# 微積分 III

山上　滋

2018 年 11 月 7 日

## 目次



ここに、微積分と線型代数にまたがる一連の存在定理をまとめ置く。気の利いた微積分の本には書いてあることであるが、そういった本が少なくしかも絶版であったりすること、準備の部分その他があちらこちらに散らばっていてつまみ食いしにくい、ということもあり、微積分におけるもやもや感が気になる人向けということで。ただし、論理記号と $\epsilon$-$\delta$ は知っているものとする。これについては本も含めていろいろあるあるが、手っ取り早いものとして、次を挙げておく。

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/˜yamagami/teaching/set2018.pdf
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/˜yamagami/teaching/real2018.pdf

用語と記法：$n$ 個の実数を並べた $x = (x_1, \cdots, x_n)$ をユークリッド空間の点と同一視し、$n$ 次元ユークリッド空間そのものを $\mathbb{R}^n$ という記号で表す。また、点 $x$ と座標原点 $0 = (0, \cdots, 0)$ との間の距離を

$$|x| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$$

と書き、点 $a$ を中心とした半径 $r > 0$ の開球 $B_r(a)$ と閉球 $\overline{B}_r(a)$ を次で定める。

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}, \quad \overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r\}.$$

## 1　ユークリッド空間のトポロジー

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における点列 $(x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}))_{k\geq 1}$ は,

$$\lim_{k,l\to\infty} |x^{(k)} - x^{(l)}| = 0$$

なる性質をもつとき**コーシー列**と呼ばれる。点列 $(x^{(k)})$ がある点に収束することとコーシー列であることは同値である。

**定義 1.1.**

(i) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $U$ が開集合であるとは, $\forall a \in U$, $\exists r > 0$, $B_r(a) \subset U$ となること。

(ii) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $F$ が閉集合であるとは, $F$ に含まれる点列の収束点が全て $F$ に含まれること。

(iii) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $S$ に対してその境界 $\partial S$ を

$$\partial S = \{a \in \mathbb{R}^n; \forall r > 0, B_r(a) \cap S \neq \emptyset, B_r(a) \setminus S \neq \emptyset\}$$

で定義すると, $S^\circ = S \setminus \partial S$ は $S$ に含まれる最大の開集合, $\overline{S} = S \cup \partial S$ は $S$ を含む最小の閉集合になっている。

開集合は境界を全く含まない集合であり, 閉集合は境界を全て含むものと言ってもよい。次は定義から簡単にわかる。

**命題 1.2.** 開集合の補集合は閉集合であり, 逆も成り立つ。

**定義 1.3.** $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $K$ は次の性質 (finite covering property) をもつとき**コンパクト**であるという。開集合の集団 $\{U_i\}_{i\in I}$ が

$$K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

という条件をみたすとき, $I$ の有限部分集合 $F$ が存在して

$$K \subset \bigcup_{i\in F} U_i$$

とできる。

**定理 1.4.** $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $K$ に対して, 次の *3* 条件は同値。

(i) $K$ はコンパクト集合である。

(ii) $K$ に含まれる点列は, $K$ の点に収束する部分列をもつ。

(iii) $K$ は有界閉集合である。

*Proof.* (i) $\Rightarrow$ (ii): コンパクト集合が有界であることはすぐ分る。$\{a_j\}_{j\geq 1}$ を $K$ に含まれる点列で、点 $a \in \mathbb{R}^n$ に収束するものとする。もし $a \notin K$ とすると、$K$ の各点 $x \in K$ に開集合 $B_{|x-a|/2}(x)$ を対応させることにより $K$ を $\{B_{|x-a|/2}(x)\}_{x\in K}$ で覆うことができる。$K$ のコンパクト性により有限個の点 $x_1, \ldots, x_N$ があって、$\{B_{|x_j-a|/2}(x_j)\}_{1\leq j\leq N}$ で $K$ を覆うことができる。$|x_1 - a|, \ldots, |x_N - a|$ の最小値を $r > 0$ とすれば、

$K$ のすべての点は $a$ との距離が $r$ 以上になって、$a$ に収束する $K$ の点列は存在しないことになり、出発点の仮定に反する。したがて、$a \in K$ となって $K$ は閉集合になる。

(ii) $\Rightarrow$ (i): 区間縮小法 (Bolzano の絞り出し論法) による。有界閉集合 $K$ がコンパクトにならないとしよう。$K$ 覆う開集合の集り $\{U_i\}_{i\in I}$ で有限個の $U_i$ では $K$ を覆うことができないものが存在する。$K$ は集合であるから $\forall r > 0$ $K$ は半径 $r$ の有限個の開球で覆えることに注意する。とくに半径 1 の有限個の開球で $K$ は覆われる。したがって、有個の $U_i$ では覆われないような開球 $B_0$ で $B_0 \cap K \neq \emptyset$ となるものが少なくとも１つは存在する。$B_0$ も有集合であるから、半径 1/2 の有限個の開球で覆うことができ、したがって、有限個の $U_i$ では覆われないような半径 1/2 の開球 $B_1$ で $B_1 \cap B_0 \cap K \neq \emptyset$ となるものが少なくとも１つ存在する。

以下同様に, 半径 $1/2^k$ の開球の列 $\{B_k\}$ で、(i) どの $_k$ も有限個の $U_i$ では覆えず、(ii) $\cap_{1\leq j\leq k} B_j \cap K \neq \emptyset$ となるものをとることができる。いま各 $k$ に対して $\cap_{1\leq j\leq k} B_j \cap K$ に含まれる点を任意に取り出し点列 $\{c_k\}$ を作ると、$j \leq k$ のとき $|c_j - c_k| \leq 1/2^j$ であるから、$\{c_k\}$ は Cauchy 列になる。$c = \lim c_k$ とおけば $K$ が閉集合であることから、$c \in K$。そこで $c \in U_i$ となる $i$ をとれば, $\exists r > 0$、$B_r(c) \subset U_i$。したがって、$k$ を $1/2^k < r$ となるように取れば、$B_{k+1} \subset U_i$ となり、$B_{k+1}$ が有限個の $U_i$ で覆えないことに矛盾する。以上で $K$ がコンパクトであることが示された。 □

**定理 1.5.** コンパクト集合の上で定義された連続関数は、

(i) 最大値および最小値をもち、
(ii) 一様連続である。すなわち、$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$。

*Proof.* (i) $M = \sup\{f(K)\}$ とおく。$M \notin f(K)$ とすると、$M$ に収束する $f(K)$ の増加列 $M_j$ をとるとき、開集合 $f^{-1}((-\infty, M_j])$, $j = 1, \ldots$ は $K$ を覆うが、　このうちの有限個では覆えない。これは $K$ がコンパクトであることに反する。

(ii) 各 $a \in K$ に対して、$\delta_a > 0$ を $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$ for $x \in B_{\delta_a}(a)$ となるように取る。$\{B_{\delta_a/2}(a)\}_{a\in K}$ は $K$ を覆うから、有限個の $a_1, \ldots, a_N$ で覆える。$\delta = \max\{\delta_{a_1}, \ldots, \delta_{a_N}\}$ と置く。$|x - y| \leq \delta$ とすると、$|x - a_j| \leq \delta_{a_j}/2$ となる $j$ をとるとき、$|y - a_j| \leq |x - y| + |x - a_j| \leq \delta_{a_j}$ となるので、$|f(x) - f(a_j)| \leq \epsilon$, $|f(y) - f(a_j)| \leq \epsilon$ を併せて $|f(x) - f(y)| \leq 2\epsilon$ がわかる。 □

**定義 1.6.** $X$ を $\mathbb{R}^m$ の、$Y$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。写像 $\varphi : X \to Y$ が連続であるとは、$X$ 内の収束列 $(x^{(k)})_{k\geq 1}$ に対してつねに

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x^{(k)}) = \varphi(\lim_{k\to\infty} x^{(k)})$$

となること。

**命題 1.7.** 写像 $\varphi : X \to Y$ が連続になることと、$Y$ の開集合 $U$ に対して $\varphi^{-1}(U)$ が $X$ の開集合になることは同値である。

## 2 多重積分

ここでは、多変数関数の積分をより厳密にあつかう。あとの変数変換で使うのは繰り返し積分による表示であるから、それで納得できればよいのであるが、より素朴な定義は次のようなものであろう。$D$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とし、$D$ の上で定義された関数 $f$ の積分を考えるとすると、まず $D$ を $D = \bigsqcup_i D_i$ のようにいくつかの

小さい部分にわけ、部分和

$$\sum_i f(x_i)|D_i|$$

をとる。ここで、$x_i \in D_i$ は各 $i$ ごとに選ぶものとし、$|D_i|$ は $D_i$ の面積を表す。もし各 $D_i$ の大きさを $0$ に近づけるとき、この部分和の値が $x_i$ の選び方に依らずに一定の値に収束するとき、$f$ は積分可能であるといい、その値を $f$ の $D$ 上での積分と呼んで記号 $\int_D f(x)\,dx$ で表す。

以上が普通考えられる積分の定義であろうが、この素朴な定義にはいくつかの問題点がある。まず、実用上 $D$ としてはなるべく一般的な図形をとりたいのだが、そうするとそれの分割である $D_i$ の面積を予め定義しておく必要がある。実は一般的な図形の面積を定義することは、関数の積分を定義することに本質的に同値な問題である。かりに面積の定義の問題が解決したとしても、上の定義のままでは、どんな関数が積分できるのかはっきりしない。$f$ をどんなに良い関数だとしても、一般的な $D$ をとる限り、繰り返し積分で出てくる関数は、滑らかなものにはならない。

### リーマン積分

箱領域 $[a,b] = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$ における関数のリーマン積分とその性質。

**定義 2.1.** 箱領域 $B$ の上で定義された有界関数 $f : B \to \mathbb{R}$ と $B$ の箱分割 $\Delta = \{B_i\}$ に対して、

$$\overline{S}(\Delta, f) = \sum_i \overline{f}_i |B_i|, \quad \underline{S}(\Delta, f) = \sum_i \underline{f}_i |B_i|, \quad |\Delta| = \max\{d(B_i)\}$$

と置く。ここで

$$\overline{f}_i = \sup\{f(x); x \in B_i\}, \quad \underline{f}_i = \inf\{f(x); x \in B_i\}, \quad d(B_i) = |b_i - a_i|$$

である。そして、

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}(\Delta, f) = \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}(\Delta, f)$$

が成り立つ $f$ を**リーマン積分可能**な関数と呼ぶ。そして上の極限値を

$$\int_B f(x)\,dx$$

で表して、$f$ の**リーマン積分**、あるいは単に積分と呼ぶ。

**命題 2.2.** $f$, $g$ を箱領域 $B$ の上でリーマン積分可能な関数とするとき、

(i) 任意の実数 $\alpha$, $\beta$ に対して、$\alpha f + \beta g$ もまた積分可能で、

$$\int_B (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_B f(x)\,dx + \beta \int_B g(x)\,dx.$$

(ii) $|f(x)|$ も積分可能で、

$$\left|\int_B f(x)\,dx\right| \le \int_B |f(x)|\,dx.$$

(iii) $f(x) \le g(x)$ ならば、

$$\int_B f(x)\,dx \le \int_B g(x)\,dx.$$

**定理 2.3.** 箱領域 $B = [a, b]$ の上で定義された連続関数はリーマン積分可能で、繰り返し積分の公式[*1]

$$\int_B f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ。

*Proof.* 一様連続性による。 □

**定義 2.4.** $\mathbb{R}^n$ の有界部分集合 $D$ は、

$$1_D(x) = \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$$

で定められる関数 $1_D$ が $D$ を含む箱領域の上でリーマン積分可能になるとき、積分可能であるという。$D$ を積分可能な集合とする。$D$ の上で定義された関数 $f$ が積分可能であるとは、$1_D f$ が $D$ を含む任意の箱領域上で積分可能であることと定義する。そしてその積分値を $\displaystyle\int_D f(x)\,dx$ で表す。

**補題 2.5.** 任意の箱領域は積分可能である。

*Proof.* $n = 2$ の場合を考える。箱領域 $D$ を含む任意の箱領域 $B$ に対して、$B$ の分割 $\Delta$ を取ってきて、$\delta = |\Delta|$ とおくと、

$$\overline{S}(1_D, \Delta) - \underline{S}(1_D, \Delta) \le (h + 2\delta)(k + 2\delta) - hk$$

は、$\delta \to 0$ のとき 0 に近づく。したがって、$D$ は積分可能。 □

**例 2.6.** 閉区間 $[0, 1]$ 上の Dirichlet 関数 $f$ を

$$f(x) = 1_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is a rational number,} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義するとき、$f$ はリーマン積分不能。

**命題 2.7.**

(i) 有界可積分集合 $D$ と $\overline{D}$ の上で連続な関数 $f$ に対して、積分

$$\int_D f(x)\,dx$$

が意味を持つ。($1_D f$ がリーマン積分可能。)

(ii) $D$ を共通部分を持たない有限個の可測集合に分割するとき、

$$\int_D f(x)\,dx = \sum_i \int_{D_i} f(x)\,dx$$

がなりたつ。

[*1] 繰り返し積分では、積分変数とその変域の対応を見やすくするために、$\int_a^b dt\, f(t)$ という書き方もよく使われる。

**定義 2.8.** $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $A$ は、その支持関数 $1_A$ が任意の箱領域の上で積分可能になるとき、可測であるという。可測集合 $A$ に対してその「体積」を

$$|A| = \sup\{\int_B 1_A(x)\,dx; B \text{ はすべての箱領域を動く } \}$$

で定義する。

**例 2.9.** 正数 $\alpha > 0$ に対して、$A = \{(x,y); x > 1, 0 < y < 1/x^\alpha\}$ は可測集合で

$$|A| = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{if } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。

**命題 2.10.** 可測集合全体は、$\cup$, $\cap$, および補集合を取る操作に関して閉じていて、次の公式が成り立つ。

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

以上、リーマン積分の範囲で図形の容積を導入した。これだけで十分にも思えるが、確率論および調和解析への応用を考えると、ルベーグ積分と称されるもう一段の拡張ないし洗練が必要となる。

# 3 写像の微分

<u>線型代数からの復習</u>

$m \times n$ 行列全体を $M_{m,n}(\mathbb{R})$ で表す。$M_{m,n}(\mathbb{R})$ は $mn$ 次元ユークリッド空間と同一視できるので、$m \times n$ 行列 $A$ に対してそのノルム (Hilbert-Schmidt norm) $\|A\|$ を

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$$

で定義すると $\|A\|$ はいわゆる長さの性質の他に、不等式 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ を満たす。とくに、$|Ax| \leq \|A\|\,|x|$ $(x \in \mathbb{R}^m)$ である。

注意．行列に対するノルムとしては、上のノルムの他に、作用素ノルム

$$\|A\|_\infty = \sup\{|Ax|/|x|; 0 \neq x \in \mathbb{R}^n\}$$

もよく使われる。

**問 1.** 不等式 (ノルムの同値性) $\|A\|_\infty \leq \|A\| \leq \sqrt{mn}\|A\|_\infty$ を示せ。

<u>ベクトル値関数の積分</u>

実数を変数とするベクトル値連続関数 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ に対してその積分を

$$\int_a^b x(t)dt = \left(\int_a^b x_i(t)dt\right)_{1 \leq i \leq n}$$

で定義すると、

$$\left|\int_a^b x(t)dt\right| \leq \int_a^b |x(t)|\,dt \qquad (a < b)$$

が成り立つ。

*Proof.*

$$\int_a^b x(t)\,dt = \lim \sum_j x(t_j)(t_j - t_{j-1})$$

なる表示を用いて、

$$\left|\int_a^b x(t)dt\right| \le \limsup \sum_j |x(t_j)|(t_j - t_{j-1}) = \int_a^b |x(t)|\,dt$$

と評価する。 □

**定義 3.1.** $\mathbb{R}^n$ の開集合 $D$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $\varphi$ が点 $a \in D$ で**微分可能** (differentiable) であるとは、$m \times n$ 行列 $A$ があって、

$$\varphi(x) = \varphi(a) + A(x-a) + o(x-a) \iff \lim_{x \to a} \frac{|\varphi(x) - \varphi(a) - A(x-a)|}{|x-a|} = 0$$

となること。行列 $A$ を $\varphi'(a)$ と書き、写像 $\varphi$ の点 $a$ における**微分** (differential) と呼ぶ。また、行列値関数 $\varphi'$ を $\varphi$ の**導関数** (derivative) [*2]という。

**定理 3.2.**

(i) $\varphi$ が $a$ で微分可能であるとき、$(\varphi'(a))_{ij} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a)$。

(ii) $\varphi$ の全ての偏導関数が $D$ で存在し連続ならば、$\varphi$ は $D$ のどの点でも微分可能。

*Proof.* (i) は、変位 $x - a$ を座標軸方向に片寄らせると出る。

(ii) は次の等式からわかる。$U$ 内の 2 点 $a, b$ を結ぶ線分が $U$ に含まれるとき、

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_0^1 \varphi'(a + t(b-a))(b-a)dt.$$

□

**定義 3.3.** 関数 $\varphi : D \to \mathbb{R}$ が $C^r$ 級であるとは、$\varphi$ の $r$ 階までの偏導関数が存在して全て連続になること。これは、$m$ 個の関数 $\varphi_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ が全て $C^r$ 級になることと言い換えられる。

**命題 3.4** (Chain Rule)**.** $D$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$E$ を $\mathbb{R}^m$ の開集合とし、$\varphi : D \to E,\ \psi : E \to \mathbb{R}^l$ を $C^r$ 級の写像とするとき、合成写像 $\psi \circ \varphi : D \to \mathbb{R}^l$ も $C^r$ 級で、

$$(\psi \circ \varphi)'(a) = \psi'(\varphi(a))\varphi'(a)$$

となる。

### 収縮と不動点定理

$S$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。写像 $\Phi : S \to S$ で

$$0 < \exists \rho < 1, \quad \forall x, y \in S,\ |\Phi(x) - \Phi(y)| \le \rho |x - y|$$

となるものを**収縮**[*3](contraction) と呼ぶ。収縮は連続であることに注意。

[*2] 多変数の場合、differential よりも derivative という言い方が好まれる。微分のことをヤコビ行列という向きもあるが、これは Jacobian に引きづられた誤用であろう。三項間漸化式に関連した Jacobi matrix という言い方はあるが、これは別物。

[*3] 縮小写像という早口言葉のような訳もある。

**定理 3.5.** $S \subset \mathbb{R}^n$ を閉集合とし $\Phi : S \to S$ を収縮とする。

(i) $S$ の点 $a$ で $\Phi(a) = a$ となるも（$\Phi$ の不動点と言う）がちょうど 1 つ存在する。

(ii) 勝手な $x \in S$ に対して、$\lim_{k\to\infty} \Phi^k(x) = a$ である。ただし、$\Phi^k$ は $\Phi$ を $k$ 回合成した写像を表す。

*Proof.* 不動点が一つしかないことは、

$$|\Phi^k(x) - \Phi^k(y)| \leq \rho|\Phi^{k-1}(x) - \Phi^{k-1}(y)| \leq \cdots \leq \rho^k|x-y| \to 0 \ (k \to \infty)$$

からわかる。

点 $x \in S$ に対して、$x_k = \Phi^k(x)$ とおく。$|x_k - x_{k+1}| \leq \rho^k|x_0 - x_1|$ より

$$|x_k - x_l| \leq |x_k - x_{k+1}| + \cdots + |x_{l-1} - x_l| \leq \frac{\rho^k - \rho^l}{1-\rho}|x_0 - x_1|$$

$(k < l)$ と評価できるので、$(x_k)_{k\geq 0}$ は Cauchy 列である。極限 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ を $x_\infty$ で表せば、$S$ が閉集合であることから、$x_\infty \in S$ であり、

$$\Phi(x_\infty) = \Phi(\lim x_k) = \lim \Phi(x_k) = \lim x_{k+1} = x_\infty.$$

□

# 4 座標変換と逆写像定理

座標変換とその例、微分作用素と座標変換。

**定義 4.1.** $\varphi$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 $D$ の上で定義された $C^r$ 写像で以下の条件を充たすものを $D$ における**座標変換**と呼ぶ。

(i) $\varphi$ の像 $E = \varphi(D)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合、

(ii) $\varphi$ は一対一、

(iii) $\varphi$ の逆写像 $E \ni \varphi(x) \mapsto x \in D \subset \mathbb{R}^n$ も $C^r$。

**例 4.2.**

(i) 一次変換。

(ii) 3 次元極座標。

**命題 4.3.** $\varphi : D \to E$ を座標変換、$T$ を $E$ の上で定義された微分作用素とする。このとき、$D$ における微分作用素 $S$ で

$$(Tf) \circ \varphi = S(f \circ \varphi), \quad \forall f \in C^\infty(E)$$

となるものが一意的に定まる。また対応 $T \mapsto S$ は微分作用素の積を積に、和を和にうつす。

**定理 4.4** (逆写像定理)**.** $D \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ を $D$ の上で定義された $C^l$ 写像 $(l \geq 1)$ とする。点 $a \in D$ における $\varphi$ の微分 $\varphi'(a)$ （これは $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像、すなわち $n \times n$ 行列である）が逆をもてば、以下の性質をみたす $a$ の開近傍 $U$ が存在する。

(i) $V \equiv \varphi(U)$ も開集合になり、

(ii) $\varphi$ を $U$ に制限したものは逆写像をもち、それを $\psi$ で表すとき
(iii) $\psi : V \to U$ も $C^l$ 写像となる。

*Proof.* $A = \varphi'(a)$ とおく。$\varphi$ のかわりに $A^{-1} \circ \varphi$ を考えることにより、$\varphi'(a) = I$ としてよい。このとき、$\varphi'(x)$ および $\det(\varphi'(x))$ は $x$ の連続関数であることから、

$$\exists\, r > 0,\ \overline{B}_r(a) \subset D,\ \forall x \in \overline{B}_r(a),\quad \varphi'(x) \text{ は逆行列をもち } \|\varphi'(x) - I\| \leq \frac{1}{2} \text{ を満たす。} \tag{1}$$

写像 $\overline{B}_r(a) \ni x \mapsto \varphi(x) - x \in \mathbb{R}^n$ に積分表示の公式を適用し、(1) に注意すれば、

$$|\varphi(u) - \varphi(v) - (u - v)| \leq \int_0^1 \|\varphi'(u + t(v - u)) - I\|\, |u - v|\, dt \leq \frac{1}{2}|u - v| \tag{2}$$

となり、これから

$$|u - v| \leq 2|\varphi(u) - \varphi(v)|, \quad u, v \in \overline{B}_r(a). \tag{3}$$

ここで、写像 $\Phi_y : \overline{B}_r(a) \ni x \mapsto x - \varphi(x) + y \in \mathbb{R}^n$ $(y \in B_{r/2}(\varphi(a)))$ を考え、(2) を繰り返し使うと、$|\Phi_y(u) - \Phi_y(v)| \leq \frac{1}{2}|u - v|$ であり、

$$|\Phi_y(u) - a| \leq |u - a + \varphi(a) - \varphi(u)| + |y - \varphi(a)| \leq \frac{1}{2}|u - a| + |y - \varphi(a)| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

となって、$\Phi_y$ は $\overline{B}_r(a)$ における収縮を定め、$\Phi_y(\overline{B_r(a)}) \subset B_r(a)$ を満たす。したがって、不動点定理により、$\Phi_y(x) = x$ すなわち $\varphi(x) = y$ となる $x \in B_r(a)$ が丁度一つ存在する。そこで、$V = B_{r/2}(\varphi(a))$, $U = \{x \in B_r(a); \varphi(x) \in V\}$ と置くと、これらは開集合であり、$\varphi$ は $U$ から $V$ への全単射を与える。この $U, V$ が求めるものであることを示そう。

(3) から $\varphi : U \to V$ の逆写像 $\psi$ は Lipshitz 連続となるので、$\psi$ が $C^l$ であることを示せば定理の証明が完了する。そのために、まず $\psi$ が微分可能であることを見る。

$y_0 \in V$ とし $\varphi(x_0) = y_0$ となる点 $x_0 \in U$ をとる。$\varphi$ が $x_0$ で微分可能であることから

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

これを書き直して（$x_0 \in U \subset B_r(a)$ より、$\varphi'(x_0)$ は逆をもつことに注意）

$$\psi(y) - \psi(y_0) = \varphi'(x_0)^{-1}(y - y_0) - \varphi'(x_0)^{-1}(o(\psi(y) - \psi(y_0))).$$

ここで (3) から得られる $o(\psi(y) - \psi(y_0)) = o(y - y_0)$ を使うと

$$\varphi'(x_0)^{-1}(o(\psi(y) - \psi(y_0))) = o(y - y_0)$$

となり、$\psi$ は $y_0$ において微分可能で

$$\psi'(y_0) = \varphi'(x_0)^{-1}, \quad \varphi(x_0) = y_0,\ x_0 \in U$$

が分かる。$\psi$ の連続性から $\psi'(y) = \varphi'(\psi(y))^{-1}$ も連続となり[*4]、$\psi$ は $C^1$ 写像である。

そうすると今度は $\varphi'(\psi(y))$ が $C^{l-1}$ 写像と $C^1$ 写像の合成として $C^1$ 写像となり、従って $\psi'(y) = \varphi'(\psi(y))^{-1}$ も $C^1$ 写像、すなわち $\psi$ は $C^2$ 写像となる。以下帰納的に $\psi$ は $C^l$ 写像であるとわかる。 □

[*4] $\varphi'(x)^{-1}$ は $\varphi'(x)$ の成分の有理式で表される。

**定理 4.5.** $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ とし $F(x,y)$ を $(a,b) \in \mathbb{R}^{m+n}$ の近傍 $N(a,b)$ で定義され $\mathbb{R}^n$ に値をとる $C^r$ 写像とする。このとき $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ が逆行列をもてば、$a \in \mathbb{R}^m$ の近傍で定義され $\mathbb{R}^n$ に値を取る $C^r$ 写像 $f$ で

$$f(a) = b, \quad F(x, f(x)) = F(a,b)$$

をみたすものが丁度一つ存在する。

*Proof.* 写像 $\varphi : N(a,b) \to \mathbb{R}^{m+n}$ を $\varphi(x,y) = (x, F(x,y))$ で定め、その $(a, F(a,b))$ の近傍における逆写像を $\psi(x,z) = (g(x,z), f(x,z))$ と書けば、$g(x,z) = x$, $F(x, f(x,z)) = z$ である。 □

**例 4.6.** $n = 1$ のとき、$f(x) = f(x,b)$ は、$F(x, f(x)) = b$ および次を満たす。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))\right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right).$$

## 5 積分における変数変換

連続関数の繰り返し積分。繰り返し積分の順序不変性。関数の支え。有界集合に支えられた連続関数の積分。変数変換の公式。極座標。

**定義 5.1.** $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U$ から $\mathbb{R}^n$ の開集合 $V$ への $C^1$ 写像 $\varphi : U \to V$ で逆写像 $\varphi^{-1}$ が存在して $\varphi^{-1}$ も $C^1$ になるものを変数変換と呼んだ。変数変換 $\varphi$ に対して

$$U \ni x \mapsto \det(\varphi'(x)) \in \mathbb{R}$$

で定められる関数を $\varphi$ の**ヤコビ行列式** (Jacobian) と呼び、$J_\varphi$ という記号で表す。$J_\varphi$ は $U$ 上の連続関数である。

**定理 5.2.** $\varphi : U \to V$ を変数変換とし、$f : V \to \mathbb{R}$ を $V$ の上で定義された連続関数でその支え[*5] $[f]$ がコンパクトであるものとする。このとき

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|\,dx$$

が成り立つ。

変数の数 $n$ についての帰納法による。$n = 1$ のときには、良く知られている置換積分の公式である。そこで、$n-1$ 変数の場合には正しいとして、$n$ 変数の場合にも上の公式が成り立つことを見よう。

**補題 5.3.** $\forall a \in U$, $\exists\ a$ の近傍 $U_a$ 及び $U_a$ の上で定義された変数変換 $\psi_a : U_a \to W_a$, $W_a$ の上で定義された変数変換 $\varphi_a$ で次を満たすものが存在する。

(i) $\varphi(x) = \varphi_a(\psi_a(x)), \quad \forall x \in U_a,$

(ii) $\varphi_a$, $\psi_a$ は、座標の並べ換えにより最初の変数かまたは最後の変数を変えないようにできる。

*Proof.* $\det(\varphi'(a)) \neq 0$ であるから、$\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a), \cdots, \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(a)$ の中に 0 でないものがある。$\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(a) \neq 0$ としよう。さて写像 $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ を

$$\psi(x) = (\varphi_i(x), x_2, \cdots, x_n)$$

[*5] $[f]$ は $\{x \in V; f(x) \neq 0\}$ の $V$ における閉包を表す。

で定めると、

$$\det \psi'(a) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(a) \neq 0$$

であるから逆写像定理により $a$ の近傍 $U_a$ で $\psi_a \cong \psi|_{U_a}$ が変数変換になるものが存在する。$W_a = \psi(U_a)$ とおいて $W_a$ における変数変換を $\varphi_a \cong \varphi \circ \psi_a^{-1}$ で定めると、これらが求めるものである。実際 (i) は作り方から明らかである。(ii) を確かめよう。$\psi$ は最後の変数を変えない。$\varphi_a$ については

$$\varphi_a(\varphi_i(x), x_2, \cdots, x_n) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x))$$

であるから、最初の変数と $i$ 番目の変数を入れ替えればよい。 □

**補題 5.4.** 上の補題の (ii) の条件を満たす変数変換については定理の公式が成り立つ。

*Proof.* 例えば、変数変換 $\varphi : U \to V$ において $\varphi_i(x_1, \cdots, x_n) = x_1$ という関係が成り立っていたとする。開集合 $U$, $V$ の切り口 $U_t$, $V_t$ $(t \in \mathbb{R})$ を

$$\begin{aligned} U_t &= \{x' = (x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}; (t, x_2, \cdots, x_n) \in U\} \\ V_t &= \{y' = (y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n); (y_1, \cdots, y_{i-1}, t, y_{i+1}, \cdots, y_n) \in V\} \end{aligned}$$

で定め、$U_t$ の上で定義された変数変換 $\varphi_t$ を

$$\varphi_t(x_2, \cdots, x_n) = (\varphi_1(t, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_{i-1}(t, x_2, \cdots, x_n), \varphi_{i+1}(t, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_n(t, x_2, \cdots, x_n))$$

によって定義すれば、帰納法の仮定から

$$\int_{V_t} f_t(y')\,dy' = \int_{U_t} f_t(\varphi_t(x'))|\det \varphi_t'(x')|\,dx'$$

である。この両辺を $t \in \mathbb{R}$ について積分して、繰り返し積分の順序不変性を使うと

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x))|\det \varphi_{x_1}'(x')|\,dx$$

が得られる。一方、簡単な計算で $|\det \varphi'(x)| = |\det \varphi_{x_1}'(x')|$ が確かめられるから、主張が示された。 □

定理の証明に戻ろう。各 $a \in U$ に対して補題 5.3 の条件を満たす $U_a$ をとる。$U_a$ は $a$ を含む開集合であるから、$B_{3r}(a) \subset U_a$ となる $r > 0$ を $a$ ごとに取れて、開集合の族 $\{B_r(a)\}_{a \in U}$ によってコンパクト集合 $[f \circ \varphi] = \varphi^{-1}([f])$ が覆われる。したがって、有限個の点 $a_1, \cdots, a_N$ および数列 $r_1, \cdots, r_N$ があって、

$$[f \circ \varphi] \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N} B_{r_j}(a_j)$$

とできる。以下 $U_j = U_{a_j}$, $\varphi_j = \varphi_{a_j}$ などと略記する。

**補題 5.5.** $\mathbb{R}^n$ の上で定義され $\overline{B}_{2r_j}(a_j)$ で支えられた連続関数 $h_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, N)$ で

$$\sum_{j=1}^{N} h_j(x) = 1 \quad (x \in [f \circ \varphi])$$

となるものがとれる。

*Proof.* 連続関数 $g_j$ を

$$g_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x - a_j| \le r_j \\ 2 - |x - a_j|/r_j & \text{if } r_j \le |x - a_j| \le 2r_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めて $h_j(x) = \dfrac{g_j(x)}{\sum_j g_j(x)}$ とおけば、これが求める性質を満たす。 $\square$

準備ができたので定理の証明を完成させよう。補題 5.5 により

$$\int_V f(y)\,dy = \sum_j \int_V f(y)h_j(\varphi^{-1}(y))\,dy = \sum_j \int_{V_j} f(y)h_j(\varphi^{-1}(y))\,dy$$

但し、最後の式では $V_j = \varphi(U_j)$ とおいた。ここで $[h_j] \subset U_j$ に注意して補題 5.4 を使うと、

$$\begin{aligned} \int_{V_j} f(y)h_j(\varphi^{-1}(y))\,dy &= \int_{W_j} f(\varphi_j(z))h_j(\varphi^{-1}(\varphi_j(z)))|\det\varphi_j'(z)|\,dz \\ &= \int_{U_j} f(\varphi_j\circ\psi_j(x))h_j(\varphi^{-1}\circ\varphi_j\circ\psi_j(x))|\det\varphi_j'(\psi_j(x))||\det\psi_j'(x)|\,dx \\ &= \int_{U_j} f(\varphi(x))h_j(x)|\det\varphi'(x)|\,dx. \end{aligned}$$

この最後の式では、補題 5.3(i) および合成写像の微分の公式を使った。これらを合せると

$$\begin{aligned} \int_V f(y)\,dy &= \sum_j \int_{V_j} f(y)h_j(\varphi^{-1}(y))\,dy = \sum_j \int_{U_j} f(\varphi(x))h_j(x)|\det\varphi'(x)|\,dx \\ &= \int_U f(\varphi(x))\sum_j h_j(x)|\det\varphi'(x)|\,dx = \int_U f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\,dx \end{aligned}$$

となって、めでたい。