n^2} + \cdots \end{aligned}$$

となって、$(1+1/n)^n - e$ の 0 に近づくスピードは、$-e/2n$ と同じであることがわかる。従って、

$$\lim_{n\to\infty} n((1+1/n)^n - e) = -\frac{e}{2}$$

であることまで分かる。 □

問 75. ネピア数 e の定義として、上で確かめた極限式

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を採用している教科書も多いが、e の計算式としては、効率が悪い。上の例題を参考に、誤差の評価を行って、小数点以下５桁まで正確に求めようと思ったら、n をどの程度大きくしないといけないか調べよ。またテイラー近似を使った場合と比較せよ。

問 76. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(1/n)}{n}\right)\left(1+\frac{f(2/n)}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{f(n/n)}{n}\right)=e^{\int_0^1 f(t)\,dt}$$

である。

問 77. $\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\pi/2$ であるが、この極限の収束のスピードを調べるために、

$$\frac{\pi}{2}-\arctan x=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

であるような a, b, c を求めよ。

問 78. 関数 $y=\sqrt{\tan x-x}$ $(0\leq x<\pi/2)$ のグラフの概形を描け。

以上、多項式近似を通じて de Prony の公式の有用性を見てきたのであるが、近似の次数を最後まで推し進めたら何が起こるであろうか。もし、剰余項 $R_n(x)$ が $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$、すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=0$$

という性質をもてば、

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\cdots$$

という表示を得る。これを、関数 $f(x)$ の $x=a$ のまわりでの**テイラー展開** (Taylor expamsion) という。テイラー展開の右辺に現れる級数は、一般項が $x-a$ の冪（べき）の定数倍であるという意味で、$x-a$ の**冪級数** (power series) と呼ばれる。冪級数の和を途中で打ち切ったものは多項式になっていて、近似多項式の次数を無限に大きくした形になっていることに注意する。このように冪級数の形で表される関数は、解析関数と呼ばれ, 数学の中でも重要な地位を占めるものとなっている。

定理 6.18 (基本関数のテイラー展開)**.** 最初の 3 つは全ての実数 x で、あとの 2 つは $|x|<1$ で成り立つ。なお、最後の式 の α は実数。

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots, \tag{1}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots, \tag{2}$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots, \tag{3}$$

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots, \tag{4}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots. \tag{5}$$

コーシーの例：

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x} & \text{if } x>0,\\ 0 & \text{if } x\leq 0\end{cases}$$

と置くと、f は何度でも微分できて、$f^{(n)}(0)=0$ $(n=0,1,\ldots)$ であることを示すことができる。したがって、$R_n(x)=f(x)$ であり、$x>0$ に対しては

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=e^{-1/x}\neq 0$$

となる。

問 79.

$$f^{(n)}(x) = p_n(1/x)e^{-1/x}, \quad x > 0$$

($p_n(1/x)$ は、$1/x$ の $2n$ 次の多項式) であることを確かめ、$f^{(n)}(0) = 0$ を示せ。

問 80. (i) $t > 0$ のとき、$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}k^n \geq n! \frac{e^{-nt}}{(1-e^{-t})^{n+1}}.$$

(ii) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt}\cos(k^2x)$ とおけば、f は C^∞ 級で、

$$|f^{(2n)}(0)| \geq (2n)! \frac{e^{-2nt}}{(1-e^{-t})^{2n+1}}.$$

定理 6.19. 関数 $f(x)$ は、$x = a$ のまわりでテイラー展開可能であるとする。

(i) 関数 $g(x)$ が $x = a$ のまわりでテイラー展開可能であれば、その積 $f(x)g(x)$ も $x = a$ のまわりでテイラー展開可能。

(ii) 関数 $g(x)$ が $x = f(a)$ のまわりでテイラー展開可能であれば、合成関数 $g(f(x))$ は $x = a$ のまわりでテイラー展開可能。とくに、$g(x) = 1/x$ を考えると、$f(a) \neq 0$ であれば、$1/f(x)$ も $x = a$ のまわりでテイラー展開できる。

(iii) $f'(a) \neq 0$ であれば、$x = f(a)$ のまわりでテイラー展開可能な f の逆関数が存在する。

等比数列の和の公式

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n$$

から出発する。これを書き直して

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}.$$

さらに x を $-x$ で置き換えて

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n\frac{x^n}{1+x}.$$

両辺を積分して

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x dt\,(1-t+t^2\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t}) \\ &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt.\end{aligned}$$

これから、剰余項の新たな積分表示

$$R_n(x) = (-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt$$

を得る。これを評価することでも、$\log(1+x)$ のテイラー展開を示すことができるが、この表示の利点は、$x = 1$ の場合にも、

$$|R_n(1)| = \int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

と使えることで、これから、

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

という等式がわかる。

問 81. ここで導いた $\log(1+x)$ の表示式と de Prony の公式から得られる表示式を比較せよ。

問 82. 正数 $a, b > 0$ に対して、

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+b}$$

を示せ。とくに $a = 2$, $b = 1$ と取ると具体的にどうなるか。

問 83. 次の等式を利用して $\arctan x$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を求めよ。

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

不定形の極限

導関数が連続である関数 $f(x)$, $g(x)$ で $\lim f(x) = +\infty = \lim g(x)$ となるものを考える。このとき、

$$c = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在するならば、

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Proof. $h(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} - c$ とおけば、$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ である。

$$f'(x) = cg'(x) + h(x)g'(x)$$

を積分して、

$$f(x) = cg(x) + f(a) - cg(a) + \int_a^x h(x)g'(x)\,dx.$$

そこで、$|h(x)|$ $(x \geq a)$ の最大値を ϵ_a で表せば、

$$|f(x) - cg(x) - f(a) + cg(a)| \leq \epsilon_a(g(x) - g(a))$$

となるので、a を大きくとって ϵ_a を小さくしたのとち、$g(x)$ で割って x を大きくすれば、

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - c| \leq \frac{|f(a) - cg(a)|}{|g(x)|} + \epsilon_a\left(1 - \frac{g(a)}{g(x)}\right)$$

をいくらでも小さくできるので、主張が確かめられた。 □

有名なベルヌーイ・ロピタルの方法であるが、このように無限大が関係するときの証明は面倒である。機械的であるところは優れているが、前提条件を忘れる危険もあって、乱用は慎むべきである。次のように検算に使うのがよかろう。

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

であるから、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

問 84. 次の計算の誤りを指摘する。

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{\sin x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}\cos x}{\cos x} = 1.$$

7　広義積分

次の例は、トリチェリ[*18] が最初に指摘したもので、無限に広がっているものでも有限性が担保される場合があるということ。

例 7.1.

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{if } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

問 85. $\alpha > 1$ に対して、

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,dx$$

を示せ。

例 7.2. 積分

$$\int_0^1 \log x\,dx = -1$$

の値を確認。

問 86. 次の計算の誤りについて説明せよ。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-1}^{x=1} = -2.$$

関数（のグラフ）を正の部分と負の部分の和に書いて、それぞれの部分の面積を比較すると次の結果となる。

定理 7.3 (広義積分の存在)**.**

(i)

$$|f(x)| \le g(x), \quad 0 \le x \le a$$

が成り立つとき、$\int_0^a g(x)dx < +\infty$ ならば

$$\int_0^a f(x)\,dx$$

が存在する。

(ii)

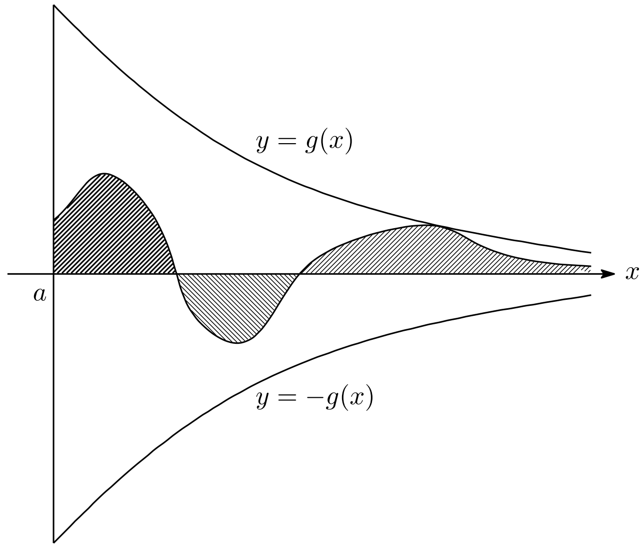
$$|f(x)| \le g(x), \quad x \ge a > 0$$

が成り立つとき、$\int_a^\infty g(x)dx < +\infty$ ならば

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

が存在する。

[*18] Evangelista Torricelli (1608–1647) ガリレイの弟子の一人。トリチェリの真空で有名であるが、このように数学的才能も抜群であった。若くして病死したのが惜しまれる。



例 7.4. 広義積分

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が存在することを確かめ、その値を求めよ。

例 7.5. 広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

の存在を確かめよ。

例 7.6 (ガンマ関数)**.** $x > 0$ のとき、

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

が存在して $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$. とくに、$\Gamma(n+1) = n!$.

例 7.7.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

実は、左辺の積分値[*19]は $\sqrt{\pi}$ であることがわかるので（「微積分 II」の重積分の項参照)、$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ となっている。

問 87. 実数 $a > 0$ と $b < 1$ に対して、広義積分

$$\int_0^1 \frac{(-\log x)^a}{x^b}\,dx$$

が収束することを示し、その値をガンマ関数で表せ。

問 88. 広義積分

$$\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^a dx, \qquad a > 0$$

[*19] **ガウス積分** (Gaussian integral) という。

が収束するか発散するか調べよ。

あれこれ、やってみることが大事なんだな。できるかどうかは二の次にして。成果を上げよという、ほっといてくれ。

問 89 (Euler)**.** 広義積分

$$I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\, dt$$

について考える。

(i) 広義積分が収束することを示せ。

(ii)

$$\int_0^{\pi/2} \log(\cos t)\, dt = I, \quad \int_0^{\pi} \log(\sin t)\, dt = 2I$$

を示せ。

(iii) 変数の置き換え $x = 2t$ により、

$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2I$$

を示せ。

(iv) I を求めよ。

8 級数の収束と発散

数列も級数も大事だが、級数には数列にはない特殊な意味合いがある。わかるか。

例 8.1. $a_n \to 0$ でも、級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ は発散することがある。正数 $\alpha > 0$ に対して、

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

とおくと、

$$\zeta(\alpha) < +\infty \iff \alpha > 1.$$

とくに、$\alpha = 1$ の場合は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

この発散級数について、もう少し詳しく調べておこう。発散のスピードは、

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x} dx$$

より、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} = 1,$$

すなわち $\log n$ 程度である。さらに、その違いについては、

$$\frac{1}{2k(k+1)} \le \int_k^{k+1} \frac{x-k}{kx}\,dx \le \frac{1}{2k^2}$$

より、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

が存在する。これをオイラー定数 (Euler's constant) という。

問 90.

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} \le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n}$$

を利用して、$1/2 < \gamma < 1$ であることを確かめよ。詳しく計算すると、$\gamma = 0.57721\ldots$ であるが、これが無理数かどうかは現在もわかっていない。

例 8.2. 次は、古くから知られている例であるが、心動かされないか。似たような級数から、一方は log が、また一方は π が出現する不思議さ。実にこれは、オイラーの関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を垣間見ているのであるのだな。

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \log 2 \quad \text{(N. Mercator, 1668).}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots = \frac{\pi}{4} \quad \text{(G.W. Leibniz, 1682).}$$

定義 8.3. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、

$$\sum_{n\ge1}|a_n| < +\infty$$

であるとき、**絶対収束する** (absolutely convergent) という。

また、（広義）積分 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ は、

$$\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx < \infty$$

である場合に絶対収束するという。

例 8.4.

(i) 任意の実数 x に対して、

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots, \\ \sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots, \\ \cos x &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots \end{aligned}$$

は絶対収束。

(ii) 実数 $|x| < 1$ と任意の実数 a に対して、

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots,$$
$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

は絶対収束。

(iii) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ は絶対収束する。

(iv) 広義積分 (フレネル積分[*20])

$$\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$$

は収束するが、絶対収束しない。

問 91. $a > 0$ のとき、$(1-t)^a$ の二項展開（Newton 展開）は、$t = \pm 1$ で絶対収束することを以下の手順で確かめよ。

(i) a を整数部と小数部にわけることで、$0 < a < 1$ の場合を示せば十分である。

(ii) $0 < a < 1$ のとき、$(1-t)^a = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \ldots$ とすると、$c_k > 0$ である。

(iii)

$$\sum_{k=1}^n c_k = \lim_{t\to 1-0}\sum_{k=1}^n c_k t^k = \lim_{t\to 1-0}\left(1 - (1-t)^a - \sum_{k=n+1}^\infty c_k t^k\right) \le \lim_{t\to 1-0}(1-(1-t)^a) = 1.$$

絶対収束級数こそ、真の級数なり、総和なり。

定理 8.5 (級数の基本定理)**.** 絶対収束する級数に対して、級数

$$\sum_n a_n$$

は収束し、その値は和をとる順序によらない。さらに、不等式

$$\left|\sum_n a_n\right| \le \sum_n |a_n|$$

が成り立つ。

例 8.6.

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| < +\infty, \qquad \sum_{n=1}^\infty |b_n| < +\infty$$

のとき、

$$\sum_{m,n\ge 1} a_m b_n = \left(\sum_{m=1}^\infty a_m\right)\left(\sum_{n=1}^\infty b_n\right).$$

例 8.7. $|x| < 1, |y| < 1$ であるとき、

$$\sum_{n=0}^\infty (x+y-xy)^n = \sum_{n=0}^\infty (x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n)$$

が成り立つ。

[*20] Fresnel integral という。その値は $\sqrt{\pi/8}$ であることが知られている。

問 92. 二項定理*21

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

と指数関数のテイラー展開を利用して指数法則 $e^x e^y = e^{x+y}$ を導け。

問 93. 級数

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

の値を求めよ。

問 94. 級数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ を並べ替えことで、発散する級数を作れ。

9 重積分

空間内の曲面と立体の表示であるが、その前に平面内の曲線と領域について復習しておこう。2 変数の式 $f(x,y)$ を使って、等式（方程式ともいう）$f(x,y)=0$ で曲線が、不等式 $f(x,y) \geq 0$ または $f(x,y) \leq 0$ で曲線を境界とする領域が表される、素朴には。曲線 $x^3+y^3-3xy=0$ を描くとする。x あるいは y について解こうとすると破綻する。多項式といえども侮れない。手っ取り早いのは図形描画ソフトを使うことであるが、信じるだけでは救われないのが科学の世界。

例 9.1.

(i) x, y の一次式*22 $f(x,y) = ax+by+c$ のグラフは、$z = ax+by+c$ という平面を表す。
(ii) 偶関数 $\varphi(x)$ の xz-平面でのグラフ $z=\varphi(x)$ を z 軸のまわりに回転させて得られる曲面は、2 変数関数 $f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ のグラフ $z = f(x,y)$ でもある。具体的に、$\varphi(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ $(-r \leq x \leq r)$ であれば、半球面 $z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2 \leq r^2)$ を、$\varphi(x) = e^{-x^2}$ であれば、回転面 $z = e^{-x^2-y^2}$ を表す。

ここで、線型代数で既に習ったはずの平面の方程式を復習しておく。これは、本来は高校でやっておくべき内容ではあるが、何故かそうはなっていない不思議。

問 95. 一次式のグラフとして表せない平面は、どのようなものであるか。

問 96. 曲面 $z=xy$ の様子を、その切り口を考えることで、調べよ。また、三角柱 $x \geq 1, y \geq 1, x+y \leq 3$ によって切り取られる部分の境界線がどのようになっているか調べよ。

広義積分などどうるさいことを言わずに体積計算を素朴に実行することで、**ガウス積分** (Gaussian integral) の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

を得る。忘れているようであれば、ここで広義積分の復習をする。

*21 二項係数を表す記号として

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

を使うのが国際的慣例。ベクトルと紛らわしいのであるが、${}_nC_k$ を使うことはまれ。

*22 ここでは、$a=b=0$ の場合も一次式と思う。

問 97. 正数 a と実数 b に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx$$

を求めよ。

微小和の極限としての重積分の意味が数式の扱いとして理解できたかどうか、次をやってみる。

問 98 (区分求積法)**.** 次の極限を二重積分を使って表し、その値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(j+k)^2}{n^4}.$$

例 9.2. 正数 a と $R=[0,1]\times[1,2]$ に対して、

$$\begin{aligned}\int_R (x+y)^a\,dxdy &= \int_1^2\int_0^1 (x+y)^a\,dx\,dy = \int_1^2\left[\frac{1}{a+1}(x+y)^{a+1}\right]_{x=0}^{x=1}dy\\ &= \frac{1}{a+1}\int_1^2((y+1)^{a+1}-y^{a+1})\,dy = \frac{1}{(a+1)(a+2)}\left[(y+1)^{a+2}-y^{a+2}\right]_{y=1}^{y=2}\\ &= \frac{3^{a+2}-2^{a+3}+1}{(a+1)(a+2)}.\end{aligned}$$

問 99. くり返し積分

$$\int_0^1\int_1^2 (x+y)^a\,dy\,dx$$

を計算して、上の結果と一致することを確かめよ。

このように、定義域が長方形の場合は、話が簡単だ。そうでない場合を次に稽古する。

例 9.3. $D=\{(x,y);0\le y\le x\le 1\}$ のとき、

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

問 100. 上の D について、

$$\int_D xe^y\,dxdy$$

を求めよ。

次は、悪趣味な問題。なぜ悪趣味なのかわかるか。批判的精神は、科学の命。

例 9.4. 繰り返し積分

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y}\,dy\,dx$$

の値を求める。

Proof.

$$D=\{(x,y);0\le x\le 1,\sqrt{x}\le y\le 1\}$$

なる平面図形を考えると、

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 dye^{x/y} = \int_D e^{x/y}dxdy.$$

一方、

$$D = \{(x,y); 0 \le y \le 1, 0 \le x^2 \le y\}$$

という表示を使えば、

$$\int_D e^{x/y} dxdy = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{x/y}\, dx\, dy = \int_0^1 \Big[ye^{x/y}\Big]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 (ye^y - y)\, dy = \frac{1}{2}$$

である。 $\square$

積分は、和の極限であった。和の極限といえば、級数というのもある。ということで、次もやってみる。

問 101.

$$\sum_{1 \le m \le n} c_{m,n}$$

を二重級数として二つの方法で表せ。

問 102. 試験を行うと、つぎのような間違った式を書く人が必ず現れる。

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y}\, dy\, dx = \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^1 e^{x/y}\, dx\, dy$$

何がまずいか説明を書いてみる。頭ではわかっていても必ず書いてみる。大事な作業。

重積分と繰り返し積分の関係に慣れたら、こんどは３変数の重積分。本当は、４重積分くらいまでやっておくと良いのだが、せめて３重積分、密度の計算。

例 9.5. $D = \{(x,y,z); x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 1\}$ であるとき、

$$\int_D f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

問 103. 上の D に対して、三重積分

$$\int_D dxdydz$$

を求めよ。

広義積分に二種類あり、良い広義積分と悪い広義積分。級数でいうと絶対収束する場合とそうでない場合。重積分でも絶対収束する場合は、繰り返し積分による計算が有効であり、かつ繰り返しの順序によらない。（きちんと証明するのは、骨がおれるが。）ということで、絶対収束の場合の稽古を少々。

例 9.6.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\right)^2.$$

問 104. 広義二重積分

$$\int_D e^{-(x^2+1)y}\, dxdy, \quad D = \{(x,y); x \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

をくり返し積分により計算することで、ガウス積分の公式を導け。

問 105. 前に行ったガウス積分の計算は、$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \le z \le e^{-x^2-y^2}\}$ に対する三重積分

$$\int_D dzdydz$$

をくりかえし積分で計算したものになっている。これを確かめよ。

次は、重積分の変数変換をやった後に、それも気になる人向け。

問 106. 絶対収束しない場合には、仮にくり返し積分が可能であってもくり返し積分の結果は、積分を行う順序に依存することがある。

(i) 次の微分を計算する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+b^2}\right), \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{a^2+y^2}\right).$$

(ii) 次のくり返し積分を計算する。

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy, \quad \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx.$$

(iii) 広義積分

$$\int_{r\le x,y\le 1} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

を計算し、$r \to +0$ のときの様子を調べる。

10 偏微分

偏微分の定義も計算も一変数のそれであるから間違いようがないはずであるが、式が複雑になれば、おおげさなれど緊張感を要する。こころの切り替えだ。が、まずは、切り替えを意識しなくてすむ場合から。

例 10.1. 関数 $f(x,y)$ およびその偏導関数 $f_y(x,y)$ が連続[*23]であれば、次のパラメータに関する微分の公式が成り立つ。

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

実際、

$$\int_c^t\int_a^b f_y(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^t f_y(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b (f(x,t)-f(x,c))\,dx$$

の両辺を t で微分すると、

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_y(x,t)\,dx$$

である。

上の等式は、しばしば広義積分で使いたくなる。ということで次をやってみる。

問 107. 次の等式が成り立つことを納得せよ。納得できないときは、問題点を指摘せよ。

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx = -\int_0^\infty x^2 e^{-tx^2}\,dx \quad (t>0).$$

例 10.2. 関数 $f(x,y) = \sin(xy+y^2)$ を偏微分してみよう。

$$f_x = y\cos(xy+y^2), \quad f_y = (x+2y)\cos(xy+y^2),$$
$$f_{xx} = -y^2\sin(xy+y^2), \quad f_{yy} = 2\cos(xy+y^2)-(x+2y)^2\sin(xy+y^2),$$
$$f_{xy} = \cos(xy+y^2) - y(x+2y)\sin(xy+y^2) = f_{yx}.$$

[*23] 連続性の定義は、このすぐ後にある。連続性は、証明の途中に現れる密度関数の表示を保証するためのものである。

繰り返し偏微分は、繰り返しの順序によらない。変な例もあるがそれは定義が悪いだけだったりするので、とりあえず無視する。

問 108. 上の例で取り上げた関数の 3 階微分が何種類あるか判断し、すべて計算してみよ。

機械的計算だけではつまらないと思う人は、次とか。心の問題だ。

問 109. 偏微分可能な関数 $f(x,y)$ で

$$f_x = x+y, \quad f_y = ax$$

となるものをすべて求めよ。ただし、a は定数とする。

問 110. これは、連続性の難しさを味わうための問題である。

(i) $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で連続であるとき、

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = f(a,b)$$

は成り立つか。また、$f(x,y)$ がすべての点で連続ならば、どうか。

(ii) 条件

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

から $(x,y)=(a,b)$ での連続性が言えるか。

先程は、細かいことは無視といっておきながら、我ながら無節操と思うが、前提条件に対する理解を確かめるということで、次をやってみる。

問 111. $f(x,y,z) = e^{y+z}\frac{x}{z^2+1}$ に対して、$f_{xyz} = f_{yzx}$ であることを確かめよ。また、この等式を一般の関数に対して保証する十分条件を与えよ。

稽古だけの計算は沢山（と本当にいえるのは、たくさん稽古した人の特権）、と思ったら次。

問 112. 関数 $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $((x,y,z) \neq (0,0,0))$ に対して、$\dfrac{\partial r}{\partial x}$ を求めよ。関数 $f(x,y,z) = 1/r(x,y,z)^d$ が

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

を満たすように定数 d を定めよ。また、二変数で同様の問題を考えよ。

曲線と運動の幾何学、という題の本がありそうであるが、ないかな。それにしても、時間と空間（略して時空、英語だと space-time)。

問 113. 曲線のパラメータ表示 $(x(t),y(t),z(t))$ において、$t=a$ での一次近似式は、点 $(x(a),y(a),z(a))$ を通る接線のパラメータ表示になっていることを確かめよ。

合成関数に見えない合成関数の微分の計算。

問 114.

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\sin(tx)}{x^2+1}\,dx - \int_0^t \frac{x\cos(tx)}{x^2+1}\,dx$$

を具体的な式として表わせ。

Chain rule は、横ベクトルとたてベクトルの積として

$$(f_x, f_y, f_z)\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{pmatrix}$$

のように書いておくと印象的というか、その実体を表すというか。

問 115. $f(x,y)=\log(x^2+y^2+1)$, $(x,y)=(a+\alpha t, b+\beta t)$ のとき、鎖公式が成り立つことを確かめよ。

例 10.3. 点 (a,b,c) を通る直線のパラメータ表示 $\boldsymbol{r}(t)=(a+\alpha t, b+\beta t, c+\gamma t)$ を考えると、

$$\frac{d}{dt}f(a+\alpha t, b+\beta t, c+\gamma t)\Big|_{t=0}=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+\beta\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+\gamma\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c).$$

説明は簡潔明瞭が最上であるが、そのためには、繰り返しを厭わず丁寧な、ときには無駄とも思えるものを書いた上でないと。かのチャーチルも言っているではないか。時間がないときは、長い文章を書くのだと。

問 116. 上の例題で扱った微分を f の**方向微分** (directional derivative) という。これの意味について説明せよ。できるだけ詳しく。

次は、詳しく書くためのヒント。

問 117. 直線の方向を表すベクトル (α,β,γ) として大きさが 1 のベクトル（単位ベクトル）に限定して変化させるとき、方向微分の最大値・最小値を求めよ。

これは、どこかの試験問題で出したのだが、その出来の悪さよ。まあ、努力は空回りするものではあるが、たまには手応えもなくては。ささやかな生の証。

問 118. 関数 $f(x,y,z)=\dfrac{3}{1+x^2}\log(1+e^y+z^2)-y\ (x,y,z\in\mathbb{R})$ に対して

$$F(t)=f(a\cos t, a\sin t, t^2)\quad (t\in\mathbb{R})$$

とおく. ただし, $a\in\mathbb{R}$ は定数とする. このとき, $F'(0)=0$ となる a をすべて求めよ.

難しい計算ができても次のような問題に答えられぬようでは、本末転倒、頭でっかちの危うい専門家になりかねない。

例 10.4. 半径 r、高さ h の円柱の体積を V で表すとき、r が 1 %、h が 2 %増えた場合、V はおおよそ何%増えるか。

方程式と図形は一体のものであるという。代数と幾何の合体。それに分け入る微積分であるかな。

例 10.5. (i) ベクトル (α,β,γ) と実数 c に対して、$\alpha x+\beta y+\gamma y=c$ は、(α,β,γ) と直交する平面を表す。

(ii) 点 (x_0,y_0,z_0) と正数 $r>0$ を指定するとき、$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ は、(x_0,y_0,z_0) を中心とし半径 r の球面を表す。

(iii) 方程式 $y^2+z^2=r^2$ は、x 軸方向にのびた円柱を表す。

正射影といういい方、何が正しいのか。直交、orthogonal, ortho ときて、正統の意味であったか。ortho, para という対語もある。

問 119. ななめの円柱の方程式。

(i) ベクトル (x,y,z) の $(1,1,1)$ 方向への正射影を求めよ。

(ii) 直線 (t,t,t) (t は実数) を中心線とする半径 r の円柱を表す方程式を求めよ。

二次曲線も満足にしないで二次曲面は無理かも知れないが、双曲面。二種類あるうちで直線を含むのはどっち。線織面 (ruled surface) という用語もある。rule には、罫線とか定規の意味があったのだなあ。

問 120. 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を x 軸のまわりに回転させて得られる曲面（二葉双曲面という）と y 軸のまわりに回転させて得られる曲面（一葉双曲面という）の方程式を求めよ。それぞれの場合について、点 $(1,0,0)$ を通る接平面の方程式を求め、接平面が元の曲面と $(1,0,0)$ 以外の点で交わることがあるかどうか調べよ。

接平面の前に平面の方程式を復習しておくべきか。できれば、連立一次方程式の解法の幾何学的意味とか。線型代数で扱うべき話題なれど、そういった説明がしてある本は意外とないかも知れない。数学者の怠慢というべきか。次は、形式的なので、公式の確認程度。

問 121. 二次曲面 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ の接平面の方程式を求めよ。

形式的な計算も具体的にするといろいろ問題が作れる。ということで、直感と計算の間というべき次を考える。

問 122. 曲面 $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ の接平面全体を併せた領域はどのような立体か調べよ。

３次元をした後だから、２次元は簡単だね、というお話。いやいや、岡の原理に従えば、そうではないのかも知れない。何しろ、難しい問題は一般化しないと解けないのだというから。

問 123. 平面曲線 $f(x,y) = f(a,b)$ とベクトル

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

の関係について考察せよ。

最後に例外処理の場合を。

例 10.6. 円錐

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

を考えると，原点 $(0,0,0)$ での値が

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0,0,0)$$

となって法線ベクトルにならない。このような点は **特異点** (singular point) とよばれ，接平面を定義することが一般にはできない。

問 124. 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + a = 0$ が特異点を持つように、定数 a を定めよ。

11 変数変換

まずは、変数変換の意味を基本的な例で復習する。

例 11.1.

(i) $D = E = \mathbb{R}^2$ とする。

$$x = au + bv + x_0, \quad y = cu + dv + y_0$$

は、一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と平行移動を組み合せた変数変換を与える。ただし、$ad - bc \neq 0$ とする。

(ii) $E = \{(r, \theta); r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $D = \{(x, y) \neq (0, 0)\}$ および

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

で変数変換を定めることができる。これを**極座標変換** (polar coordinate transformation) と呼ぶ。

次は朝飯前といったところなれど、必ず間違える人がいるのはなぜ。と聞くのもやぼ、味噌煮込み。

問 125. $D = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$ とするとき、対応する極座標の範囲を求めよ。

次も、変数変換の意味を復習するためのもの。これを試験で問うと、そのできの悪いこと。計算だけじゃないよ、説明だよ、と百万遍唱えれど馬の耳。

問 126. 次の式で表される変数変換を考える際に注意すべき点は何か。

$$x = u + v, \quad y = uv.$$

Jacobian とは、符号付き密度なり。

例 11.2. 極座標変換において、

$$\lim \frac{\Delta D}{\Delta E}, \quad \frac{\partial(x, \theta)}{\partial(r, \theta)}$$

を別個に計算し、一致することを確かめる。$\Delta E = \Delta r \Delta\theta$,

$$\Delta D = \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r^2 \Delta\theta = r\Delta r\Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\theta.$$

また、

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r.$$

例 11.3. 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を使う。$\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r$ に注意して、

$$\int_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi} e^{-r^2} rdrd\theta = 2\pi \int_0^a e^{-r^2} rdr = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

再び、ガウス積分。

例 11.4. $D = \{(x, y); |x| \leq a, |y| \leq a, x^2 + y^2 \geq a^2\}$ に対して、

$$\int_D e^{-x^2-y^2}\, dxdy \leq e^{-a^2}\, |D| = \frac{4 - \pi}{4} a^2 e^{-a^2}$$

という評価を使えば、上の例で、$a \to \infty$ とすることで、等式

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \pi$$

のより確かな根拠を得る。

もはや、楽勝だね。

問 127. $D=\{(x,y); x^2+y^2\le 1, 0\le x\le y\}$ のとき，$\displaystyle\int_D xy\,dxdy$ を求めよ。

一次変数変換の問題。少しは、戦型代数も思い出す。

問 128. 4 点 $(0,0)$, $(1,-2)$, $(1,1)$, $(2,-1)$ を頂点とする平行四辺形とその内部を D とするとき、

$$\int_D \sin(x+y)\,dxdy$$

を求めよ。

次もよく出てくる、ベクトル解析。

例 11.5. 3 次元極座標 $(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ $(r>0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi)$ による変数変換の場合、

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta.$$

問 129. 3 次元極座標変換のヤコビ行列式を求めよ。

逆変換の関係など。

例 11.6.

$$\begin{cases} u &= xy, \\ v &= y/x^2 \end{cases}$$

なる逆変換に対して、元の変数変換は、これを x, y について解いて、

$$\begin{cases} x &= u^{1/3}v^{1/3}, \\ y &= u^{2/3}v^{-1/3} \end{cases}$$

と表わされるので、

$$J_F(u,v)=\frac{1}{3}\frac{1}{v}.$$

一方、

$$J_{F^{-1}}(x,y)=\begin{vmatrix} y & x \\ -2yx^{-3} & x^{-2} \end{vmatrix}=3\frac{y}{x^2}$$

となって、

$$J_F(u,v)J_{F^{-1}}(x,y)=1$$

が成り立っている。

問題は、解くよりも作るほうが楽しい、かな。

問 130. 変数変換 $u=xy$, $v=y/x^2$ を使って解く重積分の計算問題を作れ。

重積分の変数変換のついでに、ガンマ関数とベータ関数の関係を知っておくのも悪くない。ということで、**ガンマ関数** (gamma function)

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx, \quad t>0$$

とベータ関数 (beta function)

$$B(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx,\quad s>0,t>0$$

を導入する。

問 131. $\Gamma(n/2)$ の値を具体的に表せ。

例 11.7.

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\sin^n\theta d\theta=\frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma((m+1)/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1+(m+n)/2)}.$$

ここで、

$$\Gamma(l+1/2)=(l-1/2)(l-3/2)\dots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

を使うと m,n の偶奇で場合分けが必要になるが、いつでも値を計算できる。例えば、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin^6\theta d\theta&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(6)}\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{5!}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\\&=\frac{3}{2^9}\pi.\end{aligned}$$

問 132. 微分 $(\cos\theta\sin^{n-1}\theta)'$ を利用して、定積分

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta$$

のみたす漸化式を導き、I_n の値を具体的に表せ。その結果を、ガンマ関数を使った表示式と同定せよ。

12 微分作用素

微分作用素の変数変換の話は、案外まともな説明がなくて、これは関係者の怠慢というべきか。授業でも触れがたいのは、単に時間の問題。稽古自体は、忍耐力の問題、かな。

例 12.1.

(i) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

(ii) $x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x}$.

(iii) $-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+V(x,y)$.

例 12.2. 2 次元極座標変換では、

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

となるので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

がわかる（左辺でチルダを省略した）。

問 133. 3次元極座標変換

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

に対してラプラスの微分作用素 (Laplacian)

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

はどのように変換されるか。計算は少し手間ではあるが、偏微分計算のよい練習になる。

例 12.3. 微分作用素

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

に対して変数変換

$$u=t+x,\quad v=t-x$$

を施せば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\sim}=4\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}$$

となるので、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f=0 \iff 4\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\widetilde{f}=0$$

より、

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial v}=g(v).$$

そこで、$g(v)$ の原始関数を $G(v)$ で表せば、

$$\frac{\partial}{\partial v}(\widetilde{f}-G)=0$$

となり、$\widetilde{f}-G=F(u)$, すなわち、

$$f(x,y)=\widetilde{f}(u,v)=F(t+x)+G(t-x)$$

という形が得られる（波動方程式の一般解）。

問 134. $F(t+x)$ は x 軸の負の方向へ進行する波を、$G(t-x)$ は正の方向に進行する波を表す。これを確かめよ。

13　多変数の極値問題

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

となる点 (a,b) を関数 f の**停留点** (stationary point) と呼ぶ。

例 13.1. 関数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の停留点を求める。

近似式に近似式を代入して近似式を得る、というお話。

問 135. 合成関数 $f(x(t), y(t))$ の $t=0$ における 2 次近似式について、

$$x(t) \fallingdotseq x(0) + x'(0)t + x''(0)t^2/2, \quad y(t) \fallingdotseq y(0) + y'(0)t + y''(0)t^2/2$$

と x, y についての 2 次近似式を組み合わせることで導け。

次は 2 変数のテイラー展開と称されるものの実体といえばよいか、あるいは虚体というべきか。べき級数の話をしないとどうにも使いようがない。そしてべき級数の話は複素変数まで行かないことには。ということで、この段階ではしつこくやらない。その暇があれば、複素解析を勉強する。

問 136. 微分作用素

$$D = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$$

を使うと、

$$F^{(n)}(t) = (D^n f)(a+ht, b+kt)$$

と書ける。これを確かめよ。また、2 変数のテイラー近似式を導け。

次は線型代数なんだが、代数に偏した本には書いてないこともあるかな。困ったことだ。

問 137. 2 次関数 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ が、$AC - B^2 \neq 0$ であるとき、停留点が丁度一つ存在することを示せ。また、その停留点を (a,b) とするとき、

$$F(x,y) = F(a,b) + A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2$$

であること（2 次近似式が、正確に成り立つこと）を確かめよ。

例 13.2. 関数 $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ が $(0,0)$ で極値を持つかどうかについて調べる。

問 138. 行列の対角化

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_\pm & 0 \\ 0 & \lambda_\mp \end{pmatrix}$$

において、$\lambda_+\lambda_- = ac - b^2$ に注意して、$ac - b^2 > 0$ のとき、次を示せ。

$$a > 0 \iff c > 0 \iff \lambda_\pm > 0.$$

これはよくある問題。

問 139. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値について調べる。

こちらは、ちょっとひっかけ、というか例外処理。一度くらい経験しておく、想定内。

問 140. $f(x,y)=x^2+2x^2y-xy^2$ の極値について調べよ。

練習問題の種類は多くない。解ける問題は作りづらい、ということをむしろ実感すべきか。

例 13.3. 3 変数の関数

$$f(x,y,z)=(x+y+z)e^{-x^2-y^2-z^2}$$

の極大・極小について調べる。

問 141. 関数 $f(x,y)=(1-x-y)e^{-x^2-y^2}$ の極値について調べよ。

14 等高線と陰関数

等位面の考え方は、基本的と思うのだが、なぜか説明のない本の多さかな。なんでだろう。実際の稽古は、次元を落としての等高線ということになるのだが、立体映像を使った等位面の教材が望まれる。鞍点付近での様子とか。

次は、簡単かつ教育的と思うのだが、猫にコバンザメ。

例 14.1. 関数 $f(x,y)=y^2/2-\cos x$ の等高線の様子を調べてみよう。(振り子の運動方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin x$ の位置エネルギーが $-\cos x$ である。)

問 142. 等高線 $x^2+y-y^3/3=h$ の変化の様子を特異点に注意して調べる。

問 143. 曲線 $x^3-6xy+y^3=0$ の特異点を求め、その付近での曲線の様子を調べよ。

つぎは見掛け倒しなれど、Maxwell とかのすごい名前が出てきてびっくり。その正体が一次式であること、見抜けるか。

問 144. $f(x,y,z)=0$ で定められる陰関数について、

$$f_x(x,y,z)f_y(x,y,z)f_z(x,y,z)\neq 0$$

となる点で、次が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1$$

15 条件付極値

まずは、例から。

例 15.1. 条件 $x^2+y^2+z^2=1$ の下で、xyz の最大値と最小値を求めてみよう。

まず、拘束条件が球面を表しており、特異点も境界点をもたないことに注意する。したがって、ラグランジュ乗数法で得られる停留点の中に最大点・最小点が見つかる。$(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)=2(x,y,z)$ であるから、

$$f_x=yz=2\lambda x, f_y=xz=2\lambda y, f_z=xy=2\lambda z$$

と条件 $x^2+y^2+z^2=1$ をみたす (x,y,z) を求めると。

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

となって、このうち、$xyz=(1/\sqrt{3})^3$ となる点で最大値を、$xyz=-(1/\sqrt{3})^3$ となる点で最小値をとる。

つまらないものですが。本当につまらなかったりする。

問 145. 条件 $x^2+y^2=1$ の下で、$x^m y^n$ の最大値・最小値を求めよ。ただし、m, n は自然数とする。

角の動く範囲に気をつけて。

問 146. 三角形 ABC の 3 つの角 A, B, C に対して、$\cos A+\cos B+\cos C$ の最大値および最小値を求めよ。

エントロピーの性質。

例 15.2. 集合

$$\{(x_1,\dots,x_n); x_j\geq 0, \sum_j x_j=1\}$$

の上で定義された連続関数

$$H(x)=-\sum_j x_j\log x_j$$

が最大になるのはどのようなときか?

平均がらみのお遊び。

問 147. 集合

$$\{(x_1,\dots,x_n); x_j>0, \sum_j x_j=1\}$$

の上で定義された連続関数

$$f(x)=\sum_j \frac{1}{x_j}$$

の最小値について調べよ。

無理にでも線型代数。

問 148. 固有値が正の $n\times n$ エルミート行列 A が $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^{-1})$ となるならば、この値は n 以上であることを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

次は、relativity のはずだが、忘れた。

問 149. 条件 $x+y+z=h$ の下で、関数 $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2}$ の最小値を求めよ。ただし、$a,b,c>0$, $h\in\mathbb{R}$ は定数である。

————問題は、解くよりも作るほうが楽しい、とほざいてみないか、一度くらい。