

微積分宿題

宿 1. 正数 $a > 0$ と実数 $|x| < 1$ に対して、自然数 n についての極限である $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a x^n = 0$ を確かめよ。

Proof. ここでは、 x は定数で変化させるのは自然数 n であるので、目移りしないよう $b = -\log|x| > 0$ と置き、

$$|n^a x^n| = n^a e^{n \log|x|} = n^a e^{-bn} = \frac{n^a}{e^{bn}}$$

のように書き直し、 $n^a \ll e^{bn}$ ($n \rightarrow \infty$) に注意して極限 $n \rightarrow \infty$ を取るとわかる。 □

宿 2. つぎの関数のグラフの概形を、定義域の境界での様子に注意して描け。

(i) $y = \sqrt{x}e^{-x}$ ($x \geq 0$).

(ii) $y = x \log x$ ($x > 0$).

Proof. (i) $(x^{1/2}e^{-x})' = (\frac{1}{2} - x)x^{-1/2}e^{-x}$ と

$$(x^{1/2}e^{-x})'' = ((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2})x^{-3/2}e^{-x}$$

から、 $x = 1/2$ にピークをもち、 $0 \leq x < (1/2) - (1/\sqrt{2})$ で上に凸、 $x > (1/2) - (1/\sqrt{2})$ で下に凸、 $x \rightarrow \infty$ のとき、0 に収束し、 $x = 0$ では $\sqrt{x}$ のように垂直に立ち上がる。

(ii) $(x \log x)' = \log x + 1$, $(x \log x)'' = 1/x$ であるから、 $x = 1/e$ で最小値 $-1/e$ をもち、下に凸で、 $x \rightarrow \infty$ のとき発散し、 $x \rightarrow +0$ のとき 0 に下から垂直に近づく。 □

宿 3. $\arctan x$ の微分の公式を導け。

Proof. $y = \arctan x$ の逆関数が $x = \tan y$ ($-\pi/2 < y < \pi/2$) であり、 $\frac{dx}{dy} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ となることから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

□

宿 4. 関数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ について、

(i) グラフの概形を描け。

(ii) 逆関数 $g(y)$ の導関数を求めよ。

(iii) 逆関数 $g(y)$ を y の式として具体的に表わせ。その式をみて何か思い出さないか。

Proof. (i) まず f は奇関数であることに注意。 $f'(x) = (e^x + e^{-x})/2 > 0$, $f''(x) = f(x)$ の正負 (f の凹凸) が $x = 0$ で切り替わることに注意して描く。

(ii) 目的は逆関数なので $\frac{dy}{dx} = (e^x + e^{-x})/2$ を $y = (e^x - e^{-x})/2$ で表わす。これは二次式のちょっとした書き直しであり、 $\frac{dy}{dx} > 0$ に注意して、

$$y^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 4}{4} \iff \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 + 1}.$$

これから、

$$g'(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

(iii) $y = (e^x - e^{-x})/2$ を x について解くだけであるが、それには、まずは e^x について解いてみる。

$$2y = e^x - e^{-x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \iff (e^x - y)^2 = y^2 + 1$$

より、 $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ であるが、 $e^x > 0$ より、正しい符号は $+$ の方で、その対数を取ることで、

$$g(y) = x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

これと (ii) を合わせると、 $1/\sqrt{y^2 + 1}$ の原始関数が $\log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ であるという、前に確認した関係式が再現するからくり、わかるか。□

宿 5. 不定積分

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad \int x e^{-x^2} dx$$

を求めよ。

Proof. これは、典型的な置き換え積分の例です。あとの方は、素直に $t = x^2$ という置き換えで書き直すと、

$$\int e^{-t} \frac{dt}{2} = -\frac{1}{2} e^{-t} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

最初の方は、2回の置き換えをまとめて $x^2 = a^2 t$ とすれば、

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2 t}} a^2 \frac{dt}{2} = \frac{a}{2} \int (1-t)^{-1/2} dt = -a(1-t)^{1/2} = -a\sqrt{1 - (x^2/a^2)} = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

以上、いずれも単純な部類であるが、それでも計算間違いの恐れもある。より実用的な方法は、「あたりをつけて、あとで調整」というもので、最初の積分であれば、

$$\left((a^2 - x^2)^{1/2} \right)' = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-1/2} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

あとの積分であれば、

$$\left(e^{-x^2} \right)' = e^{-x^2} (-2x) = -2x e^{-x^2}$$

を積分に書き直す方が、効率がよく間違いも少ない。□

宿 6. 自然数 $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\int x^n e^{-x} dx$$

を求めよ。

Proof. こちらは典型的な部分積分の問題で、微分の等式

$$(x^n e^{-x})' = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}$$

を積分に書き直した

$$\int x^n e^{-x} dx = n \int x^{n-1} e^{-x} dx - x^n e^{-x}$$

n について順次求めていけばよい。ただし、一般式を書く下すには、少し工夫が必要で、右辺に現れる係数 n の効果処理しやすいように、全体を $n!$ で割ってみると、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx &= \int \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx - \frac{x^n}{n!} e^{-x} \\ &= \int \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} e^{-x} dx - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x} \\ &= \cdots = \int e^{-x} dx - e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = -e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

これから

$$\int x^n e^{-x} dx = -n! e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

がわかる。 □

宿 7. 微分 $(x\sqrt{a^2 - x^2})'$ を利用して、

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right)$$

を示せ。また定積分

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2} dt$$

を扇形の面積と結びつけることで、公式を幾何学的に解釈せよ。

Proof. 前半は $\sqrt{x^2 + A}$ の不定積分と同じ方法とだけ言うておく。

後半は、積分で面積が表わされる図形を 直角三角形と扇型の分割して、それぞれの面積を図形的に求めてみればわかる。 $\arcsin(x/a)$ が扇型の弧の長さを表わすことに注意する。 □

宿 8. 双曲線の有理パラメータ表示 $y = t(x+1)$, $y^2 = x^2 - 1$ におけるパラメータ t の動く範囲に注意し、不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

を有理関数の不定積分に還元する方法で求めよ。

Proof. 双曲線上の点 $(-1, 0)$ を通り 傾きが $0 < t < 1$ の直線 $y = t(x+1)$ と $y^2 = x^2 - 1$ との他の交点は、

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{2t}{1-t^2}$$

となるので、この変数変換の下、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{1-t^2}{2t} \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right)' dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \log \frac{1+t}{1-t}.$$

さいごに、 $t = \sqrt{(x-1)/(x+1)}$ に注意して、

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}{2} = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

を代入すると、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x > 1).$$

□

宿 9. 誤差を表す積分を評価する際に $a < x$ を暗黙裡に仮定したが、最後に得られた評価式は $x < a$ の場合でも成り立つ。これを確かめよ。

Proof. 符号が正になるように手直しするだけである。

$$\left| \int_a^x f''(t)(x-t) dt \right| = \left| \int_x^a f''(t)(x-t) dt \right| \leq \int_x^a |f''(t)|(t-x) dt \leq M \int_x^a (t-x) dt = \frac{M}{2}(x-a)^2.$$

□

宿 10. $\sin 1^\circ$ の一次近似計算の誤差を見積もれ。

Proof. 誤差の積分表示

$$\sin 1^\circ - \frac{\pi}{180} = - \int_0^{\pi/180} \left(\frac{\pi}{180} - t \right) \sin t dt$$

で、不等式 $0 \leq \sin t \leq t$ ($t \geq 0$) を使い、

$$\int_0^{\pi/180} \left(\frac{\pi}{180} - t \right) \sin t dt \leq \int_0^{\pi/180} \left(\frac{\pi}{180} - t \right) t dt = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 = 8.86 \cdots \times 10^{-7}$$

と評価すれば、 $\sin 1^\circ$ は $\pi/180 = 0.0174532 \cdots$ よりも小さく、その差は $8.86 \cdots \times 10^{-7}$ 以下である。

その結果、 $\sin 1^\circ = 0.01745 \cdots$ のように、小数点以下 5 桁までが確定する。

□

宿 11. テイラー近似式を利用して、 e の値を小数点以下 3 桁まで正確に求めよ。

Proof. n 次近似の誤差項は、

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 e^t (1-t)^n dt \leq \frac{e}{n!} \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

と評価され、 $n = 6$ については、

$$2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{517}{720} = 2.7180 \cdots$$

となるので、 $3/7! = 3/5040 < 0.0006$ と合せて、2.718 まで確定する。

□

宿 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \pi/2$ であるが、この極限の収束のスピードを調べるために、

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

であるような a, b, c を求めよ。

$$x = \frac{\cos(a/x + b/x^2 + c/x^3 + \cdots)}{\sin(a/x + b/x^2 + c/x^3 + \cdots)} \iff x \sin(a/x + b/x^2 + c/x^3 + \cdots) = \cos(a/x + b/x^2 + c/x^3 + \cdots)$$

で、 $\sin, \cos$ のテイラー展開を使うと、 $a = 1, b = 0, c = -1/3$ が順次求まる。

宿 13. 等比数列の和の積分から得られる $\log(1+x)$ についての剰余項と微積分の基本公式に現れるものと比較せよ。両者が同じものであることを直接示すことができるだろうか。ヒント：帰納法と部分積分。

Proof. $\int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$ を n についての帰納法で示す。 $n=0$ のときは明らかに成り立つので、 n について正しいとする。さて、

$$\frac{d}{dt} \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+1}} = -(n+1) \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} - (n+1) \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}}$$

を $0 \leq t \leq x$ について積分すると、

$$-x^{n+1} = -(n+1) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt - (n+1) \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}} dt$$

より

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}} dt = \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

ここで帰納法の仮定を使うと、右辺は

$$\frac{1}{n+1} x^{n+1} - \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt = \int_0^x (t^n - \frac{t^n}{1+t}) dt = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

となって、めでたい。

直接、積分の変数変換で示すこともできます。これについては、最新の講義ノートのテイラー展開の説明をご覧ください。□

宿 14. 正数 $a, b > 0$ に対して、

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+b}$$

を示せ。とくに $a=2, b=1$ と取ると具体的にどうなるか。

Proof.

$$x^{b-1} \sum_{k=0}^n (-x^a)^k = x^{b-1} \frac{1 - (-x^a)^{n+1}}{1+x^a}$$

を $0 \leq x \leq 1$ について積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a} dx &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{ak+b-1} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{a(n+1)+b-1}}{1+x^a} dx \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{ak+b} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{a(n+1)+b-1}}{1+x^a} dx \end{aligned}$$

であるが、最後の積分は

$$\int_0^1 \frac{x^{a(n+1)+b-1}}{1+x^a} dx \leq \int_0^1 x^{an+a+b-1} dx = \frac{1}{a(n+1)+b}$$

より、 $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づくので、求める表示を得る。

$a=2, b=1$ のときは、 $\int 1/(x^2+1) dx = \arctan x$ により、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

という等式 (Gregory-Leibniz series) になる。□

宿 15. 次の計算の誤りについて説明せよ。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-1}^{x=1} = -2.$$

Proof. 原始関数を使った積分計算は、途中に微分が考えられない点（今の場合は $x = 0$ ）があるときは使えないと認識する。このことは、 $1/x$ も同じことで、よく公式として掲げられる

$$\int \frac{1}{x} = \log |x| + C$$

というのは、不正確なものである。というよりも間違っていると認識しておこう。これが正しいのであれば、

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \left[\log |x| \right]_{-1}^1 = 0 - 0 = 0$$

も正しいことになるので。 □

宿 16. 実数 $a > 0$ と $b < 1$ に対して、広義積分

$$\int_0^1 \frac{(-\log x)^a}{x^b} dx$$

が収束することを示し、その値をガンマ関数により表せ。

Proof. 積分関数は範囲 $0 < x < 1$ で正の値をとることに注意して、変数変換 $t = -\log x \iff x = e^{-t}$ ($0 < x \leq 1, 0 < t < \infty$) を行くと、

$$\int_0^1 \frac{t^a}{e^{-bt}} (-e^{-t}) dt = \int_0^\infty t^a e^{-(1-b)t} dt.$$

さらに、 $(1-b)t = u$ と変数変換すると、

$$\int_0^\infty \frac{u^a}{(1-b)^a} e^{-u} \frac{du}{1-b} = \frac{\Gamma(a+1)}{(1-b)^{1+a}}$$

となる。この最後の表示から、広義積分の収束も同時にわかる。 □

宿 17. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{1+n^b}$$

が収束するような (a, b) (a, b は実数) の範囲を図示せよ。

Proof. b の正負で場合分けする。

(i) $b \leq 0$ のとき。 $1 < 1_n^b \leq 2$ ($n \geq 1$ であるから、 $n^a/2 \leq n^a/(1+n^b) < n^a$ となり、 $\sum_{n \geq 1} n^a < \infty \iff a < -1$ と合わせると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{1+n^b} < \infty \iff a < -1.$$

(ii) $b > 0$ のとき、 $n^b < 1+n^b \leq 2n^b$ ($n \geq 1$) であるから、 $n^{a-b}/2 \leq n^a/(1+n^b) < n^{a-b}$ となり、 $\sum_{n \geq 1} n^{a-b} < \infty \iff a-b < -1$ と合わせると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{1+n^b} < \infty \iff a-b < -1.$$

したがって、(i), (ii) を合せた範囲が求めるものである。 □

宿 18. 一次式のグラフとして表せない平面は、どのようなものであるか。

Proof. これは答えだけ書いておきます。 z 軸に平行な平面です。ただし一次式の意味は $ax + by + c$ で定数関数も含むものとします。□

宿 19. 正数 $a > 0$ と実数 b に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx$$

を求めよ。

Proof. e の肩の二次式を $-ax^2 + bx = -a(x - b/2a)^2 + b^2/4a$ と書き直して、積分変数を x から $t = \sqrt{a}(x - b/2a)$ に取り替えると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+b^2/4a} \frac{1}{\sqrt{a}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}.$$

□

宿 20. $D = \{(x, y); 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ のとき、

$$\int_D x e^y dx dy$$

を求めよ。

Proof. 二つのくり返し積分でやってみよう。

$$\int_0^1 dx \int_0^y x e^y dy = \int_0^1 x(e^x - 1) dx = [x e^x - e^x - \frac{1}{2} x^2]_0^1 = \frac{1}{2}$$

途中で、 $(x e^x - e^x)' = x e^x$ を使った。

もう一つは

$$\int_0^1 dy \int_y^1 x e^y dx = \int_0^1 e^y \frac{1}{2} (1 - y^2) dy = \frac{1}{2} [e^y]_0^1 - \frac{1}{2} [y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

途中で $(y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y)' = y^2 e^y$ を使った。

ちなみに、上で使った部分積分の等式は、当たりをつけて微調整するのが効率的かつ間違いも少ない。 $y^2 e^y$ の原始関数であれば、とりあえず

$$(y^2 e^y)' = y^2 e^y + 2y e^y$$

を書いて、右辺に現れる消えて欲しい $2y e^y$ 原始関数に近いと思われる

$$(2y e^y)' = 2y e^y + 2e^y$$

を引くと、

$$(y^2 e^y - 2y e^y)' = y^2 e^y - 2e^y$$

となるので、最後に

$$(2e^y)' = 2e^y$$

を辺ごとに加えて、

$$(y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y)' = y^2 e^y$$

のように求める。

□

宿 21. 二重数列^{*1} $c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,2}, c_{1,3}, c_{2,3}, c_{3,3}, \dots$ の和

$$\sum_{1 \leq m \leq n} c_{m,n}$$

を二重和として二つの方法で表せ。

Proof. これは先に m で和をとってからあとで n について和をとるか、逆に n について和を取ってから最後に m について和を取るかの違い。ということで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n c_{m,n} \quad \text{と} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} c_{m,n}$$

であり、この二つは

$$\sum_{1 \leq m \leq n} |c_{m,n}| < \infty$$

であれば、 $\sum_{1 \leq m \leq n} c_{m,n}$ に一致する。 □

宿 22. $K = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ であるとき、三重積分

$$\int_K dx dy dz$$

を求めよ。

Proof. 条件をみたら z が存在するような (x, y) の範囲が $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ であることに注意して、不等式の情報を積分範囲に取り込むと、

$$\begin{aligned} \int_K dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

これは錐の体積が底面積×高さ÷3の特別な場合である。 □

宿 23. 半平面 $D = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y > 0\} = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ 上の広義二重積分

$$\int_D e^{-(x^2+1)y} dx dy$$

をくり返し積分により計算することで、ガウス積分の公式を導け。

Proof. 計算がうまくいく方から、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-(x^2+1)y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \left[\arctan x \right]_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$

2つ目は途中で $y = u^2$ という変数変換を使うと、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dy e^{-y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 y} dx &= \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2. \end{aligned}$$

二つを比べて求める公式が得られる。 □

^{*1} 群数列といういい方が馴染みかも知れない。

宿 24. $\int \cos(xy) dx = \frac{1}{y} \sin(xy)$ を y で次々と偏微分してみよ。

宿 25. $f(x, y, z) = e^{y+z} \frac{x}{z^2+1}$ に対して、 $f_{xyz} = f_{yzx}$ であることを確かめよ。また、この等式を一般の関数に対して保証する十分条件を与えよ。

宿 26. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$, $(x, y) = (a + \alpha t, b + \beta t)$ のとき、チェインルールが成り立つことを確かめよ。

宿 27. 地球とそれを取り巻く大気圏は、横長の楕円を回転させた、回転楕円体というものに近く、赤道軸の径を x 、回転軸方向の径を y で表すとき、その体積は $V = (4\pi/3)x^2y$ で与えられる。赤道方向の地球の径が 6278km で大気圏の厚さは 17km、回転軸方向の地球の径は 6357km で大気圏の厚さは 7km であるという。大気圏の体積が地球の体積の何%程度に相当するか見積もれ。

宿 28. ななめの円柱の方程式。

(i) ベクトル (x, y, z) の $(1, 1, 1)$ 方向への正射影を求めよ。

(ii) 直線 (t, t, t) (t は実数) を中心線とする半径 r の円柱を表す方程式を求めよ。

宿 29. 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を x 軸のまわりに回転させて得られる曲面（二葉双曲面という）と y 軸のまわりに回転させて得られる曲面（一葉双曲面という）の方程式を求めよ。それぞれの場合について、点 $(1, 0, 0)$ を通る接平面の方程式を求め、接平面が元の曲面と $(1, 0, 0)$ 以外の点で交わるかどうか調べよ。

宿 30. $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ のとき、 $\int_D xy dx dy$ を求めよ。

宿 31. 4点 $(0, 0)$, $(1, -2)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$ を頂点とする平行四辺形とその内部を D とするとき、

$$\int_D \sin(x+y) dx dy$$

を求めよ。

宿 32. 3次元極座標変換のヤコビ行列式を求めよ。

宿 33. 関数 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) のグラフを x 軸のまわりに回転させた曲面のパラメータ表示を円柱座標を使って与え、曲面積を表す式を導け。

また、 $f(x) = 1/x^\lambda$ ($x \geq 1$) のとき、回転体の体積は有限で その表面積が無限大になるような $\lambda > 0$ の範囲をもとめよ。（ $\lambda = 1$ のときは Torricelli's trumpet^{*2} と呼ばれる。）

宿 34. $f(x, y) = (x+y)^m - ax^ny^n$ (m, n は自然数で $a \neq 0$) の停留点を求めよ。

宿 35. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値について調べる。

宿 36. 等高線 $x^3 - 3x - y^2 = h$ の変化の様子を特異点に注意して調べる。とくに特異点を通る等高線は有理曲線（実は多項式パラメータで表わされる）である。

宿 37. 関数 $x^3 - 3xy + y^3$ の特異点のまわりでの等高線の様子を調べ、それをもとに等高線の全体像を推測

^{*2} Gabriel's horn ともいう。Torricelli (1608–1647) はガリレイの弟子で、トリチェリの真空で有名であるが、このように数学的な結果も残している。

せよ。またデカルトの葉で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

宿 38. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で、 $x^m y^n$ の最大値・最小値を求めよ。ただし、 m, n は自然数とする。

宿 39. 三角形 ABC の3つの角 A, B, C に対して、 $\cos A + \cos B + \cos C$ の最大値および最小値を求めよ。