微積分 I

山上　滋

2019 年 7 月 24 日

目次

久方ぶりに微積分の改訂である。若干、項目の並べかえを行った。それと近似式の扱いを少ししつこくした。この近似に対する感覚というかお稽古というか、そういったものが不足していると感じていたから。

オーダー記号は、小さいのはやめて大きものにした。小さい方が定義が楽なので迷ったのであるが、テイラー近似においてあえて情報を減らす必要がないこと、応用上は big O が多用されるというあたりを勘案して変更した。吉とでるか凶とでるか結果は不明なれど。

昔は高校でやっていた程度の微分方程式を何とかしたい、それも変量の関数関係とからめて説明したい、置き換え積分を使う胡散臭さを払拭したい、の三したいへの布石としてメモを付録として入れてみた。もとより、不完全なものなので、今後、補充を続けていきたいのであるが、はてさて。

と、書いてから早一年。いまだバトンの送り渡し不如意なれど、教えて厳ならざるは師の怠りなり、という。学生の迷惑を顧みず、２０１２年度の標語としたい。

さらに３年の時がむなしく過ぎ、いまわの言葉もあらばこそ。

この講義ノートは、高校で微積分を受験科目として履修した大学１年生を対象とする。本来は手垢のついた内容ではあるが、未だに定まりなきは、何を意味するのであろうか。

1　微分の公式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分できるとは、極限

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在すること。A を**微分係数** (differential coefficient) という。微分係数は、$f(x)$ と a だけで決まるので、$f'(a)$ という書き表し方をする。また、関数を $y=f(x)$ と書く習慣に従って、$\Delta y = f(a+h)-f(a)$, $\Delta x = h$ という式の極限として、$\dfrac{dy}{dx}$ という表記も一般的である。

さらに、a を変化させると $f'(a)$ は a の関数と思えるので、これを f の**導関数** (derivative) という。また、以上の手続きを総称して**微分** (differentiation) と呼ぶ。

微分（係数）の幾何学的*1（図形的）な意味は接線の傾きであり、微分可能とは接線が引けること。一方、物理的な意味としては、変数を時間のパラメータ t として、**速度** (velocity) ということになる。とくに、3 次元空間における質点の運動が、

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

というベクトル値関数で表されているとき、その速度（ベクトル）は、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

によって与えられる。他にも、数が表している量の意味に応じて様々な解釈が可能であるが、とくに断らなければこの幾何学的立場を第一に考えることにする。

問 1. 定義に従って

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

を導いてみる。

問 2. 連続だが $x=0$, $x=1$ の二ヶ所で微分できない、実数全体で定義された関数を無数に作れ。あらゆる点で微分できない連続関数は存在すると思うか否か*2。

上で述べた微分の定義は、次のように言い換えることができる。

$$o(h) = f(a+h) - f(a) - Ah$$

とおくと、関数 $o(h)$ は、$h \to 0$ としたときに、h よりも早く 0 に近づく。すなわち、

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - A\right) = 0$$

が成り立つ。逆に、$o(h)$ がこの性質を持てば、$f(x)$ は $x=a$ で微分できて、$A=f'(a)$ となっている。

このことから、微分係数とは、関数を一次式で近似したときの係数に他ならないことがわかる。これは便利な言い換えで、例えば、$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o_1(h)$, $g(a+h) = g(a) + g'(a)h + o_2(h)$ と書き表せば、

$$\begin{aligned} f(a+h)g(a+h) &= (f(a) + f'(a)h + o_1(h))(g(a) + g'(a)h + o_2(h)) \\ &= f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))h + f'(a)g'(a)h^2 \\ &\quad + (f(a) + f'(a)h)o_2(h) + (g(a) + g'(a)h)o_1(h) + o_1(h)o_2(h) \end{aligned}$$

*1 幾何（きか）という用語は、geometry の音訳の geo の部分に由来するという。

*2 Weierstrass 関数、高木関数で検索してみよ。

であるが、最初の３項以外は、h よりも 0 に近づくスピードが早いので、まとめて $o_3(h)$ と書いてしまうと、

$$f(a+h)g(a+h) = f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))h + o_3(h),$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{o_3(h)}{h} = 0$$

の形になっていて、これは

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を意味する。同じような考え方で、次が分かる。

定理 1.1 (微分の基本公式)**.**

(i) 積の微分

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(ii) 合成関数[*3] の微分

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x).$$

問 3. (ii) を $o(h)$ 方式で確かめよ。理解しているかどうかがはっきりする。

ここで、基本的な関数の微分の公式を復習しておこう。まず、定義から即座にわかるものとして

$$1' = 0, \qquad x' = 1, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

次に、指数関数 a^x の微分は、

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

より、 Aa^x の形である。ここで、A は指数関数 $y = a^x$ の $x = 0$ における接線の傾きを表しているから、a が 1 に近づけば $A \to 0$ となり、また a が大きくなれば、$A \to +\infty$ となる。そこで、ちょうど $A = 1$ となるような $a > 1$ が存在するはずで、それを普通 e と書く。したがって、$(e^x)' = e^x$ であり、また e を底[*4]とする対数関数[*5] $\log x$ は、e^x の逆関数であることから（接線の傾きの関係を考えて、詳しくは３節)、$(\log x)' = 1/x$ $(x > 0)$ となる。

Remark . ここでは、直感的な形で数 e を導入してみた。より厳密な（直感を排除した）定義は、多くの教科書に採用されている「連続複利計算」を使うか、積分を使う方法であるが、それは「なぜ」という問に答えにくい形のもので、説得力のある導入方法とは言いがたい。

例 1.2.

(i) 正数 $a > 0$ を底とする指数関数 $y = a^x$ の微分は、$a^x = e^{x \log a}$ と書きなおして（$a = e^{\log a}$ を使う)、合成関数の微分の公式を適用すれば、

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

(ii) 同じく実数 a に対して x の冪関数 x^a $(x > 0)$ の微分は、$x^a = e^{a \log x}$ と書きなおして、同じく合成関数の微分の公式を適用すれば、

$$\frac{d}{dx} x^a = e^{a \log x}(a \log x)' = ax^{a-1}.$$

[*3] 合成関数と言っているものは、具体的には式の代入に他ならない。あえて別の用語を使うのは、値域と定義域の関係に注意を促したいがためである。しかしながら、具体的な経験が乏しい段階でうるさくいうこともなかろう。

[*4] base の訳語。土台の方が適訳とは思うが。

[*5] いわゆる自然対数 (natural logarithm) と呼ばれるもので、$\ln x$ という記号を使うのが国際標準。

問 4. 正数 $a > 0$ を変化させるとき、指数関数 $y = a^x$ のグラフがどのように変わるか確認する。幂関数 $y = x^a$ のグラフについてはどうか。

問 5. x^x $(x > 0)$ の導関数を求めよ。

問 6. $x < 0$ のとき、

$$(\log(-x))' = \frac{1}{x}$$

であることを確認。

以上のことをまとめると、

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\log|x|)' = \frac{1}{x}\ (x \neq 0), \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\ (x > 0).$$

例 1.3. 合成関数の微分を三重に行う計算。

$$\left(\log\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

問 7. 上の例で、x の範囲 (関数の定義域) を (実数 a の正負で場合分けし) 吟味する。

例 1.4. $\dfrac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$ を微分して

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -(f(x))^{-2}f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

問 8. 商の微分の公式

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

を導け。

Remark . 商の微分の公式を覚える必要はない。覚えてしまった人は、これを機会に忘れよう。具体的な関数に対して、基本関数の微分と基本公式を組み合せて計算できれば十分である。

次に、三角関数の微分。加法公式 $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$ を使うと、

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\cos h - 1}{h}\sin x + \frac{\sin h}{h}\cos x$$

であるから、

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

が問題。

最初の極限は、関数 $\cos x$ の $x = 0$ における接線の傾きになっており、$y = \cos x$ は $x = 0$ で直線 $y = 1$ に接するから、0 となる。2 つめの極限は、角度を測る単位として、半径 1 の円の弧の長さ[*6]を使えば、1 となる。(面積の比較から、$\sin h \leq h \leq \tan h$ を導く。図 1 参照。)

以上により、$(\sin x)' = \cos x$ がわかり、同様にして $(\cos x)' = -\sin x$ となるので、

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2.$$

[*6] 弧度 (radian) という。1.7 rad のように書くが、数学では rad を省くことが多い。角度 $\pi/2$ の如く。

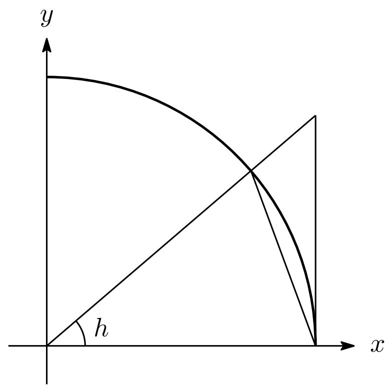


図 1

問 9. $\tan x$ の微分の公式を確認。

問 10. 三角関数の微分において、角度を測る単位として radian を使う理由は何か。

問 11. 具体的な関数の微分の公式の中で基本的なものは何か。また派生的なものは何か。

2　関数の増大度

基本的な 3 つの関数 ($a > 0$ は定数)

$$\log x, \quad x^a, \quad e^x$$

の値は、$x \to \infty$ のとき、いずれも正の無限大に発散する。その**増大のスピード**を比較してみよう。

まずは、x^a と e^x の比較。もう少し一般に、x^a と e^{bx} ($b > 0$) の比較。このためには、両者の比を表す関数

$$f(x) = x^a e^{-bx}, \qquad x > 0$$

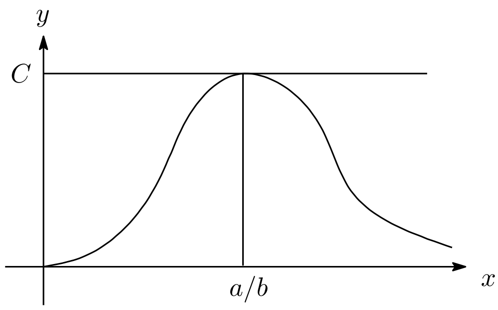
を考えるとよい。$f(x)$ のグラフは、$f'(x) = x^{a-1}e^{-bx}(a - bx)$ に注意して増減表を書いてみると、

x		a/b	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

となり、$x = a/b$ で最大値をとることがわかる。

これだけでは $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ かどうか判断できないが、定数 $C > 0$ で、$|f(x)| \leq C$ をみたすものがあることは分かる。(このような $C > 0$ があるとき、関数 $f(x)$ は有界であるといった言い方をする。) さて、x^a と e^x の比較にもどって、$x^a e^{-x}$ を $x^a e^{-x/2} e^{-x/2}$ とわけてみよう。すると $b = 1/2$ の場合の結果により、$|x^a e^{-x/2}| \leq C$ となる定数 $C > 0$ があるので、

$$|x^a e^{-x}| \leq C e^{-x/2}$$



という不等式[*7] が得られる。$\lim_{x\to+\infty} e^{-x/2} = 0$ は知っているので、これから

$$\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0$$

が出てくる。

$\log x$ と x^a との比較は、変数変換 $t = \log x$ により、

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{at}} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t^{1/a}}{e^t}\right)^a = 0$$

となる。($x \to +\infty$ のとき、$t \to +\infty$ であることに注意。)

以上の結果を

$$\log x << x^a << e^x \qquad (x \to +\infty)$$

と書くことにしよう。

問 12. 勝手な $a > 0$, $b > 0$ に対して、$x^a << e^{bx}$ $(x \to +\infty)$ を確かめよ。また、$0 < a < b$ であるとき、x^a と x^b, e^{ax} と e^{bx} のスピードを比較せよ。

Remark . $x^a << e^{bx}$ は、x が大きいところでの様子を表しているのであって、不等式 $x^a < e^{bx}$ が x の大きくないところでも成り立つといっているのではない。実際、$a = 4$, $b = 1$ のとき $x = 2$ ととれば、

$$2^a = 16 > 3^2 > e^2.$$

例 2.1. 極限

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$$

を求めてみよう。ややこしげな冪が出てきたら対数である。$\log x << x$ に注意して、

$$\lim_{x\to\infty} \log(x^{1/x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

これから

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1.$$

問 13. 極限 $\lim\limits_{x\to+0} x^x$ を求めよ。

問 14. 正数 $a > 0$ と実数 $|x| < 1$ に対して、$\lim\limits_{n\to\infty} n^a x^n = 0$ であることを確かめよ。

[*7] $\leq$ は $\leqq$ の意味。国際的には、$\leq$ や $\geq$ が常用される。

問 15. つぎの関数のグラフの概形を、定義域の境界での様子に注意して描け。

(i) $y = x^2 e^{-x}$.
(ii) $y = x \log x \ (x > 0)$.

3 逆三角関数

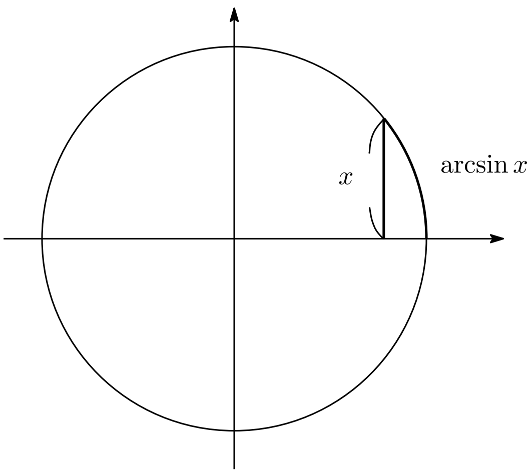
逆関数 (inverse function) の復習（縦のものを横に見る）。$y = f(x)$ の逆関数 g は、$x = g(y)$ という関係をみたす。すなわち、

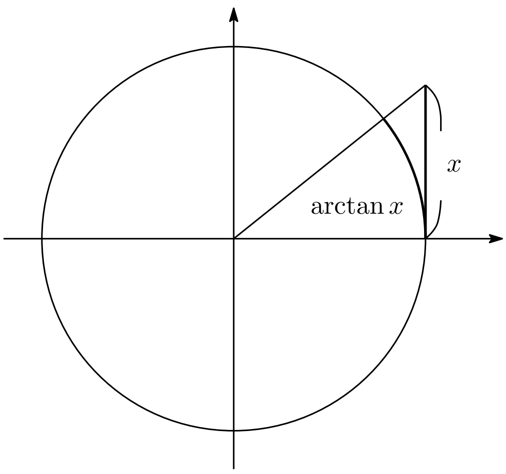
$$g(f(x)) = x, \qquad f(g(y)) = y$$

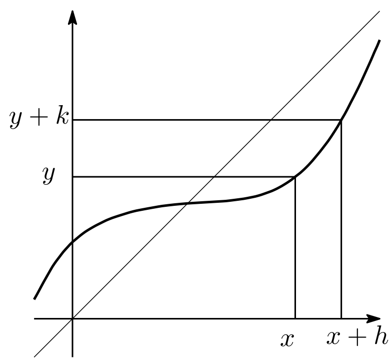
が恒等的に成り立つ。$f(x)$ として $\sin x \ (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$, $\cos x \ (0 \leq x \leq \pi)$, $\tan x \ (-\pi/2 < x < \pi/2)$ を考えた場合の逆関数を記号

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x.$$

（定義域に注意）で表し、**逆三角関数**[8] (inverse trigonometric function) と総称する。記号の由来は弧の長さを表していることによる。







[8] 逆三角関数については $\sin^{-1} x$ などの表記法も一般的であるが、$\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆数 $(\sin x)^{-1}$ と紛らわしいのでここでは使わない。

問 16. 等式 $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$ $(0 \le x \le \pi/2)$ を図形的に示せ。

問 17. $0 < a < \pi/2$ とする。$\sin x = \sin a$ をみたす実数 x をすべて求めよ。

問 18. $5\pi/4$ を含む閉区間で $\sin x$ の逆関数が定義できる最大のものは何か。

微分の公式：

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

これを導くには、一般の逆関数で考えたほうがよい*9 。すなわち、$y = f(x)$ の逆関数を $x = g(y)$ で表すとき、

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

実際、関数のグラフの図で、$y + k = f(x + h)$, $x + h = g(y + k)$ と表示して計算すると、

$$\lim_{k\to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

具体的には、$y = \sin x$ のとき $x = \arcsin y$ であるから、

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

のように使う。

問 19. $\arctan x$ の微分の公式を導け。

問 20. 関数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ について、

(i) グラフの概形を描け。
(ii) 逆関数 $g(y)$ の導関数を求めよ。
(iii) 逆関数 $g(y)$ を y の式として具体的に表わせ。その式をみて何か思い出さないか。

4 積分のこころ

区分求積法というのを覚えているか。少し前は、これすらもなかったのだが、ましになったというべきか、焼け石に水と思うべきか。積分を原始関数の値の差で定義するなど論外としても、符号付き面積というのも定義としては問題がある。積分の基本性質である線型性

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

が明らかでないから。その点、

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + k(b-a)/n) \frac{b-a}{n}$$

*9 具体的であることが必ずしもわかり易いとは限らない。一般的状況を考えることで物事の本質が見えるということもある。「問題は難しくしないと解けない」(岡潔のことば)。

という解釈は、線型性始め、積分の基本性質がよく見える形なのでよい。

そこまでは良いのであるが、分点公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

の証明が不自然なものになる。均等割では分割点がうまく表示される保証がないため。ここまで見てやると、不均等割による積分の定義に思い至るのは当然のことで、わざわざリーマンの名前を持ち出すまでもなく、次の定義にたどり着く。

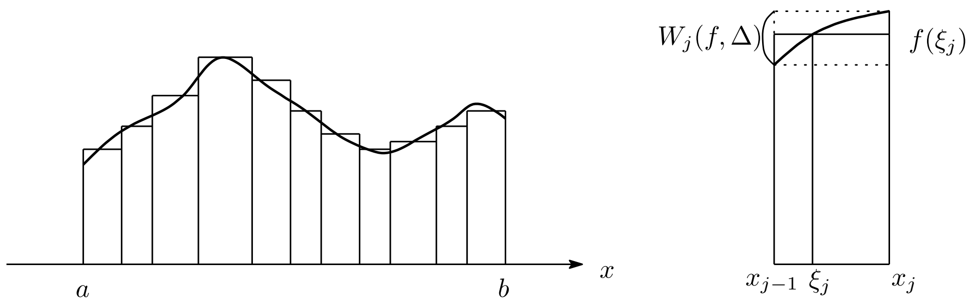
区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ に対して、定義域を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ と分割し、各小区間ごとに点 $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ を勝手にとっておく。このとき、極限

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}), \quad |\Delta| = \max\{x_1 - x_0, \cdots, x_n - x_{n-1}\}$$

が、分割の仕方および点 ξ_j の取り方に依存せずに一つの値に収束するとき、関数 $f(x)$ は（区間 $[a,b]$ 上で）**積分可能**であるという。また、その極限値を**積分**[*10](integral) とよび

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く。また f のことを**被積分関数** (integrand) という言い方をする。



Remark . $\lim\limits_{|\Delta|\to 0}$ の意味は、実際のところかなり高度なものである。また、その値を直接的に計算しがたい形のものでもある。ちなみに、積分を表す記号は、極限をとる過程で、$x_j - x_{j-1}$ が無限小量 dx に、和 $\sum$ が連続和 $\int$ に移行したことに由来し、微積分の創始者のひとりであるライプニッツによるものである。

積分の最も直感的な意味は、関数のグラフが区間 $[a,b]$ で切り取られる部分の「符号つき面積」であるが、関数および変数の値のもつ意味に応じてさまざまな現実的な解釈が可能であることも知るべきである。立体の切り口の面積の積分としての体積

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

電流 $I(t)$ の時間 t に関する積分としての電荷

$$Q = \int_a^b I(t)\,dt.$$

速さの積分としての道のり

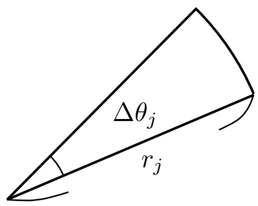
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

[*10] B. Riemann (1826–1866) に因んでリーマン積分ともいう。ただし、概念そのものは A.-L. Cauchy (1789–1857) による。区分求積法を拡張したものであることに注意。

極座標 (r, θ) を使って、$r = f(\theta)$ と表される曲線と直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれた扇状図形の面積は、

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\,d\theta$$

といった具合。



以上、いずれの場合も、「微小量を加えたものの極限が積分である」という認識が必要となる。このことを、最後の例を使って少し詳しく見ておこう。まず、角の動く範囲を $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta$ のように分割する。このとき、$\theta_{j-1} \leq \xi_j \leq \theta_j$ に対して、半径が $r_j = f(\xi_j)$ で開きが $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ の微小扇形の面積

$$\frac{\Delta\theta_j}{2\pi}\pi r_j^2 = \frac{1}{2}r_j^2\Delta\theta_j$$

と、曲線 $r = f(\theta)$ $(\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j)$ で囲まれた図形の面積は、ほぼ等しく、近似式

$$S \fallingdotseq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)^2(\theta_j - \theta_{j-1})$$

が成り立つ。分割を細かくすることで、近似の精度が上がり、その極限では、等式

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\,d\theta$$

に移行する[*11]。これすなわち、上で挙げた公式である。

問 21. 上で述べたこと以外で積分の事例になっているものを一つ挙げよ。

問 22. 曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ が、心臓形 (cardioid) と呼ばれる理由を納得し、この曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

命題 4.1 (積分の基本性質)**.**

(i)

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

(ii) 不等式 $f(x) \leq g(x)$ $(a \leq x \leq b)$ が成り立てば、

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

[*11] $f(\theta)$ $(\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j)$ の最大値・最小値を与える θ の値をそれぞれ $\overline{\xi}_j, \underline{\xi}_j$ とし、不等式

$$\frac{1}{2}\sum_j f(\underline{\xi}_j)^2(\theta_j - \theta_{j-1}) \leq S \leq \frac{1}{2}\sum_j f(\overline{\xi}_j)^2(\theta_j - \theta_{j-1})$$

を導いてから、この極限を取ればよい。

とくに

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Remark . 積分変数を表す記号 x に特別な意味はない、すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \cdots.$$

問 23. 実数 a と自然数 n に対して、次の不等式を示せ。

$$\left|\int_0^a (a-x)^n \sin x\,dx\right| \leq \frac{1}{n+1}|a|^{n+1}.$$

問 24. 積分表示

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

と上の基本性質を使って、対数関数の性質 $\log(xy) = \log x + \log y$ を（図形的に）示せ。

問 25. 正数 $b > a > 0$ に対して、

$$\frac{b-a}{b} \leq \int_a^b \frac{1}{t}\,dt$$

を確かめ、これを使って、どのような $a > 0$ に対しても、$b > a$ を十分大きく取れば、

$$\int_a^b \frac{1}{t}\,dt > \frac{1}{2}$$

であることを示せ。さらに、$x > 0$ の関数 $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ は、単調増加で

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = +\infty, \quad \lim_{x\to+0}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\infty,$$

であることを示せ[*12]。

さて、積分可能と言い立てるくらいなので、積分不可能な関数もあるはずである。そのような「変な例」を一つだけ。

例 4.2 (Dirichlet)**.** 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

を定めると、どのような区間 $[a, b]$ においても、上の意味で積分可能にならない。

実は、ある意味、このような積分できない関数の方が多いのであるが、グラフを描けるような通常の関数は積分可能である。その内容を定理の形で述べる前に、ことばを用意しておこう。関数 $f(x)$ が $x = a$ で不連続ではあるが、極限

$$\lim_{x\to a-0} f(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

が存在するとき[*13]、良い不連続点と呼ぶことにしよう。

[*12] 対数は知らないものとして示す。この積分関数の逆関数として指数関数 e^x を定義するのが、論理的構成上は最も簡便である。

[*13] 片側極限を表す国際標準は、$\lim_{x\to a\pm 0}$ ではなく $\lim_{x\to a^\pm}$ であったのだなあ。院入試の英訳作業で知る驚き。

例 4.3.

(i) 関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 2 & (x > 0) \end{cases}$$

は、$x = 0$ を良い不連続点としてもつ。

(ii) 関数

$$g(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の不連続点 $x = 0$ は良くない。

定理 4.4. 有界閉区間 $[a, b]$ の上で定義された関数 f の不連続点が有限個ですべて良い不連続点であれば、積分可能である。

Proof. まず、積分が存在するかどうかは、変数のもつ意味（単位）に無関係であることに注意する。そこで、x および $y = f(x)$ が長さを表している場合に、積分の存在がわかればよい。

さて、問題にしている関数については、そのグラフと x 軸とで囲まれた図形の (符号つき) 面積[*14]を S とする。

まず、連続関数の場合を扱う。区間の分割 $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ を Δ で表し、区間 $[x_{j-1}, x_j]$ における f の変動幅＝最大値と最小値の差 $W_j(f)$ を用いて、f の分割 Δ に関する変動幅を

$$W(f, \Delta) = \max_j \{W_j(f)\}$$

で定めると（前掲図参照)、

$$\left| S - \sum_{j=1} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leq W(f, \Delta)(b - a)$$

である。そこで、極限 $|\Delta| \to 0$ を考えるのであるが、f が連続であれば、$W(f, \Delta) \to 0$ となるので[*15] 、上の不等式から

$$S = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{j=1} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

がわかる。

つぎに不連続点をもつ場合であるが、説明を簡単にするために、不連続点は $x = c$ $(a < c < b)$ 一箇所であるとして、分割 Δ を c を含む部分 $[x_{k-1}, x_k]$, その左側の部分 Δ', 右側の部分 Δ'' に分けて考えると、分割 Δ', Δ'' から作られる和の極限は、連続関数の場合の議論が使えて、それぞれ

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_j{}' f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^c f(x)\, dx, \quad \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_j{}'' f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_c^b f(x)\, dx$$

[*14] どのような図形にも面積が考えられるかというと、ことは単純ではない。そもそも面積が何を意味するのかという問は素朴に見えてどうしてその奥はとても深い。微積分が高度の発達を遂げた後に初めて認識された問題であり、紆余曲折の末「測度論」という形で一応の解決を見たのが２０世紀始めのことであった。

[*15] ここは、かのコーシーも間違えたところだが、結果自体は正しいので、安心して騙されて欲しい。そもそも、関数が連続とは何を意味するかといった疑問を抱かなければ気にすることもないはずのことなので。これは、無邪気さを皮肉っているのではなく、そもそもそういった問題意識が生じて初めて意味をもつ類の問題なわけで、そこまでの経験がない人をつかまえて、お前のやっていることは正しくないのだ、反省しろ、と決めつけるのは余計なお世話というものである。

となる。残りの c を含む部分は、関数 $f(x)$ が $x=c$ の近くで有界であることから、

$$|f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| \le M(x_k - x_{k-1}) \le M|\Delta|$$

と評価して極限 $|\Delta| \to 0$ をとれば 0 に近づくことがわかる。

$\square$

定積分が連続関数に対して存在することを認めた上で、べき関数 x^α $(0 \le x \le b,\ \alpha > 0)$ に対する定積分を定義に立ち戻って求めてみよう。

例 4.5 (P. Fermat)**.** $0 < r < 1$ に対して、分点を $br^n, br^{n-1}, \cdots, br, b$ と取り、$r^n \to 0$ となるような極限 $r \to 1,\ n \to \infty$ について考える。関数の値を計算する代表点として、小区間の左端を取れば、積分の近似和として

$$\sum_{k=0}^{n-1}(br^{k+1})^\alpha(br^k - br^{k+1}) = b^{\alpha+1}\frac{(1-r)r^\alpha(1-r^{n(\alpha+1)})}{1-r^{\alpha+1}}$$

を得るので、$r \to 1,\ r^n \to 0$ に注意して極限を求めると、

$$\int_0^b x^\alpha\,dx = b^{\alpha+1}\lim_{r\to1}\frac{1-r}{1-r^{\alpha+1}} = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

がわかる。

ここで言葉の整理をしておこう。一般に、積分

$$\int_a^b f(t)dt$$

において a, b は定数と思っているのに対して、下の定理では、b のところを変数 x にかえて、積分

$$\int_a^x f(t)dt$$

を x の関数と思っている。このように積分を使って作られる関数のことを**不定積分** (indefinite integral) と称するのに対して、範囲を固定して考えた積分を**定積分** (definite integral) と呼んで区別して使う。

一方、$F'(x) = f(x)$ となるような関数 $F(x)$ のことを $f(x)$ の**原始関数** (primitive function) と呼ぶことにすれば、次の定理は、原始関数と不定積分が定数の違いを除いて同じものであることを主張していることになる[*16]。結果として、原始関数と不定積分を同じ意味で使うという慣行が出来あがった。原始関数を表わす記号として $\displaystyle\int f(x)\,dx$ が使われる理由もこれに由来する。

不定積分 $\int f(x)\,dx$ は **x の関数である**のに対して、定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は**数である**ことにくれぐれも注意。

問 26 (意地悪問題？)**.** 原始関数と不定積分の違いについて述べよ。

定理 4.6 (微積分の基本定理)**.** 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続ならば、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

[*16] 微分が恒等的に零である関数は定数関数であるという、直感的には明らかな、しかしながらよく考えてみると「議論」が必要になってくる事実を使う。

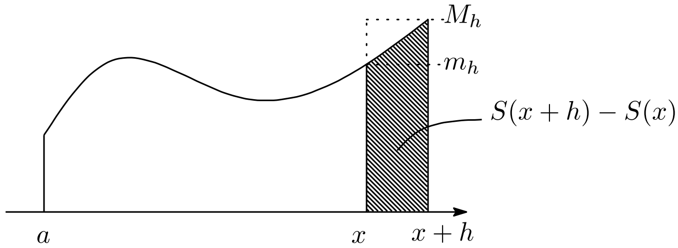
Proof. 不定積分を $S(x)$ で表す。関数 $f(t)$ の $x \le t \le x+h$ での最大値・最小値を M_h, m_h とすれば、

$$m_h \le \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le M_h$$

である。そこで、関数 $f(t)$ が $t=x$ で連続であることに注意して、極限 $h \to 0$ を取ると、

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} M_h = \lim_{h\to 0} m_h = f(x).$$

□



系 4.7 (微積分の基本公式[17])**.** 関数 $f(x)$ の定積分は、$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を使って、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

と計算できる。この右辺を、左辺に似せた形で、

$$F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

と表記する。

Proof.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x F'(t)\,dt - F(x)\right) = F'(x) - F'(x) = 0$$

である。一方、微分が（恒等的に）0 に等しい関数は、定数関数に限るので、

$$\int_a^x F'(t)\,dt - F(x) = C$$

となる定数 C が存在する。すなわち、等式

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) + C$$

がどのような x に対しても成立する。ここで、$x=a$ とおくと、$0 = F(a) + C$ より、$C = -F(a)$ を得る。一方、$x=b$ とすると、

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

□

[17] （日本の）高校数学では、この「基本公式」を定積分の定義に採用している。定積分の具体的計算のためには、それで十分な場合がほとんどであるが、積分のより深い理解と応用のためには、「和の極限」としての定義が重要な意味をもってくることは既に見たとおり。

積分の定義は、$a \le b$ という状況で与えたのであるが、上の公式を睨んで、$a > b$ の場合にも、

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定めることにする。積分の定義をこのように拡張しても、中間点の公式が成り立つことに注意。

問 27. 分かりきった関係式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

を使って、微分が連続であるような関数 $f(x)$ $(a < x < b)$ に対して、

(i) $f'(x) \ge 0$ $(a < x < b)$ ならば、f は、区間 (a, b) で増加 (increasing)、
(ii) $f'(x) > 0$ $(a < x < b)$ ならば、f は、区間 (a, b) で強い意味で増加 (strictly increasing)、

であることを示せ。

微分の結果を解釈しなおすと、積分の公式が得られる。

新たに記憶に留めるべき不定積分[*18]

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = a^{-1} \arctan \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log |x + \sqrt{x^2 + A}|.$$

例 4.8.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4}.$$

定理 4.9 (積分の技法)**.**

置換積分 *(integration by substitution)*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

$f(g(x))g'(x)$ の原始関数は、$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ に $g(x)$ を代入した $F(g(x))$ で与えられる。

部分積分 *(integration by parts)*

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Remark . (i) 置換積分の公式は、$y = g(x)$, $g'(x) = dy/dx$ という補助的な変数 y を使って、

$$\int f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(y)\,dy$$

と書くと覚えやすい。ただし、積分範囲の変化の仕方に注意。

(ii) 部分積分の「公式」は、積の微分の公式の利用の仕方（多くは試行錯誤）を学ぶべきで、上の形の式を覚える必要はない（というか覚えるべきでない）。

[*18] 不定積分を表すのに、いわゆる積分定数は書かないことにする。積分定数を書いておく理由が分かっていないのに機械的にお作法を守ることは科学的態度に反する。一度、痛い思いをすれば良いだけ。そうして不定積分の等式の意味を知るべき。

例 4.10.

$$\int \log x \, dx$$

を「部分積分の方法」で求めてみよう。

そのために、積の微分の結果 $\log x$ という項が現れる $x \log x$ という関数の微分を書き下してみる。

$$(x \log x)' = \log x + 1.$$

次に、両辺の積分を取って、

$$x \log x = \int \log x \, dx + \int 1 \, dx$$

より、

$$\int \log x \, dx = x \log x - x$$

であることがわかる。

例 4.11. 自然数 $n = 2, 3, \ldots$ に対して、

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{1}{2-2n} \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

問 28. 上の積分で $n = 1$ のときはどうなるか。

問 29. 不定積分

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx, \qquad \int x e^{-x^2} dx$$

を求めよ。

例 4.12. 不定積分

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

を部分積分の方法で調べてみよう。

積の微分の計算式

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} \right)' &= \frac{1}{(x^2+a^2)^n} - 2n \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ &= -\frac{2n-1}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2a^2 n}{(x^2+a^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

を積分して、

$$2a^2 n I_{n+1}(x) - (2n-1) I_n(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n}$$

という漸化式 (recursive relation) を得るので、

$$I_1(x) = \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

から出発して、$I_2(x), I_3(x), \ldots$ を次々と求めることができる。

問 30. 自然数 $n = 1, 2, \ldots$ に対して、

$$\int x^n e^{-x} \, dx$$

を求めよ。

例 4.13.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \arcsin\frac{x-2}{2}$.

(ii) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right)$.

Proof. (i) まず平方根の中身を処理しやすい形に書き直してから置換積分を使って、

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx = \arcsin\frac{x-2}{2}.$$

(ii) これは部分積分による。ただし、公式丸暗記ではない柔軟性が必要となる。$\sqrt{x^2+A}$ が現れるものとして、$x\sqrt{x^2+A}$ の微分を計算してみると、

$$(x\sqrt{x^2+A})' = \sqrt{x^2+A} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}.$$

ここで、求めるものよりも一見複雑そうな形の第二項の出現にめげそうになるが、不定積分の公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

を思い起こし、

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}} = \sqrt{x^2+A} - \frac{A}{\sqrt{x^2+A}}$$

という書き直しを実行すると、うれしや、第一項と同じ物が出現し、

$$(x\sqrt{x^2+A})' = 2\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{\sqrt{x^2+A}}$$

となる。あとはこれを積分して $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx$ について解けば、求める公式を得る。 □

問 31. 微分 $(x\sqrt{a^2-x^2})'$ を利用して、

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

を示せ。また定積分

$$\int_0^x \sqrt{a^2-t^2}\,dt$$

を扇方の面積と結びつけることで、公式を幾何学的に解釈せよ。

不定積分が（原理的に）計算可能なクラスとして有理関数*19があり重要であるが、その「理論」を完全に把握するには、「複素変数」を避けて通ることができない（仮に避けたとしても不自然なものになる）。

ここでは、あくまでも実践的な理解ということで、手順の説明と具体的計算例にとどめよう。有理関数の不定積分は、（分母の因数分解さえ実行できれば）いつでも具体的に求めることができる、という安心感が何よりも大事かもしれない。積分計算の技巧の多くは、適当な変数変換を施すことにより、有理関数の不定積分に帰着させるというものなので。

<u>有理関数の不定積分の求め方</u>

*19 rational function. 分数関数（多項式の商で表される関数）のこと。

必要に応じて割り算を実行することにより、

$$\int \frac{g(x)}{f(x)}dx, \qquad \deg g < \deg f$$

の場合[*20]が問題である。

分母の式 $f(x)$ を（実数の範囲で）因数分解して、

$$(x^2+ax+b)^m, \qquad (x+c)^n$$

の形の積で表しておく。

このとき

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum \frac{p(x)}{(x^2+ax+b)^m} + \sum \frac{q(x)}{(x+c)^n}$$

という表示が可能である (partial fraction decomposition)。ここで、$p(x)$、$q(x)$ は分母よりも次数の低い多項式を表す。

$p(x)$ を x^2+ax+b で割った商をさらに x^2+ax+b で割って、そのまた商を x^2+ax+b で割って、という操作を繰り返すことにより、$p(x)$ は

$$(\alpha x+\beta)(x^2+ax+b)^k, \qquad 0 \le k < m$$

の和で書き表せるので、結局

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^l}dx, \qquad 1 \le l \le m$$

の形の不定積分に帰着する。

$q(x)$ の部分も同様に処理して、こちらは、

$$\int \frac{1}{(x+c)^l}dx = \begin{cases} \frac{1}{(1-l)(x+c)^{l-1}} & \text{if } l \neq 1, \\ \log|x+c| & \text{if } l = 1 \end{cases}$$

と簡単に求まる。

最後に、１次式／２次式の冪、の不定積分は、$x^2+ax+b = (x+a/2)^2+b-a^2/4$ により、$y = x+a/2$ という変数変換を使えば、

$$\int \frac{Ay+B}{(y^2+C)^l}\,dy$$

の計算に還元され、これは、例題 4.8, 例題 4.9 で調べたように具体的に求めることができる。

例 4.14.

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx$$

を計算してみよう。

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ であるから、

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

[*20] $\deg f$ は、多項式 f の次数 (degree) を表す。温度を表すときの用語と同じであるから、度数といってもよかったのであるが、数学では次数という。

とおいて、a, b, c を求めると $a = 1/3,\ b = -1/3,\ c = 2/3$ となるので、

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{6}\int \frac{2(x-1/2)-3}{(x-1/2)^2+3/4}dx \\
&= \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}d(x-1/2)^2 + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}dx \\
&= \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan((2x-1)/\sqrt{3})
\end{aligned}$$

という表示を得る。（こう書いたからといって何か良いことがあるのかどうか。）

問 32.

$$\int \frac{1}{x^3-1}dx, \qquad \int \frac{1}{x^4-1}dx$$

問 33.

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx$$

を求めよ。（1 の８乗根が関係している。）

例 4.15. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x+e^{2x}}\,dx$ は、$t = e^x$ という置き換え（置換積分）をすると、有理関数の不定積分

$$\int \frac{1}{1+t+t^2}\frac{1}{t}\,dt$$

に帰着する。

問 34. 上の有理関数の不定積分を実行して、

$$\int \frac{1}{1+e^x+e^{2x}}\,dx$$

を求めよ。

有理曲線と積分

積分における変数変換で基本的な方法の一つに、曲線の有理関数表示がある。関数 $y = f(x)$ が、曲線のパラメータ表示 $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ で t を消去したものであれば、x, y の有理式 $R(x, y)$ に対して $x = \varphi(t)$ を変数変換とみて、

$$\int R(x, f(x))\,dx = \int R(x, y)\,dx = \int R(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\,dt$$

と計算できる。とくに、φ, ψ ともに t の有理関数で取れるならば[*21]、有理関数の不定積分に還元され、具体的な表示が（原理的に）可能となる。

円 $x^2 + y^2 = 1$ の場合、円周上の点、例えば $(-1, 0)$ 、を通る直線の傾き t をパラメータに取って、

$$y = t(x+1), \qquad x^2 + y^2 = 1$$

と連立させて解くことにより、

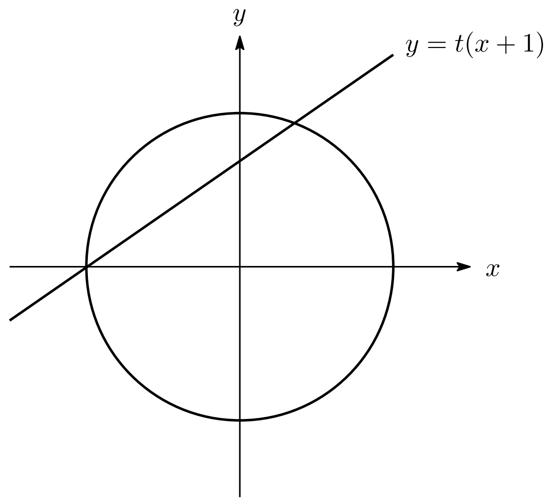
$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

[*21] このようなパラメータ表示をもつ曲線を有理曲線 (rational curve) という

という有理パラメータ表示を得る。例えば

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{y}dx$$

は t の有理積分に帰着する。



また、$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ という表示と結びつけることにより、三角関数の有理式の積分は、やはり t の有理積分を使って表せることがわかる。実際、$\sin\theta$ を t で微分した

$$\cos\theta d\theta = 2\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

に $\cos\theta = (1-t^2)/(1+t^2)$ を代入して得られる関係 $d\theta = 2dt/(1+t^2)$ を使うと、

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となるので、有理関数の不定積分に帰着する。

問 35. 半角の公式

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1, \quad \sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

を使うと、$t = \tan(\theta/2)$ である。これをチェック。

同じ方法は、他の二次曲線にも有効で、例えば、双曲線 $y = \sqrt{x^2-1}$ については、

$$y = t(x+1), \qquad y^2 = x^2 - 1$$

と連立させて解くと、

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1-t^2}$$

となるので、この場合も t の有理積分に帰着する。

問 36. パラメータ t の動く範囲に応じた場合分けに注意し、不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

をこの方法で求めよ。

5 関数の状態と近似式

関数の局所的な性質*22を調べる上で基本的な考え方に、微分と近似式の関係がある。とくに、一次の近似式と呼ばれるものは高校の教科書でも太字で取り上げられているのだが、あまり入試で出題されないせいもあるのか、不慣れな人も多いようである。しかし重要なことには変わりないので、ここで少し詳しくみておこう。

まず、関数の状態と微分との関係であるが、微分係数が接線の傾きを表しているという幾何学的意味から、

$$\begin{cases} f'(a) > 0 \text{ ならば} \quad f(x) \text{ は } x = a \text{ で増加の状態} \\ f'(a) = 0 \text{ ならば} \quad f(x) \text{ は、} x = a \text{ で瞬間的に変化を止めている状態} \\ f'(a) < 0 \text{ ならば} \quad f(x) \text{ は } x = a \text{ で減少の状態} \end{cases}$$

であるので、$f'(a) = 0$ のとき、$f'(x)$ の符号が、$x = a$ の前後で正から負へ（負から正へ）変化すれば、$y = f(x)$ のグラフは、$x = a$ でピーク（谷底）になっていることが分かる。そのときの関数の値 $f(a)$ を**極大値**（**極小値**）*23と呼ぶことは知っていよう。

一方、微分の定義式から

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

は、$|x - a|$ が小さい時、ほぼ $f'(a)$ に等しいので、

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \fallingdotseq a$$

という近似式*24が成り立つ。これを関数 $f(x)$ の $x = a$ の付近での**一次近似式** (linear approximation) という。右辺の一次式は、関数 $f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ を通る接線の方程式を与えるものであることに注意。

例 5.1.

(i) $\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1 + x/2$ の x に $x = 0.001$ を代入して、$\sqrt{1.001} \fallingdotseq 1.0005$.

(ii) $\sin x \fallingdotseq x$ の x に $1^\circ = 2\pi/360$ を代入して、$\sin 1^\circ \fallingdotseq 0.017$.

例 5.2. 半径 x の球の体積を表す関数 $f(x) = 4\pi x^3/3$ の $x = r$ の付近での近似式から、半径が Δ 増加したときの体積増加率は

$$\frac{f(r + \Delta r) - f(r)}{f(r)} \fallingdotseq 3\frac{\Delta r}{r}$$

となる。これを使って地球の体積 V と大気圏の体積 ΔV の比を見積もってみよう。地球および大気圏の形状は完全な球ではなく回転楕円体に近いもので、赤道付近での半径と大気圏の層の厚さが 6378Km と 17km、極点付近での半径と大気圏の層の厚さが 6357Km と 7Km であるから、

$$\frac{7}{6378} \leq \frac{\Delta r}{r} \leq \frac{17}{6357}$$

という不等式が成り立ち、$\Delta V/V$ は、0.3% と 0.8% の間であることが分かる。

---

*22 ある狭い範囲で成り立つ性質という意味。

*23 local maximum (local minimum). 意味は、局所的最大（局所的最小）。

*24 近似等式を表す記号は、$\approx$ が国際標準。この類の日本だけの「方言」は、プライム記号の読み方を始め色々あって、$\neq$ の傾きもそう。

例 5.3. 一次近似式の精度は、x が a に近いほど上がるということで、次のような使い方もできる。

$$e^x - e^{-x} \fallingdotseq 2x, \quad \log(1+x) \fallingdotseq x \quad (x \fallingdotseq 0)$$

の比を取って、

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

このように上手に使えば便利な一次近似式であるが、問題点もある。それは、近似の誤差がどの程度なのかが近似式を見ていただけではわからないこと。そこで、一次近似式の精密化を試みる。そのためには、微分の定義式ではなく、微積分の基本公式を書き直した

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

から得られる一次近似式の誤差の式

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_a^x f'(t)\,dt - f'(a)(x-a)$$

に着目する。目移りを防ぐために、一旦 $x = b$ とおいて、これを次のように書き直す。

$$\frac{d}{dt}\left(f'(t)(b-t)\right) = -f'(t) + f''(t)(b-t)$$

を $a \leq t \leq b$ (あるいは、$b \leq t \leq a$) の範囲で積分して得られる等式から、

$$\int_a^b f'(t)\,dt - f'(a)(b-a) = \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$$

となる。再度 $b = x$ と置き戻すと、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

という等式を得る。もとの関数 $f(x)$ とその一次近似式の差、すなわち誤差が一つの積分で表されていることに注目。この誤差の大きさを見積もるために、$a \leq t \leq x$ での $|f''(t)|$ の最大値を M として、積分の基本不等式を使えば、

$$\left|\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f''(t)|(x-t)\,dt \leq M\int_a^x (x-t)\,dt = \frac{M}{2}(x-a)^2$$

を得る。したがって誤差の絶対値は $M|x-a|^2/2$ 以下であることがわかる。

問 37. 誤差を表す積分を評価する際に $a < x$ を暗黙裡に仮定したが、最後に得られた評価式は $x < a$ の場合でも成り立つ。これを確かめよ。

例 5.4. $|(\sqrt{1+t})''| = |(1+t)^{-3/2}|/4$ の $0 \leq t \leq 0.001$ での最大値は $1/4$ であるから、

$$|\sqrt{1.001} - 1.0005| \leq \frac{1}{8}(0.001)^2 = 1.25 \times 10^{-7}$$

のように小さい[*25]。

問 38. $\sin 1^\circ$ の一次近似計算の誤差を見積もれ。

[*25] $f''(t)$ の符号が負であることに配慮すれば $\sqrt{1.001} < 1.0005$ である。

次に誤差項を表す積分の近似表示を求めてみよう。$f''(t)$ が連続関数であるものとして、$x \fallingdotseq a$ である場合を考えると、$f''(t)$ $(a \leq t \leq x)$ の値は、ほぼ $f''(a)$ に等しい。そこで、積分の中の関数 $f''(t)$ を定数 $f''(a)$ で置換えて積分を実行すると、

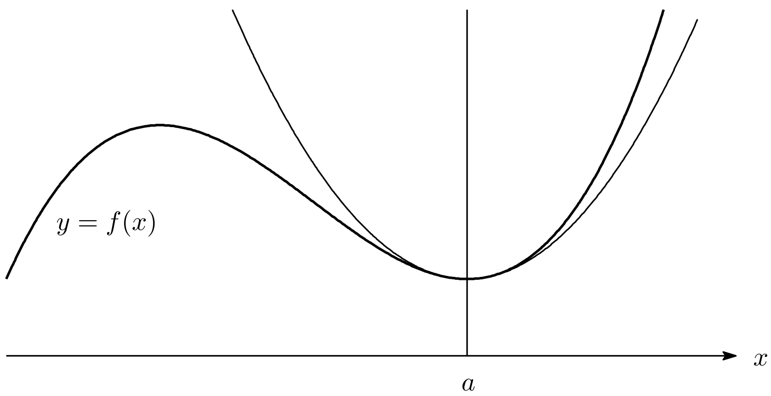
$$\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt \fallingdotseq \int_a^x f''(a)(x-t)\,dt = \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

のように近似されるので、結局

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \quad (x \fallingdotseq a)$$

という近似式が得られた。これを $f(x)$ の $x=a$ の付近での**二次近似式**[*26](quadratic approximation) という。

この二次近似式は、$f'(a)=0$ かつ $f''(a) \neq 0$ である場合がとくに有効で、関数 $f(x)$ が $x=a$ の付近で $(a, f(a))$ を頂点とする二次関数にほぼ等しいことを意味する。したがって、$f''(a)$ の正負に応じて、$x=a$ の付近で関数の値は、最小あるいは最大になっている。これは、$x=a$ の付近に限定した上での最大・最小なので、定義域全体を通しての最大・最小と区別して、**極大・極小**という言い方をすることは前に述べた通り。また、$|f''(a)|$ が山（または谷）の開き具合を表している[*27]。



定理 5.5. $f'(a)=0$ とする。

(i) $f''(a) < 0$ ならば、$f(x)$ は $x=a$ で極大。
(ii) $f''(a) > 0$ ならば、$f(x)$ は $x=a$ で極小。

例 5.6.

(i) 二次近似式 $\cos x \fallingdotseq 1 - x^2/2$ に $x = 1^\circ = 2\pi/360$ を代入すると、$\cos 1^\circ \fallingdotseq 0.99986$
(ii) 二次近似式 $\sqrt{1+x} - 1 - x/2 \fallingdotseq -x^2/8$ と $1 - \cos x \fallingdotseq x^2/2$ $(x \fallingdotseq 0)$ の比を取って、

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2/8}{x^2/2} = -\frac{1}{4}.$$

[*26] 近似式の右辺が x の二次式になっていることに注意。
[*27] $|f''(a)|$ が大きいほど山は険しく谷は深くなる。

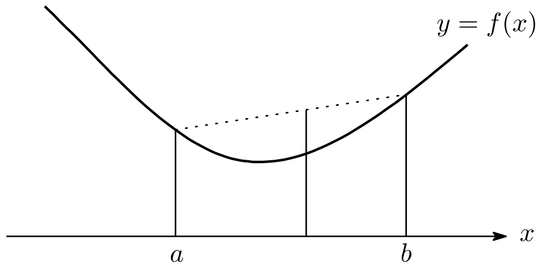
問 39. 関数 $x^a e^{-x}$ $(x > 0)$ のピークの開き具合が、パラメータ $a > 0$ の増加とともにどのように変化するか調べよ。

一般に、ある区間で $f''(x) \geq 0$ が成り立っていれば、接線の傾き $f'(x)$ は x の増加関数[*28]となるので、$f(x)$ のグラフは、下に凸になっている。

このことをもう少し正確に記述してみよう。まず、ある区間で関数 f （のグラフ）が（下に）凸であるとは、区間内の勝手な 2 点 a, b に対して

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

という不等式が成り立つことと定義する。



このとき、次が成り立つ。

命題 5.7 (Jensen 不等式)**.** 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ を含むある範囲で定義されていて、2 階微分可能で $f''(x)$ が連続かつ $f''(x) \geq 0$ *(*$a \leq x \leq b$*)* であれば、$t_1, \ldots, t_n$ という確率分布（すなわち、$t_j \geq 0$ かつ $\sum_j t_j = 1$）と数列 $\{c_j\}_{j=1}^n \subset [a, b]$ に対して、

$$f\left(\sum_{j=1}^n t_j c_j\right) \leq \sum_{j=1}^n t_j f(c_j)$$

が成り立つ[*29]。

Proof. 等式

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \int_c^x f''(t)(x-t)\,dt$$

で $f''(t) \geq 0$ に注意すれば、

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$$

という不等式が $a \leq c \leq b$, $a \leq x \leq b$ である限り成り立つことがわかる。そこで、$x = c_j$, $c = \sum t_j c_j$ とおくと、

$$f(c_j) \geq f(c) + f'(c)(c_j - c)$$

となり、この両辺に t_j を掛けて j について和をとると、

$$\sum_j t_j f(c_j) \geq f(c) + f'(c) \sum_j t_j (c_j - c) = f(c)$$

を得る。 □

[*28] ここでは弱い意味での増加関数をこのように呼ぶ。

[*29] $a \leq \sum_j t_j c_j \leq b$ に注意。これは、$t_j a \leq t_j c_j \leq t_j b$ を j について足せばわかる。

問 40. 上の証明の中で示した不等式

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$$

を幾何学的に解釈せよ。

問 41. $0 \leq \theta_j \leq \pi$ に対して、

$$\frac{\sin\theta_1 + \cdots + \sin\theta_n}{n} \leq \sin\frac{\theta_1 + \cdots + \theta_n}{n}$$

であることを確かめ、円に内接する n 角形の面積が最大になるのは、正 n 角形の場合であることを示せ。

例 5.8. 二つの確率分布 $p = \{p_j\}_{1 \leq j \leq n}$, $q = \{q_j\}_{1 \leq j \leq n}$ （ただし、$p_j > 0$, $q_j > 0$ とする）に対して、その相対エントロピー (relative entropy) を、

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^{n} p_j \log \frac{p_j}{q_j}$$

で定めるとき、$\log x$ が凸関数であることに注意すれば、

$$-H(p, q) = \sum p_j \log \frac{q_j}{p_j} \leq \log\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{q_j}{p_j}\right) = \log 1 = 0$$

であることがわかる。

関数のグラフの図形的な性質をさらに調べるために、$f(x)$ は、$f''(x)$ が存在して連続であると仮定し、$f''(x) = 0$ となる点 c の前後で $f''(x)$ の符号が変わるものとしよう。

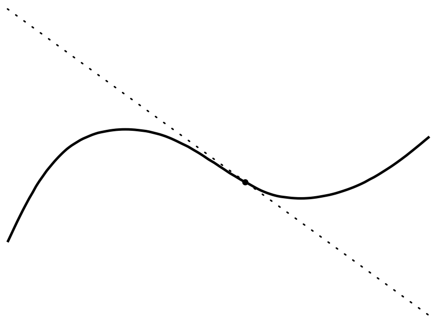
具体的に考えるために、

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{if } x < c, \\ f(x) > 0 & \text{if } x > c \end{cases}$$

であったとする。

このとき、関数 $f(x)$ のグラフは、$x < c$ の範囲で（下に）凹、$x > c$ の範囲で（下に）凸となるので、$x = c$ の点で、グラフの凹凸が変化することがわかる。

こうのように凹凸の変化する点を**変曲点** (point of inflection) と呼ぶ。



系 5.9. 関数 $f(x)$ は、$f''(c) = 0$ かつ $x = c$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化すれば、そのグラフは、$(c, f(c))$ を変曲点にもつ。

例 5.10. 関数 $f(x) = x^3$ のグラフは $x = 0$ で変曲している。

例 5.11. 関数 $f(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$ のグラフは、

$$f''(x) = e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4}$$

より、$|x| < \sigma$ で上に凸、$|x| > \sigma$ で下に凸であり、$x = \pm\sigma$ が変曲点である。

問 42. 関数 $y = f(x)$ は、$f''(c) = 0$ かつ $f'''(c) \neq 0$ であるとき、$x = c$ を変曲点にもつことを示せ。

問 43. 関数 $f(x)$ に対して、変曲点での接線は、曲線 $y = f(x)$ を変曲点付近で二分割することを示せ。

6 テイラー展開

前回、近似式を調べた際に用いた積分表示は、より高次の場合にも容易に拡張することができる。それを述べる前に、少し用語の準備を。

定義 6.1. 開区間の上で定義された関数 $f(x)$ は、n 回微分できて n 次導関数 $f^{(n)}$ が連続であるとき、C^n 級であるという[*30]。また、何度でも微分できる関数を C^∞ 級と呼ぶ。

問 44 (Leibniz Rule)**.** C^n 級関数 $f(x), g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ も C^n 級で、次が成り立つ。

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big(f(x)g(x)\Big) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

とくに、$f(x) = e^{ax}$, $g(x) = e^{bx}$ とおけば、どのような等式が得られるか。

定理 6.2 (微積分の基本公式)**.** 実数 a を含む開区間で定義された C^{n+1} 級関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x),$$
$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

と表示される。($R_n(x)$ を剰余項 *(remainder)* と呼ぶ。)

Proof. n についての帰納法で示す。$n = 0, 1$ については既に確かめた。そこで、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$$

を仮定する。

$$\frac{1}{n!}\frac{d}{dt}\Big(f^{(n)}(t)(x-t)^n\Big) = -\frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x-t)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

を t について積分して得られる

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

をこれに代入すると定理で述べた形となり、帰納法が完了する。 □

[*30] $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする。したがって、C^0 級とは連続関数であるということ。

Remark . 上の形の等式をテイラーの定理あるいは公式と呼ぶのが慣例であるが、B. Taylor がこういった公式なり定理を提示したわけではない。あとのテイラー展開についての注意書を参照。なお、コーシーの無限小解析要論 (1823) によれば、この部分積分を使った表示式は、Gaspard de Prony の論文 (1805) にあるらしい。de Prony の公式と呼ぶべきか。

例 6.3.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x e^t(x-t)^n\,dt. \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\
&\qquad\qquad + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}\int_0^x (x-t)^{2n}\cos t\,dt. \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} \\
&\qquad\qquad + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x (x-t)^{2n+1}\cos t\,dt. \\
\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt. \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\
&\qquad + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt.
\end{aligned}$$

問 45. 上の例を確かめよ。

問 46. 連続関数 g に対して、

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x g(t)(x-t)^{n-1}dt = g(x)$$

である。何故か。

例 6.4. 基本公式は、近似式のみならず、つぎのような使い道もある。$f(x) = e^x$ で $x = 1$ の場合を書けば、

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 e^t(1-t)^n\,dt.$$

$0 \leq e^t(1-t)^n \leq 1$ $(0 \leq t \leq 1)$ に注意すれば、

$$2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$$

また、$n!e$ の整数部分 $[n!e]$ が、$n!(2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!})$ であることに注意すれば、$0 < n!e - [n!e] < 1$ がすべての自然数 n について成り立つ。このことから、e が無理数であることもわかる。

問 47. つぎの 3 つの関数

$$((t-a)f(t))', \qquad ((b-t)f(t))', \qquad ((b-t)(t-a)f'(t))'$$

を区間 $[a,b]$ で積分することにより、積分の関係式（台形公式）

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-t)(t-a)f''(t)\,dt$$

を導け。

さて、誤差項＝剰余項を伴った等式が得られたので、あとは積分を評価して近似式を作るだけであるが、その前に近似式の意味をより的確に表現するための用語と記号を導入しておこう。

オーダー記号について

以前、無限大のスピードの比較をした際に、$|x^a e^{-x}| \leq Ce^{-x/2}$ $(x > 0)$ という形の不等式を利用した。このように、関数の漸近的な振る舞いを調べるために、素性のわかっている関数と比較することが良く行われる。そこで、こういった状況を表す記号を導入しておくと便利である。2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して、定数 $C > 0$ をうまく選べば、x が大きいところで

$$|f(x)| \leq Cg(x)$$

が成り立つとき、$f(x)$ は、漸近的に $g(x)$ 程度以下であるといい、$f(x) = O(g(x))$ と書く[*31]。上の例であれば、$x^a e^{-x} = O(e^{-x/2})$ となる。この記号はまた、数列の漸近的性質を記述する際にも用いられる。

例 6.5. 階乗 $n!$ は、n が大きくなるとき急激に増大することが知られている。その増大のスピードが指数関数 A^n $(A > 1)$ のそれと比べてどの程度か調べてみよう。大きな数が出てきたら、まずは対数である。

$$\log(n!) = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$$

の大きさを下から評価する。これを積分 $\int_1^n \log x \, dx$ と比べることで、不等式

$$\log n! \geq \int_1^n \log x \, dx = n \log n - n + 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を得るので、

$$\frac{A^n}{n!} = O((Ae/n)^n)$$

であることがわかる。急激な増加の代名詞にもなっている指数関数と比べてもなお、階乗のスピードが勝るということである。

問 48. 階乗を上から評価することで、$(n-1)! = O((n/e)^n)$ を示せ。

以上は、$x \to \infty$ のときの振る舞いについてであるが、同様の考えは、$x \to a$ の際にも使える。改めて述べれば次のとおり。

ある点 $x = a$ の付近で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ があるとき、$f(x)$ が $x = a$ の付近で $g(x)$ 程度以下であるとは、$f(x)/g(x)$ が $x = a$ の近くで有限の範囲に留まること、いいかえると、定数 $C > 0$ をうまく選ぶことで、不等式

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

が $x = a$ の近くで成り立つようにできること、と定義する。

関数 $g(x)$ を固定して考えると、この条件は、関数 $f(x)$ についての性質を表していることになる。このような性質をもつ関数全体を $O(g)$ という記号で表せば、$f(x)$ が上の条件を満たすことは、集合の記号を用いて

$$f \in O(g)$$

と表すことができる。より便利な記法 (notation) として、二つの関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ の差 $f_1(x) - f_2(x)$ が $O(g)$ に属することを、

$$f_1(x) = f_2(x) + O(g(x))$$

[*31] big O は Paul Bachmann が著書 (1894) の中で導入し、それを継承した Edmund Landau が別の著書 (1909) で追加的に導入した little o とともに広く用いられるようになった。O は Ordnung (order) の意で、ギリシャ文字の Omicron を使用するのが正式であるという。

と書くことにする。ここで、$O(g(x))$ は、特定の関数を表しているのではなく、f_1 と f_2 の差で表される関数の性質を変数 x を指定して書き表したものであると理解する。とくに、$f_2 \equiv 0$ のときは、$f \in O(g)$ の意味で、$f(x) = O(g(x))$ とも書く。

例 6.6. 関数として $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $g(x) = x^2$ とすれば、$|f(x)| \le |g(x)|$ であるから、$C = 1$ と取ることで、$x^2 \sin(1/x) = O(x^2)$ がわかる。

問 49. 極限 $\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ が存在するならば、$f(x) = O(g(x))$ である。

基本公式に戻って、$a \le t \le x$ (または $x \le t \le a$) での $|f^{(n+1)}(t)|$ の最大値を $M_{n+1}(x)$ で表せば、剰余項は

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n!} M_{n+1}(x) \left| \int_a^x |x-t|^n \, dt \right| = \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}(x) |x-a|^{n+1}$$

と評価されるので、$\lim_{x\to a} M_{n+1}(x) = |f^{(n+1)}(a)|$ に注意すると、次がわかる。

$$R_n(x) = O((x-a)^{n+1}).$$

すなわち、剰余項は、n 次の近似式

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

のどの項と比べても 0 に近づくスピードが速く (高位の無限小という)、近似式の誤差項と呼ぶに相応しいものになっている。以上のことをまとめると、

定理 6.7 (テイラー近似式[*32])**.** 実数 a を含む開区間で定義された C^{n+1} 級関数 $f(x)$ は、$x = a$ の付近で、次のように近似式表示される。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}).$$

また、このような表示は一つしかない。すなわち、

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + O((x-a)^{n+1})$$

が成り立てば、$c_k = f^{(k)}(a)/k!$ *(*$0 \le k \le n$*)* である。

Proof. 唯一性のみ確かめる。そのためには、

$$b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n = O((x-a)^{n+1})$$

から、$b_0 = b_1 = \cdots = b_n = 0$ が分かればよい。O の定義から、

$$|b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n| \le C|x-a|^{n+1}$$

が、a に近いすべての x で成り立つので、極限 $x \to a$ をとって、まず、$b_0 = 0$ がわかる。次に上の不等式の両辺を $|x-a| \ne 0$ で割ったのち、再度極限 $x \to a$ を取れば、$b_1 = 0$ も分かる。あとは、これを繰り返せばよい。 □

[*32] あまり一般的な呼び方ではないし、Taylor が近似式を認識していたかどうかも不明だが、意味は通じるだろう。

例 6.8. 以下の近似式が $x=0$ の付近で成り立つ。

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+O(x^{n+1}).\\
\sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+O(x^{2n+3}).\\
\cos x &= 1-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+O(x^{2n+2}).\\
\log(1+x) &= x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n+O(x^{n+1}).\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+O(x^3).
\end{aligned}
$$

問 50. $f(x)=\tan x$ に対して、$x=0$ の付近での近似式を低次の項から求めてみて、その計算量の増え方を実感せよ。

問 51. C^{n+2} 級関数 $f(x)$ に対して、

$$
\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\left(f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\cdots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n\right)
$$

を求めよ。

以下では、$a=0$ の場合、すなわち、原点のまわりでのオーダーについて考える。

命題 6.9. 原点 0 のまわりでのオーダーについて、$f(x)=O(x^m)$, $g(x)=O(x^n)$ であれば、次が成り立つ。ただし、α, β は定数、$m\wedge n=\min\{m,n\}$ であり、*(iii)* では $m\geq 1$ を仮定する。

(i) $\alpha f(x)+\beta g(x)=O(x^{m\wedge n})$.
(ii) $f(x)g(x)=O(x^{m+n})$.
(iii) $g(f(x))=O(x^{mn})$.

問 52. (iii) で $m=0$ を除外する理由を認識せよ。

例 6.10. $f(x)=2x-x^2+O(x^3)$, $g(x)=1-x+3x^2+O(x^3)$ であれば、

(i)

$$f(x)-g(x)=-1+3x-4x^2+O(x^3).$$

(ii)

$$f(x)g(x)=(2x-x^2+O(x^3))(1-x+3x^2+O(x^3))=2x-3x^2+O(x^3).$$

(iii)

$$g(f(x))=1-(2x-x^2+O(x^3))+3(2x-x^2+O(x^3))^2+O(x^3)=1-2x+13x^2+O(x^3).$$

例 6.11. 積の利用：$e^x\sin x$ の近似式を 3 次の項まで求めようと思ったら、

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+O(x^4),\quad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)$$

の積を展開し、オーダーの性質を使うことで、

$$e^x\sin x=x+x^2+\frac{1}{3}x^3+O(x^4)$$

を得る。

例 6.12. 合成関数の利用：

$$y = \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^6)$$

を

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + O(y^3)$$

に代入すれば、

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - (-x^2/2 + x^4/4! + O(x^6)) + (-x^2/2 + O(x^4))^2 + O(x^6) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6).$$

例 6.13. 近似式の唯一性の利用：$\tan x$ が奇関数であることに注意すれば、$\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + O(x^7)$ と表すことができて、これと $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + O(x^6)$ を $\tan x \cos x$ に代入したものを計算すると

$$(1 - x^2/2 + x^4/4! + O(x^6))(ax + bx^3 + cx^5 + O(x^7)) = ax + (b - a/2)x^3 + (c - b/2 + a/4!)x^5 + O(x^7)$$

となる。そこで、これと $\sin x = x - x^3/6 + x^5/5! + O(x^7)$ を比較して得られる

$$a = 1, \quad b - \frac{a}{2} = -\frac{1}{6}, \quad c - \frac{b}{2} + \frac{a}{4!} = \frac{1}{5!}$$

を解いて、

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7).$$

以上、テイラー近似式を使用するにあたって、剰余項のオーダー表示を明記してきたが、実際の計算においては、どのオーダーまでが関係するのかは計算してみて初めてわかるものであるため、以下では、多少曖昧ではあるが、剰余項を明示しない

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots$$

といった書き方も許すことにする。

例 6.14. 極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$$

を求めよ。

Proof.

$$\frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \frac{1 - (1 - x^2/2 + \cdots)}{x(x - x^3/3! + \cdots)} = \frac{x^2/2 - x^4/4! + \cdots}{x^2 - x^4/3! + \cdots} = \frac{1/2 + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to \frac{1}{2}.$$

□

例 6.15. $2^{10} = 1024$ を利用して、

$$\sqrt{1000} = \sqrt{1024 - 24} = 2^5\sqrt{1 - \frac{24}{1024}} = 32\left(1 - \frac{1}{2}\frac{24}{1024} + \dots\right)$$

と計算してみる。

問 53. テイラー近似式を利用して、e の値を小数点以下５桁まで正確に求めよ。

問 54. $\sin 61°$ の値を小数点以下５桁まで正確に求めよ。また作図による計測値とこれを比較せよ（実験数学？）。

問 55. 関数 $\sqrt{\cos x}$ のテイラー近似式を x の 4 次の項まで求めよ。また関数 $\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ $(m>0, c>0$ は定数) のテイラー近似式を v の 2 次の項まで求めよ。とくに前者については、

(i) $\sqrt{1+t}$ の近似式に $t=\cos x - 1$ のテイラー近似式を代入することで、
(ii) (ii) $(1+c_1x+c_2x^2+\dots)^2=\cos x$ の両辺を比較することで、

求めてみよ。

問 56. 関数 $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ のテイラー近似式を x の 5 次の項まで求めよ。

例 6.16.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Proof. 対数の極限値を調べる。

$$\begin{aligned} n\log\left(1+\frac{a}{n}\right) &= n(\frac{a}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\cdots) \\ &= a-\frac{1}{2}\frac{a^2}{n}+\cdots \\ &\to a. \end{aligned}$$

□

上の 2 つの例題を組み合わせた次のような問題はどうであろうか。

例 6.17. 極限

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x\sin x}$$

を求めよ。

Proof.

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\cdots, \quad x\sin x = x^2-\frac{1}{3!}x^4+\cdots$$

であるから、

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{1/x^2} = e^{-1/2}.$$

□

例 6.18. 上の例題の結果から、

$$\lim_{n\to\infty}((1+1/n)^n-e)=0$$

であるが、この左辺の量の 0 に近づくスピードはどうであろうか。

Proof. 以前と同様の考えで、

$$\log(1+1/n)^n = n\log(1+1/n) = 1-\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}+\cdots$$

であるから、

$$\begin{aligned} e^{-1}(1+1/n)^n - 1 &= e^{-1/2n+1/3n^2+\cdots} - 1 \\ &= \left(-1/2n + 1/3n^2 + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(-1/2n + 1/3n^2 + \cdots\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(-1/2n + 1/3n^2 + \cdots\right)^3 + \cdots \\ &= -\frac{1}{2n} + \frac{11}{24}\frac{1}{n^2} + \cdots \end{aligned}$$

となって、$(1+1/n)^n - e$ の 0 に近づくスピードは、$-e/2n$ と同じであることがわかる。従って、

$$\lim_{n\to\infty} n((1+1/n)^n - e) = -\frac{e}{2}$$

であることまで分かる。 □

問 57. ネピア数 e の定義として、上で確かめた極限式

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を採用している教科書も多いが、e の計算式としては、効率が悪い。上の例題を参考に、誤差の評価を行って、小数点以下５桁まで正確に求めようと思ったら、n をどの程度大きくしないといけないか調べよ。また指数関数のテイラー近似式を使った場合と比較せよ。

問 58. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(1/n)}{n}\right)\left(1+\frac{f(2/n)}{n}\right)\dots\left(1+\frac{f(n/n)}{n}\right) = e^{\int_0^1 f(t)\,dt}$$

である。

問 59. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \pi/2$ であるが、この極限の収束のスピードを調べるために、

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

であるような a, b, c を求めよ。

問 60. 関数 $y = \sqrt{-\log\cos x}$ $(0 \le x < \pi/2)$ のグラフの概形を境界での様子に注意して描け。

以上、テイラー近似式を通じて基本公式の有用性を見てきたのであるが、近似の次数を最後まで推し進めたら何が起こるであろうか。もし、$|x-a| < r$ である x に対して、剰余項 $R_n(x)$ が $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$、すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = 0$$

という性質をもてば、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots, \quad |x-a| < r$$

という表示を得る。これを、関数 $f(x)$ の $x = a$ のまわりでの ($|x-a| < r$ における) **テイラー展開** (Taylor expansion) といい、また右辺を**テイラー級数** (Taylor series) と称す。これは、一般項が $x-a$ の冪（べき）の定数倍であるという意味で、$x-a$ の**冪級数** (power series) と呼ばれるものになっている。冪級数の和を途

中で打ち切ったものは多項式になっていて、テイラー近似式を与える。したがって、テイラー展開とは、近似多項式の次数を無限に大きくした形であることに注意する。このように冪級数の形で表される関数は、解析関数と呼ばれ, 数学の中でも重要な地位を占めるものとなっている。

定理 6.19 (基本関数のテイラー展開). 最初の 3 つは全ての実数 x で、あとの 2 つは $|x| < 1$ で成り立つ。なお、最後の式 の α は実数。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots, \tag{1}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots, \tag{3}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots, \tag{4}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots. \tag{5}$$

Proof. (1) の剰余項は、

$$\frac{1}{n!}\left|\int_0^x e^t (x-t)^n \, dt\right| \le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

と評価されるので、例 6.5 の結果から、$R_n(x) \to 0$ がわかる。(2), (3) についても同様。

(4) の剰余項は、

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt$$

であるが、$0 \le t \le x$ または $x \le t \le 0$ のとき、

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \le |x|$$

となるので、

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が分かる。

最後に、もっとも面倒な (5) を示そう。剰余項は、

$$\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt$$

の形である。まず、$x > 0$ とする。十分大きな n については $\alpha - n - 1 \le 0$ なので

$$\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt \le \int_0^x (x-t)^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

次に、$-1 < x < 0$ のときは、

$$\left|\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} dt\right| = \int_0^{|x|} \left(\frac{|x|-t}{1-t}\right)^n (1-t)^{\alpha-1} dt$$

で、$\max\{(|x|-t)/(1-t); 0 \le t \le |x|\} = |x|$ を使うと、

$$\int_0^{|x|} \left(\frac{|x|-t}{1-t}\right)^n (1-t)^{\alpha-1} dt \le |x|^n \int_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1} dt.$$

何れの場合も $|x| < 1$ のとき、

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が確かめられればよい。

これを扱うには α の正負で場合を分ける[*33]必要がある。例えば、$\alpha > 0$ の時には、$l - 1 < \alpha \leq l$ なる自然数 l を取ってきて、

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)(l-\alpha)\cdots(n-\alpha)}{n!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)}{(l-1)!}\frac{l-\alpha}{l}\cdots\frac{n-\alpha}{n} \\ &\leq \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)}{(l-1)!}.\end{aligned}$$

一方、$\alpha < 0$ の時には、$-l \leq \alpha < -l+1$ なる自然数 l を取ってきて、

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+l)}{(l-1)!}\frac{-\alpha}{l}\frac{1-\alpha}{l+1}\cdots\frac{n-\alpha}{n+l} \leq \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+l)}{(l-1)!}$$

と評価すれば、$n \to \infty$ のときの

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}$$

の増大度のスピードが n について l 次多項式程度であるのに比して、$|x|^n$ の減少度のスピードの方が勝り[*34]、求める結論を得る。 □

Remark . べき乗のテイラー展開の証明については、べき級数の理論を用意した上で、微分方程式の解の唯一性に訴えるのが最も簡明である。

問 61. $\log(1+x)$ の級数表示は、$x = 1$ でも成り立つ。すなわち、

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

これを示せ。

ここで、テイラー展開とテイラー近似式の関係について整理しておこう。テイラー展開が可能であるためには、もとの関数は何度でも微分できる必要があり、その場合には、当然のことながらテイラー近似式は、テイラー級数を有限項で打ち切った形をしており、近似式が全ての次数で有効である。しかしながら、この逆は一般に成り立たない。次のコーシーによる例が示すように、無限回微分可能でもテイラー展開できない場合、すなわち、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = 0$$

が成り立たない場合があるからである。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

[*33] 分けるというのは、分かるということだ。数学の基本は場合分け。Divide and rule である。

[*34] $|x| < 1$ に注意して $|x| = e^{-a}$ と置いてみる。

と置くと、f は何度でも微分できて、$f^{(n)}(0)=0$ $(n=0,1,\dots)$ であることを示すことができる。したがって、$R_n(x)=f(x)$ であり、$x>0$ に対しては

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=e^{-1/x}\neq 0$$

となる。

問 62.

$$f^{(n)}(x)=p_n(1/x)e^{-1/x},\quad x>0$$

($p_n(1/x)$ は、$1/x$ の $2n$ 次の多項式) であることを確かめ、$f^{(n)}(0)=0$ を示せ。

問 63. (i) $t>0$ のとき、$n=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}k^n \geq n!\frac{e^{-nt}}{(1-e^{-t})^{n+1}}.$$

(ii) $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt}\cos(k^2x)$ とおけば、f は C^∞ 級で、

$$|f^{(2n)}(0)|\geq (2n)!\frac{e^{-2nt}}{(1-e^{-t})^{2n+1}}.$$

そこで、具体的にどのような関数がテイラー展開できるのかが問題となるが、これについては次のことが成り立つ。

定理 6.20. 関数 $f(x)$ は、$x=a$ のまわりでテイラー展開可能であるとする。

(i) 関数 $g(x)$ が $x=a$ のまわりでテイラー展開可能であれば、その積 $f(x)g(x)$ も $x=a$ のまわりでテイラー展開可能。

(ii) 関数 $g(x)$ が $x=f(a)$ のまわりでテイラー展開可能であれば、合成関数 $g(f(x))$ は $x=a$ のまわりでテイラー展開可能。とくに、$g(x)=1/x$ を考えると、$f(a)\neq 0$ であれば、$1/f(x)$ も $x=a$ のまわりでテイラー展開できる。

(iii) $f'(a)\neq 0$ であれば、$x=f(a)$ のまわりでテイラー展開可能な f の逆関数が存在する。

この定理の証明のためには冪級数の理論[*35]を用意しておく必要があり、残念ながらここでは、紹介できない。科学する態度に反するのであるが、ここは信じて前に進み、しかるべき段階に至ってから証明を学ぶことを薦める。先達は、膨大な数値計算に基づいた経験により結果の正しさを感覚的に理解し、微積分の適用範囲を押し広げていったものである。

関数の積、合成、逆関数などの操作でテイラー展開可能な関数を次々と作り出すことができる。そして、テイラー展開できることことさえわかれば、その具体的な形を求めるには近似式の計算方法がそのまま使える、ということである。

これまで見てきたように基本公式は、極めて強力なものではあるが、具体的なテイラー展開においては、なおまた別の方法を試すと良い場合もある。そのような例をいくつか見ておこう。

等比数列の和の公式

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})=1-x^n$$

[*35] 例えば、http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/complex/complex2010.pdf を見よ。ただし、(iii) の証明はそれだけでは足りず、逆関数の存在定理が必要である。こちらについては、http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/functional/hilbert2011.pdf の 2 章に説明がある。

から出発する。これを書き直して

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

さらに x を $-x$ で置き換えて

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n\frac{x^n}{1+x}.$$

両辺を積分して

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x dt\,(1 - t + t^2 \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n\frac{t^n}{1+t})\\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + (-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt.\end{aligned}$$

これから、剰余項の新たな積分表示

$$R_n(x) = (-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

を得る。これを評価することでも、$\log(1+x)$ のテイラー展開を示すことができる。例えば、$x=1$ の場合であれば、

$$|R_n(1)| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

から、

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

という等式を得る。

問 64. ここで導いた $\log(1+x)$ の表示式と基本公式から得られる表示式を比較せよ。両者が同じものであることを直接示すことができるだろうか。

問 65. 正数 $a, b > 0$ に対して、

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{an+b}$$

を示せ。とくに $a=2, b=1$ と取ると具体的にどうなるか。

問 66. 次の等式を利用して、$\arctan x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を求めよ。

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Remark . 関数の冪級数展開の歴史については、様々な数学者が関与していて中々に錯綜しているようである。B. Taylor が Newton 伝来の補間法による考察から、補間点を一点に縮めた極限として、今日の Taylor 級数に相当するものを得たこと (1715) に因んで、Taylor 展開と呼び慣わしている。また、テイラーの結果に触発された形で、原始的なべき級数の議論が J. Stirling によって展開された (1717) ようである。さらに年が下って、C. Maclaurin は、著書の中でテイラー級数を整理した形で取り上げ、その普及に貢献した (1742)。

一方、具体的な関数の冪級数展開については、Newton にまで遡れるようであるが、J. Gregory によって (Newton とは独立に) なされた最初の組織的研究を忘れてはなるまい。Taylor の仕事が公にされる４０年以上も前で、しかも Newton の微積分発見 (1665) のほんの数年後 (1671) のことであるということからして、Gregory の名前を無視するのは正当とは言い難い。Gregory 自身は、Newton に遠慮して発表を控えたらしいが、その謙虚さがあだになったというべきか。

現在の形での Taylor の定理（＝基本公式）が人口に膾炙するきっかけとなったのは、J.-L. Lagrange がそれを解析学の基礎として採用喧伝し (1772)、さらには、A. L. Cauchy が解析学教程 (1821) という本で踏襲したことによるらしい[*36]。

[*36] H.N. Jahnke, A History of Analysis, AMS, 2003.

そういった諸々の経緯を踏まえた上で、ここでは、敢えて簡単にテイラー級数・テイラー展開といって済ませることにする。

以上は、ヨーロッパ圏での話であるが、中世のインドに目を転じると、Madhava[*37]of Sangamagrama (1350–1425) という天文学者・数学者が、冪級数の理論を既に展開したものが後継する Kerala 学派に伝承され記録にあるという。三角関数のテイラー展開、円周率の級数表示、さらには冪級数の収束半径の計算までなされているという実に驚くべき内容で、それが１３世紀から１５世紀にかけて完成されていた。Newton-Gregory の１５０年以上も前に。

7 広義積分

積分

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx, \quad \int_1^\infty x^{-2}\,dx$$

のように積分される関数の値が有限の範囲になかったり、積分する範囲が有限でない場合も、その積分値を考えることができて、それぞれの図形の面積を表すと解釈することが可能である。こういった種類の積分をとくに強調して異常積分とか**広義積分**（improper integral）と呼ぶことが多いが、これらもまっとうな積分である。

Remark . 区別すべきは、広義積分であるかないかではなく、絶対収束（良い広義積分）か条件収束（悪い広義積分）かである。これについては、実数論の講義ノートを参照。

より一般的に次が成り立つ。

例 7.1.

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{if } 0<\alpha<1, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{if } \alpha>1, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

問 67. 正数 $\alpha>0$ に対して、

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$$

を求めよ。

例 7.2. 積分

$$\int_0^1 \log x\,dx$$

の値を求めてみよう。

まず、$y=\log x$ のグラフを描いてみて、この積分は $x=0$ の点で広義積分になっていることを確認する。積分の値そのものは、$\log x$ の原始関数が $x\log x - x$ であることに注意すれば、

$$\int_0^1 \log x\,dx = [x\log x - x]_0^1 = -1$$

と求まるのであるが、この最後の計算で、$x=0$ を $x\log x$ に代入するところは吟味が必要である。というのは、$\log x$ の値は $x=0$ で発散しているので、

[*37] Hindu 教で、宇宙の母を意味するという、名前からして大胆かつ伝説的である。

$$x \log x\Big|_{x=0}$$

は、$0 \times \infty$ 型の「不定形」になっている。

この部分を正しく処理するには、いきなり $x = 0$ を代入せずに、まずは、$x = a > 0$ を代入しその後、$a \to 0$ を計算する。ということで、極限

$$\lim_{a \to +0} a \log a$$

が問題になるが、これは、$a = 1/t$ とでもおいて、$t \to +\infty$ という極限に書きなおすと、

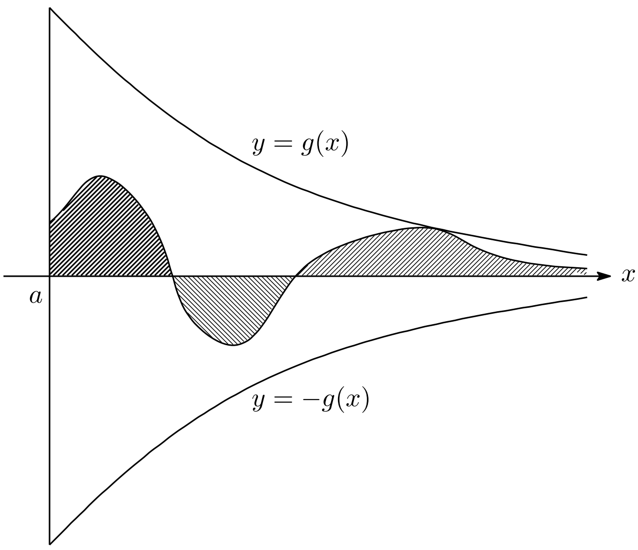
$$a \log a = -\frac{\log t}{t} \to 0$$

$(\log t << t)$ であることがわかるので、上の計算が正当化された。(答案としては、ここまで書かないといけない。)

問 68. 次の計算の誤りについて説明せよ。

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-1}^{x=1} = -2.$$

関数(のグラフ)を正の部分と負の部分の和に書いて、それぞれの部分の面積を比較すると次の結果となる。



定理 7.3 (押え込み判定法)**.**

(i)

$$|f(x)| \leq g(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

が成り立つとき、$\int_0^a g(x) dx < +\infty$ ならば

$$\int_0^a f(x)\, dx$$

が存在する。

(ii)

$$|f(x)| \le g(x), \quad x \ge a > 0$$

が成り立つとき、$\int_a^\infty g(x)dx < +\infty$ ならば

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

が存在する。

例 7.4. 広義積分

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が存在することを確かめ、その値を求めよ。

Proof. まず積分が存在すること。関数 $x^n e^{-x/2}$ は $x \ge 0$ で有界なので、

$$x^n e^{-x} \le M e^{-x/2}, \qquad x \ge 0$$

となる定数 $M > 0$ が存在し、定理の判定条件が使える。

積分の値は、部分積分から得られる漸化式

$$I_{n+1} = (n+1) I_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

と

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

を使って

$$I_n = n!$$

であることがわかる。 □

例 7.5. 広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

の存在を確かめよ。

Proof. これは、$x \ge 1$ のとき $e^{-x^2} \le e^{-x}$ であることに注意して、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx \\ &\le \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x} dx < +\infty\end{aligned}$$

よりわかる。 □

例 7.6 (ガンマ関数)**.** $x > 0$ のとき、

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

が存在して $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$. とくに、$\Gamma(n+1) = n!$.

Proof. 存在は、

$$\int_0^\infty dt = \int_0^1 + \int_1^\infty dt$$

と分けて考える。関数等式は部分積分によりわかる。 □

例 7.7.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

実は、左辺の積分値[*38]は $\sqrt{\pi}$ であることがわかるので（「微積分 II」の重積分の項参照)、$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ となっている。

問 69. 実数 $a > 0$ と $b < 1$ に対して、広義積分

$$\int_0^1 \frac{(-\log x)^a}{x^b} dx$$

が収束することを示し、その値をガンマ関数により表せ。

問 70. 広義積分

$$\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^a dx, \qquad a > 0$$

が収束するかどうか調べよ。

問 71. 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^a} dx$$

が存在するような正数 a の範囲を求めよ。

Remark . 上で扱った広義積分は、例えば

$$\int_a^\infty |f(t)|\, dt < \infty$$

であるという意味で「絶対収束」するタイプのもの（良い広義積分）である。一方、絶対値をつけた積分は発散するものの、

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

が収束する場合（悪い広義積分）は、「条件収束」すると称される。この後者のみが、improper integral というのに似つかわしい。

上の押え込み判定法は、通常の積分が存在するかどうかの判定でも役に立つ。

例 7.8. 関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は、有界区間の上で積分可能である。この証明を、いわゆるリーマン積分可能という形で書くのは、イプシロン・デルタ論法というのを学んでからのことになる。ここでは、広義積分風に

$$\lim_{a\to+0} \int_a^b \sin(1/x)\, dx$$

の存在が納得できればよい。

[*38] **ガウス積分** (Gaussian integral) という。

8 級数の収束と発散

数列 (sequence) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して、その形式的な和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

を**級数** (series) と呼ぶ[*39]。級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは、極限値

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

が存在することであり、その値も級数と同じ記号で表す[*40]。また、収束しない級数は、発散するというのだが、その場合でも正の無限大に近づくときは,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

のように書く。

ということで、級数とは表面的には特殊な数列ということになるのだが、それがなかなかそうもいい切れぬところがある。級数には数列に含まれる数を全部加えたという意味合いがあり、その全部のところが数列としての極限では見えてこない、少なくとも見えにくいのである。こういった級数特有の性質について、基本的なところを見ていこう。

まずは、最重要級数である等比級数 (geometric series [*41]) について復習。基本等式

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$$

で、$|x|<1$ の場合に極限 $n\to\infty$ を取れば、等比級数の公式

$$1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$$

を得る。

これは、右辺の関数のテイラー展開を表しているとも考えられるが、様々な使い道がある。一例として、有理数の循環小数表示を取り上げてみよう。

実数 $0<a<1$ は、$a = 0.a_1a_2\dots$ $(a_j \in \{0,1,\dots,9\})$ と小数展開 (decimal expansion) できる。これの意味するところは、

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

[*39] sequence は、ただ単に「もの」が並んでいるという意味なので、数以外にも使われる。その場合は、数のところを「もの」で置きかえてベクトル列とか点列とかいうのであるが、困るのは級数の方で、級ベクトルとは言わない。ベクトル級数も変。訳語の選定に問題があったのだが、いまさら代え難い。困ったものだ。なお、sequence も series も語源はラテン語で、「従う」「結ぶ」の意味。ちなみに「級」という漢字の意味は、機織りの際の糸の順番であるという。

[*40] ひとつの記号に別の意味を与えているので、混乱しないよう注意する

[*41] 等比数列は、geometric sequence という。ちなみに、等差数列の方は、arithmetic sequence という。これ以外に、相加平均が arithmetic mean, 相乗平均が geometric mean といった例もある。arithmetric は「(初等的) 計算」を意味する古代ギリシャ語に由来する。和訳としては、算術・算数が当てられている。

ということである。この式は、数列 $\{a_k\}$ が与えられると、それから実数 a を定義する形になっているが、逆に、与えられた実数 a から各 a_k を復元するための関係式ともなっている。詳しく書くと、

$$10a = a_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k-1}}$$

であるから、もし $a_k = 9\ (\forall\, k \geq 2)$ でなければ、

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k-1}} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{9}{10^{k-1}} = 1$$

となって、$a_1 = [10a]$ と定められる[*42]。次に、

$$10(10a - a_1) = 10^2 a - 10a_1 = a_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k-2}}$$

を考えると、$a_k = 9\ (\forall\, k \geq 3)$ でない限り、$a_2 = [10^2 a - 10a_1]$ となる。

以下、帰納的に

$$a_k = [10^k a - 10^{k-1} a_1 - \cdots - 10a_{k-1}]$$

によって、数列 $\{a_k\}$ は定められる。ただし、$a_k = 9\ (\forall\, k \geq m)$ となる m は存在しないものとする。

もし、このような m があれば、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{m-1}}$$

であるので、繰り上げることにより、$a = 0.a_1 a_2 \ldots a_{m-2} a'_{m-1}$, $a'_{m-1} = a_{m-1} + 1$ という表示を得る。すなわち、この場合の a は、有限小数で表わされることになる。

つぎのことは、正式に教わらなくても常識的に知っているだろうが、その理由は如何。

命題 8.1. 有理数は循環小数により表され、逆に循環小数で表される実数は有理数である。

Proof. 循環小数ならば有理数のところで、等比級数の式を使う。

逆は、割り算のしくみによれば良くて、$a = l/m$ (l, m は自然数) であれば、あまりを１０倍して m で割る操作を続けると、m で割ったあまりの可能性が $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ という有限集合であることから、なんどか繰り返すうちに同じあまりが出てきて、くり返しが起こる。あとは、m などの関係する自然数を１０進表示して小数表示してやればよい。 □

以上の考察は、１０進法に限らず、いわゆる n 進法 (n-adic system) でも成り立つ。すなわち、実数 $0 < a < 1$ は、

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k}, \qquad a_k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

と表わすことができて、対応する数列 $\{a_k\}$ は、

$$a_k = [n^k a - n^{k-1} a_1 - \cdots - n a_{k-1}]$$

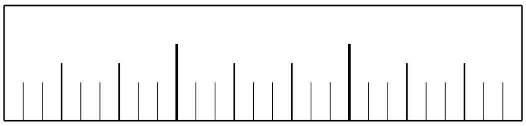
によって復元される。ただし、例外は a が「有限 n 進小数」の場合で、そのときは

$$0.a_1 a_2 \ldots a_{m-1}(n-1)(n-1)\cdots = 0.a_1 a_2 \ldots a_{m-2} a'_{m-1}, \qquad a'_{m-1} = a_{m-1} + 1$$

[*42] $[x]$ は、x を越えない最大の整数を表す。

なる二重の表示が可能である。

また、有理数の循環小数表示による特徴付けも成り立つ。

三進定規 

さて、級数の話に戻ろう。

命題 8.2. 級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ が収束すれば、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

である。

Proof.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} a_k = S - S = 0.$$

□

例 8.3. $a_n \to 0$ でも、級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ は発散することがある。正数 $\alpha > 0$ に対して、

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

とおくとき、広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ と比較することで、

$$\zeta(\alpha) < +\infty \iff \alpha > 1.$$

とくに、$\alpha = 1$ の場合は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

上の発散級数についてもう少し詳しく調べておこう。この級数の発散のスピードは、

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

より、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} = 1,$$

すなわち $\log n$ 程度である。さらに、その違いについては、

$$\frac{1}{2k(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{x-k}{kx}\, dx \leq \frac{1}{2k^2}$$

を $k \geq 1$ について加えることで、極限

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

の存在がわかる。この値をオイラー定数 (Euler's constant) という。

問 72.

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n}$$

を利用して、$1/2 < \gamma < 1$ であることを確かめよ。詳しく計算すると $\gamma = 0.57721\dots$ であるが、これが無理数かどうかは今も分からないという。多分、無理数（それも超越数）なんだろうが。

問 73. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{1+n^b}$$

が収束するような (a, b) (a, b は実数) の範囲を図示せよ。

次は、収束の意味[*43]から明らかであろう。

補題 8.4. 数列 $\{c_n\}_{n\geq 1}$ が、

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n} = c = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1}$$

を満たせば、

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c$$

である。

命題 8.5 (Leibniz)**.** 減少正数列 $\{a_n\}$ が $a_n \to 0$ をみたせば、それから作られる交代級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

は収束する。

Proof. 数列 $\{c_n\}_{n\geq 1}$ を

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_1 - a_2, \quad c_3 = a_1 - a_2 + a_3, \quad c_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \quad \dots$$

で定めると、$c_{2n} \leq c_{2n+1}$ にも注意して、

$$c_2 \leq c_4 \leq c_6 \leq \cdots \leq c_5 \leq c_3 \leq c_1$$

であることがわかる。そこで、$c_{2n+1} - c_{2n} = a_{2n+1} \to 0$ を使うと、

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n} = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1}$$

となり、上の補題から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ の存在がわかる。 □

例 8.6.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2 \quad \text{(N. Mercator, 1668).}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \quad \text{(G.W. Leibniz, 1682).}$$

[*43] 定義からと言わぬが花。そもそも収束の定義はまだしてないんだなあ。

ここで、和の記号の一般的な使い方について述べておこう。まず、集合の記号について復習する。数学的に意味のはっきりしたものの集まりを集合とよび、与えられた集合 S に対して、あるもの a が S に入っていることを $a \in S$ という記号で表し、a は S の要素あるいは元 (element) というのであった。

とくに、数学的対象を見かけ上区別する目的で使われる集合 I は、添え字集合 (index set) と呼ばれ、添え字 $i \in I$ で区別されるものを a_i といった記号で表わすことが一般的である。見かけ上区別するという意味は、異なる添え字に同じものを割り当てることも許すということ。すなわち、$i \neq j$ であっても、$a_i = a_j$ が起こりえるということである。以下では、見かけ上区別されるものとして、数をもっぱら考えることにする。

添え字集合として、自然数全体 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ を考えた場合が、数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に他ならない。I として、平面の格子点 $\{(j,k); j,k = 1,2,\cdots\}$ を取ると、二重数列 $\{a_{(j,k)}\}_{(j,k)\in I}$ が出現する。この場合には、括弧を適宜省略して、$\{a_{j,k}\}_{j,k\geq 1}$ という表記法もよく使われ、数の 2 次元的配列と解釈される。「群数列」というのは、この類のものである[*44]。

添え字集合 I が有限集合であるばあいに、a_i をすべて加えた結果を $\sum_{i\in I} a_i$ という記号で表す。これが、和の記号の一般的な使い方である。I が無限集合の場合は、a_i の総和の意味をはっきりさせた上で、$\sum$ 記号を使う必要がある。まず、正数 $a_i \geq 0$ の場合を考えよう。I のさまざまな有限部分集合 F に対して、部分和 $\sum_{i\in F} a_i$ の定める正数が、F とともにいくらでも大きくなるとき、$\sum_{i\in I} = \infty$ のように書く。そうでないときは、正数 A が、$\sum_{i\in F} a_i$ の限界値として定まるので、$A = \sum_{i\in I} a_i$ と書き表す。正数列 $\{a_n\}\}_{n\geq 1}$ の場合には、

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\geq 1} a_n$$

のようにも書こう。

Remark . 正数和 $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ の正確な定義は、上限 (supremum) の概念を用いて

$$\sup\left\{\sum_{i\in F} |a_i|; F \text{ は } I \text{ の有限部分集合}\right\}$$

で与えられる。

補題 8.7. 正数和 $\sum_{n\geq 1} a_n$ に関して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq 1} a_n$$

である。

Proof.

$$\sum_{k\in F} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

は、明らか。一方、$\{1, 2, \ldots, n\} \subset F_0$ となる有限集合 F_0 を考えると

$$a_1 + \cdots + a_n \leq \sum_{k\in F_0} a_k \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$$

であるから、$n \to \infty$ とすることで逆向きの不等式もわかる。

□

[*44] 群数列の問題のいやらしいところは、本来、2 次元的配列として捉えるべきものを敢えて 1 次元的配列に押し込めるところにある。

問 74. 上の証明では、$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$ を暗黙に仮定した。$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$ の場合の議論を補って、証明を完成させよ。

系 8.8. 正数和の値は、和をとる順序によらない。自然数を並べかえたものを $\{n_1, n_2, \dots\}$ とするとき、

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

定義 8.9. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| < +\infty$$

であるとき、**絶対収束する** (absolutely convergent [*45]) という。

また、(広義) 積分 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ は、

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$$

である場合に絶対収束するという。

冪級数の絶対収束性について最小限のことを見ておこう。冪級数については、組織的な学習が必要であるが、その際は、複素変数を中心に行うべきで、複素解析[*46] こそ適切な場所である。

補題 8.10. 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が、$x = a$ で収束すれば、$|x| < |a|$ で絶対収束する。

Proof. 収束性から、$\lim_n c_n a^n = 0$ である。とくに、$|c_n a^n| \leq M$ $(n \geq 0)$ となる n に無関係な定数 $M > 0$ が存在する。そこで、$|x| < |a|$ とすると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n a^n| \left|\frac{x}{a}\right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{a}\right|^n = M\frac{|a|}{|a|-|x|} < \infty.$$

□

例 8.11.

(i) 任意の実数 x に対して、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots,$$
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

は絶対収束。

(ii) 実数 $|x| < 1$ と任意の実数 a に対して、

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots,$$
$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

[*45] 英語からわかるように、絶対値収束ではなく、絶対的収束の意味である。ちなみに、絶対値は absolute value の直訳で、他に modulus という言い方もある。

[*46] たとえば、 `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/teaching.html` にある講義ノートを見よ。

は絶対収束。

(iii) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ は絶対収束する。

(iv) 広義積分 (フレネル積分*[47])

$$\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$$

は収束するが、絶対収束しない。

問 75. 正数 $a>0$ に対して、

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x \sin(t^2)\,dt = \frac{\cos(a^2)}{a} - \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{\cos(t^2)}{t^2}\,dt$$

を導き、フレネル積分の存在を示せ。

問 76. $a>0$ のとき、$(1-t)^a$ の二項展開（Newton 展開）は、$t=\pm 1$ で絶対収束することを以下の手順で確かめよ。

(i) a を整数部と小数部にわけることで、$0<a<1$ の場合を示せば十分である。

(ii) $0<a<1$ のとき、$(1-t)^a = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots$ とすると、$c_k>0$ である。

(iii)

$$\sum_{k=1}^n c_k = \lim_{t\to 1-0}\sum_{k=1}^n c_k t^k = \lim_{t\to 1-0}\left(1-(1-t)^a - \sum_{k=n+1}^\infty c_k t^k\right) \le \lim_{t\to 1-0}(1-(1-t)^a) = 1.$$

定理 8.12 (級数の基本定理)**.** 絶対収束する級数に対して、級数

$$\sum_{n=1}^\infty a_n$$

は収束し、その値は和をとる順序によらない。さらに、不等式

$$\left|\sum_{n=1}^\infty a_n\right| \le \sum_{n=1}^\infty |a_n|$$

が成り立つ。

Proof. まず、

$$a_n = b_n - c_n,\quad b_n\ge 0,\quad c_n\ge 0,\quad |a_n| = b_n + c_n$$

と表示すれば、絶対収束性から $\sum_n b_n$ と $\sum_n c_n$ が共に存在し、

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n\ge 1} b_n - \sum_{n\ge 1} c_n$$

となる。正数の和については、加える順序によらないので、この関係式から、$\{a_n\}$ の和も足す順序によらない。 □

Remark . 収束はするが絶対収束しない級数をとくに強調して「条件収束する」(conditionally convergent) という言い方をする。

---

*[47] Fresnel integral という。前掲の複素解析講義ノートにもあるように、その値は $\sqrt{\pi/8}$ である。

より一般的に、実数の集団 $\{a_i\}_{i\in I}$ が $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$ である (summable[*48] という) とき、その総和を

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in I} c_i$$

で定める。これは、絶対収束級数の和に相当するもので、次の基本不等式をみたす。

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leq \sum_{i\in I} |a_i|.$$

命題 8.13. 総和可能な実数の集団 $\{a_i\}_{i\in I}$ と添え字集合 I の分割和 $I = \bigsqcup_{n\geq 1} I_n$ に対して、

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i\in I_n} a_i$$

が成り立つ。

例 8.14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$$

のとき、

$$I = \{i = (m,n); m \geq 1, n \geq 1\}, \qquad c_i = a_m b_n$$

と定めると、$\displaystyle\sum_{i\in I} |c_i| < \infty$ であり、

$$\sum_{i\in I} c_i = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

左辺は、普通、

$$\sum_{m,n\geq 1} a_m b_n$$

と書く。

例 8.15. 冪級数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l,$$

がいずれも $|x| < r$ で絶対収束すれば、$|x| < r$ で

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

である。

[*48] このブルバキ好みの概念であるが、その出処は、J. von Neumann, On infinite direct products, Compositio Mathematica, 6(1939), 1–77 であろう。von Neumann はブルバキの先駆者でもあったのだなあ。

例 8.16. $|x| < 1, |y| < 1$ であるとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x+y-xy)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n)$$

が成り立つ。

定理 8.17 (リーマン[*49]). 絶対収束しない収束級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、和の順序を変えることで、どのような実数値にも収束させることができる。

Proof. 絶対収束しないことから、正の項全体および負の項全体の和は $\pm\infty$ に発散すること、および $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ に注意する。

与えられた実数 A に対して、正の項を加えて A より大きくする。次に負の項を加えていき A よりも小さくする。以下これを交互に繰り返していけば、求める配列が得られる。 $\square$

ここにきて、絶対収束級数の絶対の意味が明らかになった。すなわち、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が和をとる順番によらずに同一の値に収束する（すなわち絶対的に収束する）ための必要十分条件が、$\sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty$ である。両者は、概念的に区別されるべきもので、数の場合には幸い一致したというのが真相。幸運な一致は、数のみならず、有限次元的ベクトル量についても成り立つ。また、後者から前者を導く証明は、無限次元的ベクトル量についても広く有効であるが、ヒルベルト空間における正規直交展開に見られるように、逆は一般に成り立たない。

絶対収束しない収束級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ の和の順序を変えることにより、その値がいろいろと変化する様子を具体的に見てみよう。そのために、$+$ の項を p 個、$-$ の項を q 個順次取りだし、交互に和をとった級数を考える。プラス・マイナスそれぞれを n ブロック足した和

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2q} + \dots \\ &\qquad + \frac{1}{2(n-1)p+1} + \cdots + \frac{1}{2np-1} - \frac{1}{2(n-1)q+2} - \cdots - \frac{1}{2nq} \end{aligned} \tag{6}$$

すなわち、

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2np-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right)$$

を考えると、これは、

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2np} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2np} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{qn}\right)$$

に等しいので、

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

を使うと、

$$\begin{aligned} &\log(2pn) + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}(\log(pn) + \gamma_{pn}) - \frac{1}{2}(\log(qn) + \gamma_{qn}) \\ &= \log(2p) - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log q + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}\gamma_{pn} - \frac{1}{2}\gamma_{qn} \end{aligned}$$

[*49] Bernhard Riemann (1826–1866) は、西郷隆盛 (1828–1877) と同世代。

となって、これは、$n \to \infty$ のとき、

$$\log(2p) - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log q = \log(2\sqrt{p/q})$$

に近づく。

例 8.18.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2.$$

問 77. 級数

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

の値を求めよ。

付録 A　微分方程式事始め

関数って何だろうか。素朴には、変量の間の等式で表された関係と言ってよいだろう。変量とは何か。通常は、単位を持ち、数（実数）で表されるものと考えてよいだろう。ここで、ちょっと Wikipedia で量＝quantity を引いてみよう。英語版と日本語版でだいぶ違う。英語版は、連続量と離散量の区別に熱心。日本語版は、数値と単位の組み合わせを強調している。（なんとなく、編集している面々が透けて見えるような。）量と数、変量と変数という対応で良さそうだ。しかし変量を表す英語はあるのだろうか。変量も変数も variable 一つで済ませているような。

方程式の三原則を知ってるか[*50]。

(i) 変量（変数）を導入する。
(ii) 変量の間の関係式を導く。
(iii) 関係式を解く。

この解く作業を重要視しがちであるが、変量の導入から始まって関係式を適切に設定する部分もそれに負けず劣らず大事である。この変量の間の関係式が関数関係で表される場合が、通常の方程式と呼ばれるもので、中学以来、いろいろ経験していることであろう。繰り返すが、最初の変量の設定は、簡単にみえて奥が深い。変量の選び方次第では、それ以降の処理が易しくも難しくもなる。どうしてばかにできないステップである。

さて**微分方程式** (differential equation) である。これは、上の二番目の段階で扱う関係式に変量間の微分が現れるものをいう。当然のことであるが、微分を考えるためには、変量の間に何らかの関数関係が存在することが前提であるが、今度は、その関数関係が直接的に知られていなくて、それでもそれらの間の微分を介した関係式が成り立つ場合をここでは問題にしている。このように設定した微分関係式をすべてみたす関数関係を見出すことが、問題にしている微分方程式を解くという意味である。通常の方程式だと変量の値が決まるのであるが、微分方程式の場合、決まるのは変量そのものではなく、変量間の関数関係である。

と、これだけ言葉を用意して、具体例で以上の手順を確かめてみよう。題して、微分方程式事始め。

ベーアの法則[*51]

[*50] 私が勝手に作りました。
[*51] Beer's law. ついビールを思い出してしまうが、ビールのドイツ語は、Bier。

薄い層を通過するさいの光の減少量は、光の強さと通過する層の厚さに比例するという。

光の通過方向を座標軸に選び、座標が x の地点での光の強度を $I(x)$ とする。x, I が変量でその間に何らかの関数関係があるものと考えるのは自然である。次にこの変量の間の関係式であるが、x から $x+\Delta x$ に至る間の減少量 $I(x)-I(x+\Delta x)$ が、$I(x)\Delta x$ に比例するのというのであるから、比例定数を a とおけば、

$$I(x)-I(x+\Delta x) \fallingdotseq aI(x)\Delta x$$

である。これは、近似的に成り立つ関係式であるが、層を薄くすればするほど、近似の精度が増すと考えて、両辺を Δx で割って極限 $\Delta x \to 0$ を取ると、微分の入った関係式＝微分方程式

$$\frac{dI}{dx} = -aI$$

を得る。

最後のステップとして、これを解くわけであるが、その意味は、この関係式をみたす関数関係、すなわち、関数 $I = I(x)$ の形を決定することである。これは、具体的には、次のようにする。上の微分方程式を

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dx} = -a$$

と書き直して、I が x の関数であることに注意して x_0 から x まで積分し、さらに置き換え積分を適用すれば、

$$-a(x-x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{I}\frac{dI}{dx}\,dx = \int_{I(x_0)}^{I(x)} \frac{1}{I}\,dI = \log I(x) - \log I(x_0)$$

となるので、

$$I(x) = I_0 e^{-a(x-x_0)}$$

を得る。ただし、$I_0 = I(x_0)$ とおいた。

このように、置換積分の公式を経由させて解くのが今の数学の正統な説明方法であるが、実はもっと素朴かつ直接的な方法があって、それは、変数 I と変数 x の間に対等な関数関係 (x が決まれば I がきまり、逆に I を与えると x が決まる）を想定して、

$$\frac{1}{I}\Delta I \fallingdotseq -a\Delta x$$

を直接積分に移行させるというもの。$x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対応するものが、$I_1, I_2, \ldots, I_n$ であるとすると、上の近似式から

$$\sum_j \frac{1}{I_j}(I_j - I_{j-1}) \fallingdotseq -a\sum_j (x_j - x_{j-1})$$

が得られるので、分点の数 n を大きくすれば近似の精度が良くなり（よくなるものと信じて)、極限 $n \to \infty$ を取った暁には厳密な等式に移行すると考えると、

$$\int \frac{1}{I}dI = -a\int dx$$

という積分の関係式が導かれる。あとは、それぞれの積分を実行すれば良い。

大昔の人（微積分の創業者たちとその直接の後継者たち）は、n を大きくして等式が成り立つ、という代わりに、無限小量 dI, dx というものを考え、その間に成り立つ等式

$$\frac{1}{I}dI = -adx$$

とその積分で得られる等式の間を自由に行き来して計算したのであった。なんというおおらかさ。

数学者には好まれぬ考え方かも知れないが、実は、物理とかの現実の変量を扱う人たちの間では、あるいは密かにあるいは公然と伝承され続けて今に至っている。数学者は何を嫌がるかというと、「近似の精度が良くなるものと信じて」という宗教的な部分であり、信心が足りない彼らは、なんとか頑張って正当化（証明）しようとする。

一方、実際の現象を扱う人たちは、実験で検証するという最終兵器があるので（最終兵器だからこそ, 実験データを加工したり、ましてや捏造したりしては、科学の神様の罰が当たるのだな)、途中の推論が多少怪しくても平気というか、推論の前提となる仮説は、現象と合わなくなればいくらでも変更してしまう柔軟性というか、節操がないというか、その違いである。別の具体例も見ていこう。

排水時間の微分方程式

これは、昔は高校の教科書の例題によく取り上げられていたもので、その鮮やかさに感心した覚えがある。行列とかやる暇があったら、こういったものを復活させるべきではないのか、発展的内容などと言わずに。

ある形状の容器に水が入っており、容器の底に付けられた排水口（面積$=A$）から水を（重力だけで）自然排出させる。流し終わるまでに要する時間を求めよ。

容器の底を座標原点にとり、鉛直方向に座標軸を選んでおく。ある時刻 t での水面の高さを h とし、そのときの水面の面積を S, 容器内の水の体積を V, 排水される水の速さを v で表す。

沢山の変量を導入したが、これらが、時刻 t を媒介として、関数関係をもっていることにまず注意する。知りたいのは、初期水面の高さ H と排水し終わるまでの時間 T との関係である。そのために、必要な関係式を書き下してみる。

まず、容器の形状に関する情報として、高さ h での切り口の面積 $S=S(h)$ は予め与えられているものとすると、

$$V=\int_0^h S(x)\,dx.$$

次に、質量（今の場合は水の体積の）保存則

$$V(t+\Delta t)-V(t)\fallingdotseq -Av\Delta t$$

の微分形である

$$\frac{dV}{dt}=-Av.$$

最後に、時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ の間に排出された水の質量を m としたときのエネルギー保存則*52

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh \iff v=\sqrt{2gh}.$$

以上の関係式を解いていくわけだが、基本は文字の消去。面積―体積の関係式を t で微分して得られる

$$\frac{dV}{dt}=S(h)\frac{dh}{dt}$$

に、物質保存則とエネルギー保存則の関係式を代入して V, v を消去すると、

$$\frac{dh}{dt}=-\sqrt{2g}A\frac{\sqrt{h}}{S(h)}.$$

という h と t に関する微分方程式にたどり着く。これを解くために、

$$\frac{S(h)}{\sqrt{h}}\frac{dh}{dt}=-\sqrt{2g}A$$

*52 質量 m の水塊が上面から排水口まで自然落下したと思う。なお、この流出速度の表式は、トリチェリの定理とも呼ばれる。

と書き直して、h が t の関数であること、右辺は t に依存しない定数であることに注意して $t=0$ から $t=T$ まで積分し、置換積分を使って書き直せば、

$$\int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,dh = \sqrt{2g}AT$$

を得る。これが H と T の間の求める関係式である。さらに計算を進めるためには、$S(h)$ の具体的な形が必要である。例えば、S が一定（ドラム缶を立てた状態）である場合には、

$$S\int_0^H \frac{1}{\sqrt{h}}\,dh = \sqrt{2g}AT$$

の積分（広義積分になっている！）を実行して、

$$T = \frac{2S}{\sqrt{2g}A}\sqrt{H}.$$

風呂の水抜きを観察していると、水面の下降速度が徐々に遅くなって、それでも有限時間で排水が終了する様子が実感できるだろう。最後に幾何学的例を一つだけ。

牽引曲線

曲線 $y=f(x)$ で、y 軸上の点からこの曲線に引いた接線の長さ a が一定であるようなものを牽引曲線 (tractrix) という。$(a,0)$ の地点に止まっている船を長さ a のロープで、牽引しながら、y 軸上の点をゆっくり移動するときに船が描く軌跡を表す、というのが牽引の由来。この場合の変量は、はっきりしていて、x と y.

曲線上の点 (x,y) を通る接線の方程式は $y'=\frac{dy}{dx}(x'-x)+y$ で、y 軸との交点の座標が $(0, y-\frac{dy}{dx}x)$ となるので、条件は、

$$x^2+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=a^2$$

となる。これを $\frac{dy}{dx}$ について解けば、

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

という微分方程式を得る。

これを解くことは、単純に積分を実行すればよく、

$$y=\pm\int_a^x \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du=\pm\left(a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

となる。この最後の形を導くところで、置換積分を二度使う。まず、$u=a\sin\theta$ と置けば、

$$a\int_{\pi/2}^{\arcsin(x/a)}\frac{1}{\sin\theta}\,d\theta - a\int_{\pi/2}^{\arcsin(x/a)}\sin\theta\,d\theta = a\int_{\pi/2}^{\arcsin(x/a)}\frac{1}{\sin\theta}\,d\theta - a\sqrt{a^2-x^2}.$$

次に、$\sin\theta=2t/(1+t^2)$, $d\theta=2dt/(1+t^2)$ とおけば、$\theta=\pi/2 \iff t=1$, $x/a=\sin\theta \iff t=(a+\sqrt{a^2-x^2})/x$ に注意して、

$$a\int_{\pi/2}^{\arcsin(x/a)}\frac{1}{\sin\theta}\,d\theta = a\log t = a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

付録 B　ガンマ関数の漸近展開

ガンマ関数が階乗を補完していることからもわかるように、

$$\lim_{t\to+\infty}\Gamma(t)=+\infty$$

であるが、その増大度のスピードはどうであろうか。

まず、ガンマ関数の定義式における被積分関数は、$x=t-1$ でただ一つのピークをもち、x の増大とともに値が急激に減少する（0 に近づく）。$t\to+\infty$ のとき、ピークの位置が無限のかなたに移動してしまうので、$x=(t-1)u$ なる変数変換を施して、積分範囲を固定したままピークの位置がいつでも $u=1$ であるように書きなおし、さらに u に無関係な部分を括り出すと、

$$\Gamma(t+1)=t^{t+1}e^{-t}\int_0^{+\infty}u^te^{t-tu}du.$$

関数 $g(u)=u^te^{t-tu}$ の $u=1$ の付近での様子を調べるために、$\log g(u)$ を $u=1$ のまわりで Taylor 展開すると、

$$\log g(u)=t(\log u-u+1)=-\frac{t}{2}(u-1)^2+\frac{t}{3}(u-1)^3+\dots.$$

これから、大きい t に対するピークの幅の目安として、

$$1-\frac{1}{\sqrt{t}}<u<1+\frac{1}{\sqrt{t}}$$

を得るので、$t\to+\infty$ のとき、積分の値はピークの極狭い範囲からの寄与だけで良い近似が得られるであろう。

そこで、ピークを幅 $0<\epsilon<1$ の範囲で取り出して、

$$\int_0^{+\infty}g(u)du\fallingdotseq\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}e^{-t(u-1)^2/2}du=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\epsilon\sqrt{t}}^{\epsilon\sqrt{t}}e^{-x^2/2}dx$$

に注意すれば、

$$t^{-t-1/2}e^t\Gamma(t)\fallingdotseq\int_{-\epsilon\sqrt{t}}^{\epsilon\sqrt{t}}e^{-x^2/2}dx\to\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$$

という公式が得られた。とくに、

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

（**Stirling の公式**）である。

以上の議論は大筋では正しいのであるが細部で不正確である。それは、近似式

$$\Gamma(t+1)\fallingdotseq t^{t+1}e^{-t}\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}e^{-t(x-1)^2/2}dx$$

で落とした項が $t\to+\infty$ ではたして 0 にいくかどうかの吟味に欠けるため。

ここでは次のような工夫を行う。本体の積分で、変数を -1 だけずらすと

$$\int_0^{+\infty}u^te^{t-tu}\,du=\int_{-1}^{+\infty}e^{-t(x-\log(1+x))}dx$$

である。ここで、

$$y = \begin{cases} \sqrt{x - \log(1+x)} & \text{if } x \geq 0, \\ -\sqrt{x - \log(1+x)} & \text{if } -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

なる変数変換を導入すれば、$x \to y,\, y \to x$ ともに微分可能（実は x の解析関数）であり、

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-t(x-\log(1+x))} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2} \frac{dx}{dy} dy$$

となる。

関係式 $y^2 = x - \log(1+x)$ を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2(1+x)} \frac{1}{y} \quad = \frac{|x|}{2(1+x)\sqrt{x - \log(1+x)}} > 0$$

であるから、

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{dx}{dy} = \lim_{x \to -1} \frac{2(1+x)\sqrt{x - \log(1+x)}}{|x|} = 0,$$
$$\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \frac{dx}{dy} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2(1+x)}{x} = 2$$

となっていることに注意。

さて、こうして得られた積分表示において、$t \to +\infty$ での振る舞いを調べるために、$g(y) = \frac{dx}{dy}$ とおいてさらに変数変換 $z = \sqrt{t}y$ を行うと、

$$\int_0^{+\infty} u^t e^{t-tu}\, du = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} g\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) dz$$

となって

$$\lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} \int_0^{+\infty} u^t e^{t-tu}\, du = \lim_{t \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} g\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} g(0)\, dz = \sqrt{\pi} g(0)$$

がわかる。最後の等号ではガウス積分の公式を使った。（実は、2 番目の等号で、$g(y) = \frac{dx}{dy}$ の増大度が多項式程度であることを使う。）

最後に、$|x| < 1$ のとき、

$$y = \pm\sqrt{x - (x - x^2/2 + x^3/3 - \dots)} = \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{2}{3}x + \dots}$$

に注意して、

$$g(0) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(0)} == \sqrt{2}(1+x)\sqrt{1 - \frac{2}{3}x + \dots}\Bigg|_{x=0} = \sqrt{2}$$

であることがわかるので、公式が示された。

さらに詳しい情報を得るには、

$$g\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) = g(0) + g'(0)\frac{z}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}g''(0)\frac{z^2}{t} + \dots$$

と冪級数展開し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z\, dz = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z^2\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

などに注意すれば、

$$\sqrt{t}\int_0^\infty u^t e^{t-tu}du = \sqrt{\pi}\left(g(0)+\frac{g''(0)}{4}\frac{1}{t}+\dots\right)$$

と漸近展開 (asymptotic expansion) される。具体的な係数の値は、

$$x=\sqrt{2}y+\frac{2}{3}y^2+\frac{\sqrt{2}}{18}y^3+\dots$$

を使えば、

$$g(0)=\sqrt{2},\quad g''(0)=\frac{\sqrt{2}}{3},\dots$$

と求めることができる。

問 78. 関係式

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\dots}$$

を x について解くと、

$$x=\sqrt{2}y+\frac{2}{3}y^2+\frac{\sqrt{2}}{18}y^3+\dots$$

となることを示せ。（ヒント：$x=ay+by^2+cy^3+\dots$ とおいて、関係式に代入し、y の冪の係数を比較する。）