微積分宿題

宿 1. 正数 $a > 0$ と実数 $|x| < 1$ に対して、自然数 n についての極限である $\lim_{n\to\infty} n^a x^n = 0$ を確かめよ。

Proof. ここでは、x は定数で変化させるのは自然数 n であるので、目移りしないよう $b = -\log|x| > 0$ と置き、

$$|n^a x^n| = n^a e^{n\log|x|} = n^a e^{-bn} = \frac{n^a}{e^{bn}}$$

のように書き直し、$n^a \ll e^{bn}$ $(n \to \infty)$ に注意して極限 $n \to \infty$ を取るとわかる。 □

宿 2. つぎの関数のグラフの概形を、定義域の境界での様子に注意して描け。

(i) $y = \sqrt{x}e^{-x}$ $(x \geq 0)$.

(ii) $y = x\log x$ $(x > 0)$.

Proof. (i) $(x^{1/2}e^{-x})' = (\frac{1}{2} - x)x^{-1/2}e^{-x}$ と

$$(x^{1/2}e^{-1})'' = ((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2})x^{-3/2}e^{-x}$$

から、$x = 1/2$ にピークをもち、$0 \leq x < (1/2) - (1/\sqrt{2})$ で上に凸、$x > (1/2) - (1/\sqrt{2})$ で下に凸、$x \to \infty$ のとき、0 に収束し、$x = 0$ では $\sqrt{x}$ のように垂直に立ち上がる。

(ii) $(x\log x)' = \log x + 1$, $(x\log x)'' = 1/x$ であるから、$x = 1/e$ で最小値 $-1/e$ をもち、下に凸で、$x \to \infty$ のとき発散し、$x \to +0$ のとき 0 に下から垂直に近づく。 □

宿 3. $\arctan x$ の微分の公式を導け。

Proof. $y = \arctan x$ の逆関数が $x = \tan y$ $(-\pi/2 < y < \pi/2)$ であり、$\dfrac{dx}{dy} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ となることから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

□

宿 4. 関数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ について、

(i) グラフの概形を描け。

(ii) 逆関数 $g(y)$ の導関数を求めよ。

(iii) 逆関数 $g(y)$ を y の式として具体的に表わせ。その式をみて何か思い出さないか。

Proof. (i) まず f は奇関数であることに注意。$f'(x) = (e^x + e^{-x})/2 > 0$, $f''(x) = f(x)$ の正負 (f の凹凸) が $x = 0$ で切り替わることに注意して描く。

(ii) 目的は逆関数なので $\frac{dy}{dx} = (e^x + e^{-x})/2$ を $y = (e^x - e^{-x})/2$ で表わす。これは二次式のちょっとした書き直しであり、$\frac{dy}{dx} > 0$ に注意して、

$$y^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 4}{4} \iff \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 + 1}.$$

これから、

$$g'(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

(iii) $y = (e^x - e^{-x})/2$ を x について解くだけであるが、それには、まずは e^x について解いてみる。

$$2y = e^x - e^{-x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \iff (e^x - y)^2 = y^2 + 1$$

より、$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$ であるが、$e^x > 0$ より、正しい符号は $+$ の方で、その対数を取ることで、

$$g(y) = x = \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

これと (ii) を合わせると、$1/\sqrt{y^2+1}$ の原始関数が $\log(y+\sqrt{y^2+1})$ であるという、前に確認した関係式が再現するからくり、わかるか。 □

宿 5. 不定積分

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx, \qquad \int xe^{-x^2}dx$$

を求めよ。

Proof. これは、典型的な置き換え積分の例です。あとの方は、素直に $t = x^2$ という置き換えで書き直すと、

$$\int e^{-t}\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}e^{-t} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

最初の方は、２回の置き換えをまとめて $x^2 = a^2t$ とすれば、

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2t}}a^2\frac{dt}{2} = \frac{a}{2}\int (1-t)^{-1/2}\,dt = -a(1-t)^{1/2} = -a\sqrt{1-(x^2/a^2)} = -\sqrt{a^2-x^2}.$$

以上、いずれも単純な部類であるが、それでも計算間違いの恐れもある。より実用的な方法は、「あたりをつけて、あとで調整」というもので、最初の積分であれば、

$$\left((a^2-x^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

あとの積分であれば、

$$\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}$$

を積分に書き直す方が、効率がよく間違いも少ない。 □

宿 6. 自然数 $n = 1, 2, \ldots$ に対して、

$$\int x^n e^{-x}\,dx$$

を求めよ。

Proof. こちらは典型的な部分積分の問題で、微分の等式

$$(x^n e^{-x})' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$$

を積分に書き直した

$$\int x^n e^{-x}\,dx = n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx - x^n e^{-x}$$

n について順次求めていけばよい。ただし、一般式を書く下すには、少し工夫が必要で、右辺に現れる係数 n の効果を処理しやすいように、全体を $n!$ で割ってみると、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^n}{n!}e^{-x}\,dx &= \int \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}\,dx - \frac{x^n}{n!}e^{-x} \\ &= \int \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}e^{-x}\,dx - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x} - \frac{x^n}{n!}e^{-x} \\ &= \cdots = \int e^{-x}\,dx - e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} = -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

これから

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -n!e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

がわかる。 □

宿 7. 微分 $(x\sqrt{a^2-x^2})'$ を利用して、

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

を示せ。また定積分

$$\int_0^x \sqrt{a^2-t^2}\,dt$$

を扇形の面積と結びつけることで、公式を幾何学的に解釈せよ。

Proof. 前半は $\sqrt{x^2+A}$ の不定積分と同じ方法とだけ言っておく。

後半は、積分で面積が表わされる図形を 直角三角形と扇型の分割して、それぞれの面積を図形的に求めてみればわかる。$\arcsin(x/a)$ が扇型の孤の長さを表わすことに注意する。 □

宿 8. 双曲線の有理パラメータ表示 $y = t(x+1)$, $y^2 = x^2 - 1$ におけるパラメータ t の動く範囲に注意し、不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

を有理関数の不定積分に還元する方法で求めよ。

Proof. 双曲線上の点 $(-1, 0)$ を通り 傾きが $0 < t < 1$ の直線 $y = t(x+1)$ と $y^2 = x^2 - 1$ との他の交点は、

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{2t}{1-t^2}$$

となるので、この変数変換の下、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1-t^2}{2t}\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)'\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\,dt = \log\frac{1+t}{1-t}.$$

さいごに、$t = \sqrt{(x-1)/(x+1)}$ に注意して、

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$$

を代入すると、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2-1}) \quad (x>1).$$

□

宿 9. 誤差を表す積分を評価する際に $a<x$ を暗黙裡に仮定したが、最後に得られた評価式は $x<a$ の場合でも成り立つ。これを確かめよ。

Proof. 符号が正になるように手直しするだけである。

$$\left|\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt\right| = \left|\int_x^a f''(t)(x-t)\,dt\right| \leq \int_x^a |f''(t)|(t-x)\,dt \leq M\int_x^a (t-x)\,dt = \frac{M}{2}(x-a)^2.$$

□

宿 10. $\sin 1^\circ$ の一次近似計算の誤差を見積もれ。

Proof. 誤差の積分表示

$$\sin 1^\circ - \frac{\pi}{180} = -\int_0^{\pi/180} (\frac{\pi}{180}-t)\sin t\,dt$$

で、不等式 $0\leq \sin t \leq t$ $(t\geq 0)$ を使い、

$$\int_0^{\pi/180} (\frac{\pi}{180}-t)\sin t\,dt \leq \int_0^{\pi/180} (\frac{\pi}{180}-t)t\,dt = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = 8.86\cdots\times 10^{-7}$$

と評価すれば、$\sin 1^\circ$ は $\pi/180 = 0.0174532\cdots$ よりも小さく、その差は $8.86\cdots\times 10^{-7}$ 以下である。

その結果、$\sin 1^\circ = 0.01745\cdots$ のように、小数点以下５桁までが確定する。 □

宿 11. テイラー近似式を利用して、e の値を小数点以下３桁まで正確に求めよ。

宿 12. $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \pi/2$ であるが、この極限の収束のスピードを調べるために、

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

であるような a, b, c を求めよ。

宿 13. 等比数列の和の積分から得られる $\log(1+x)$ についての剰余項と微積分の基本公式に現れるものと比較せよ。両者が同じものであることを直接示すことができるだろうか。ヒント：帰納法と部分積分。

宿 14. 正数 $a,b>0$ に対して、

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+b}$$

を示せ。とくに $a=2$, $b=1$ と取ると具体的にどうなるか。

宿 15. 次の計算の誤りについて説明せよ。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-1}^{x=1} = -2.$$

宿 16. 実数 $a > 0$ と $b < 1$ に対して、広義積分

$$\int_0^1 \frac{(-\log x)^a}{x^b}\,dx$$

が収束することを示し、その値をガンマ関数により表せ。

Proof. 積分関数は範囲 $0 < x < 1$ で正の値をとることに注意して、変数変換 $t = -\log x \iff x = e^{-t}$ $(0 < x \leq 1,\, 0 < t < \infty)$ を行うと、

$$\int_\infty^0 \frac{t^a}{e^{-bt}}(-e^{-t})\,dt = \int_0^\infty t^a e^{-(1-b)t}\,dt.$$

さらに、$(1-b)t = u$ と変数変換すると、

$$\int_0^\infty \frac{u^a}{(1-b)^a} e^{-u} \frac{du}{1-b} = \frac{\Gamma(a+1)}{(1-b)^{1+a}}$$

となる。この最後の表示から、広義積分の収束も同時にわかる。 □

宿 17. 級数

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^a}{1+n^b}$$

が収束するような (a, b) (a, b は実数) の範囲を図示せよ。