微積分 II

山上　滋

2015 年 9 月 27 日

目次

現実の問題で出会う関数は多変数である。それを単純化して、ある特定の変数だけに着目し、その変化の様子を調べたのが、前期に行った微積分１の内容であった。後期は、多変数関数を微積分の立場から調べる方法について学ぶ。両者相併せて、微積分の基礎が完成する。これで数学が終わりの人も、これが始まりの人も、注いだ労苦は必ずや報われるであろう。先の見えぬ時代にあって、これほど確かなものもない。

モーメントの釣り合いとしての重心の存在と一意性。

1　重積分

一変数関数 $f(x)$ の場合、そのグラフは、xy-平面内の曲線 $y = f(x)$ を表すのであった。同様に、二変数関数 $f(x,y)$ のグラフ[*1]は、xyz-空間内の曲面 $z = f(x,y)$ を表す。したがって、f を調べることは、この曲面を調べることに等しい。

ここで、少しだけ集合の記号を復習しておく。集合の表記方法、和集合 (union)、共通部分 (intersection)。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と超曲面 $\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n; f(x_1,\dots,x_n) = 0\}$、とくに平面曲線 $(n=2)$ と曲面 $(n=3)$。

注意．この段階では、素朴に考えている。素朴という理由は、$f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$ あるは、$f(x,y) = g(x,y)^2 + h(x,y)^2$ といった場合に、方程式 $f(x,y) = 0$ が規定する図形を考えてみるとわかる。後ほど、等位集合の形で、その辺の状況を詳しく調べる。

例題 1.1.

(i) x, y の一次式[*2] $f(x,y) = ax + by + c$ のグラフは、$z = ax + by + c$ という平面を表す。

(ii) 偶関数 $\varphi(x)$ の xz-平面でのグラフ $z = \varphi(x)$ を z 軸のまわりに回転させて得られる曲面は、2 変数関数 $f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ のグラフ $z = f(x,y)$ でもある。具体的に、$\varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leq x \leq r)$ であれば、半球面 $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ $(x^2 + y^2 \leq r^2)$ を、$\varphi(x) = e^{-x^2}$ であれば、回転面 $z = e^{-x^2-y^2}$ を表す。

曲面を調べる際の基本は、その切り口（あるいは投影図）を考えてみることである。

いま、x を $x = a$ に固定して、$f(a,y)$ を y だけの関数と考えると、そのグラフ $z = f(a,y)$ は、曲面 $z = f(x,y)$ の平面 $x = a$ により切り口に他ならない。同様に、y を $y = b$ と固定して、$f(x,b)$ を x だけの関数と考えると、そのグラフ $z = f(x,b)$ は、曲面 $z = f(x,y)$ の平面 $y = b$ により切り口に一致する。例えば、$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ であれば、それぞれ、

$$z = e^{-a^2}e^{-y^2}, \quad z = e^{-b^2}e^{-x^2}$$

が切り口のグラフを表す。

問 1. 一次式のグラフとして表せない平面は、どのようなものであるか。

問 2. 曲面 $z = xy$ の様子を、その切り口を考えることで調べよ。

変数の数が３以上の場合でも（幾何学的直感が働きにくくなるものの）同様の取り扱いが可能である。以下では主として２変数と３変数の場合を扱う。

[*1] 平面内の図形 D の上で定義された関数 $f(x,y)$ $((x,y) \in D)$ のグラフは、$\{(x,y,z); z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$ で与えられる。

[*2] linear expression の意味で使っている。一次多項式と違って、$a = b = 0$ の場合も許すことに注意。

さて、標題の重積分は体積の計算と密接に関係する。通常の積分が、面積と深く結びついていたように。ということで、体積の計算の復習から。

空間の中に直線を用意し、座標 t を入れておく。そして、その直線と直交する平面による立体の切り口の面積を $S(t)$ で表す。このとき、立体の体積 V は、積分

$$V = \int_a^b S(t)dt$$

で求められる。この積分表示は、右辺の積分を広義積分と解釈することで、立体が無限に広がっている場合にも有効である。

具体例として、関数 $z = e^{-x^2}$ のグラフと x 軸の間にある部分を z 軸のまわりに回転させてできる立体の体積について考えよう。これが、$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ のグラフ $z = f(x, y)$ と xy-平面とで囲まれたものであることに注意する。

まず、切り口の方向を定める直線として x 軸をとると、平面 $x = t$ (x 軸と直交する平面) による切り口の面積は、積分を使って、

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y)\, dy = e^{-t^2} I, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

と表され、求める体積は、

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)\, dt = I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = I^2.$$

次に、$z = t$ (z 軸と直交する平面) での切り口を考えると、それは円であり、その半径を r とすると、$t = e^{-r^2}$ であるから、この場合の切り口の面積は、$\pi r^2 = -\pi \log t$ となる。これから、

$$V = -\pi \int_0^1 \log t\, dt = -\pi \Big[t \log t - t \Big]_0^1 = \pi.$$

この 2 つの表示を比較すると、**ガウス積分** (Gaussian integral) の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

を得る。

問 3. 正数 a と実数 b に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\, dx$$

を求めよ。

このように、他の方法では得難い（可能だとしても技巧を要する）等式を生み出せる体積計算は、もっと徹底的に調べておく価値がある。

xy 平面内の図形 D の上で定義された関数 $f(x, y)$ ($(x, y) \in D$) の**二重積分** (double integral) を、微小量の和の極限として、次で定義する。

$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) |D_j|.$$

ここで、$\{D_j\}$ は D の分割[*3]を、$|D_j|$ は D_j の面積[*4]を表す。また、極限は、各 D_j の大きさ[*5]が 0 に近づ

[*3] $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ かつ $|D_j \cap D_k| = 0$ ($j \neq k$) が成り立つということ。

[*4] 面積が定義できるような図形だけを考えている。

[*5] D_j 内の 2 点間の距離の最大値（正確には上限）のこと。

くようにとるものとする。

注意． D が長方形のとき、座標軸の分割による長方形分割 $D_{i,j}$ を採用すれば、

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)|D_{i,j}|$$

となることから、二重積分を

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

のように表すことも多い。また、変数を表す記号には特別の意味はなく、

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_D f(s,t)\,dsdt$$

などであることは、一変数の場合と同様である。

定理 1.2 (重積分の基本性質)**.**

(i) 線型性

$$\int_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha\int_D f(x,y)\,dxdy + \beta\int_D g(x,y)\,dxdy.$$

(ii) 単調性

すべての $(x,y)\in D$ で $f(x,y)\le g(x,y)$ ならば、

$$\int_D f(x,y)\,dxdy \le \int_D g(x,y)\,dxdy.$$

(iii) 規格化条件

$$\int_D dxdy = |D|.$$

(iv) 加法性

分割 $D = D_1\cup\cdots\cup D_n$, $|D_j\cap D_k| = 0$ $(j\ne k)$ に対して

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \cdots + \int_{D_n} f(x,y)\,dxdy.$$

系 1.3 (積分の基本不等式)**.** 単調性から

$$\left|\int_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \int_D |f(x,y)|\,dxdy$$

であり、さらに $|f(x,y)|\le M$ (M は定数) であれば、

$$\left|\int_D f(x,y)\,dxdy\right| \le M|D|.$$

一変数の場合の定積分が符号付き面積を表したのと同様、二重積分は符号付き体積を表す[*6]。とくに、$f(x,y)\ge 0$ のとき、

$$\int_D f(x,y)\,dxdy$$

[*6] 正確には体積の差。

は、関数のグラフ $z = f(x, y)$ と D を底面とする柱体 (cylinder) とで囲まれた立体

$$K = \{(x, y, z); (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

の体積を表す。体積を切り口の面積の積分として表示することで、二重積分の計算を定積分のくり返しに帰着させることができる。例えば、D が $a \leq x \leq b$ の間にあるとして、

$$D = \{(x, y); \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$$

のように表せば[*7]、$x = t$ での切り口の面積 $S(t)$ は、

$$S(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, y)\, dy$$

となり、求める体積は

$$\int_a^b S(t)\, dt = \int_a^b \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, y)\, dy\, dt = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

のように**くり返し積分**[*8](repeated integral) で表される。以上の等式は、符号付き体積の場合にも有効である。まとめると、

定理 1.4 (重積分のくり返し積分による表示)**.**

$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

などが成り立つ。

問 4. D を $\{\phi(y) \leq x \leq \omega(y); c \leq y \leq d\}$ と表したときのくり返し積分による表示を書き下せ。

次は、見かけ以上に重要である。

系 1.5 (くり返し積分の順序交換)**.** $D = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ のとき[*9]、二変数関数 $f(x, y)$ $(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ のくり返し積分について、等式

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

が成り立つ。

ここで、ちょっと観察。上の等式は、$f(x, y) = g(x)h(y)$ のときは、明らかに正しい。したがって、$f(x, y) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(y)$ のときも正しい。一般の $f(x, y)$ も、この正しい場合からの極限として、成り立ちそうだ。こういったセンスは大事である。

[*7] 関数 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ のグラフは、D の上下の境界を表している。

[*8] 累次積分、あるいは反復積分とも言う。

[*9] このとき、$D = [a, b] \times [c, d]$ と書く。一般に、2つの集合 A, B の直積を $A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ で定める。

例題 1.6. 正数 a と $R=[0,1]\times[1,2]$ に対して、

$$\begin{aligned}\int_R (x+y)^a\,dxdy &= \int_1^2\int_0^1 (x+y)^a\,dx\,dy = \int_1^2\Big[\frac{1}{a+1}(x+y)^{a+1}\Big]_{x=0}^{x=1}dy\\ &= \frac{1}{a+1}\int_1^2((y+1)^{a+1}-y^{a+1})\,dy = \frac{1}{(a+1)(a+2)}\Big[(y+1)^{a+2}-y^{a+2}\Big]_{y=1}^{y=2}\\ &= \frac{3^{a+2}-2^{a+3}+1}{(a+1)(a+2)}.\end{aligned}$$

問 5. くり返し積分

$$\int_0^1\int_1^2 (x+y)^a\,dy\,dx$$

を計算して、上の結果と一致することを確かめよ。

例題 1.7. $D=\{(x,y);0\le y\le x\le 1\}$ のとき、

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

問 6. 上の D について、

$$\int_D xe^y\,dxdy$$

を求めよ。

例題 1.8. くり返し積分

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y}\,dy\,dx$$

の値を求める。悪趣味ながら、よく取り上げられるので。

Proof.

$$D=\{(x,y);0\le x\le 1,\sqrt{x}\le y\le 1\}$$

なる平面図形を考えると、

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 dy e^{x/y} = \int_D e^{x/y}dxdy.$$

一方、

$$D=\{(x,y);0\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}$$

という表示を使えば、

$$\int_D e^{x/y}dxdy = \int_0^1\int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx\,dy = \int_0^1\Big[ye^{x/y}\Big]_{x=0}^{x=y^2}dy = \int_0^1(ye^y-y)\,dy = \frac{1}{2}$$

である。 □

問 7. 二重数列[*10]$c_{1,1},c_{1,2},c_{2,2},c_{1,3},c_{2,3},c_{3,3},\dots$ の和

$$\sum_{1\le m\le n} c_{m,n}$$

を二重和として二つの方法で表せ。

[*10] 群数列といういい方が馴染みかも知れない。

注意．つぎのような間違った式を書かないこと。

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y}\,dy\,dx = \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^1 e^{x/y}\,dx\,dy.$$

空間内の領域 K において、K 内の電荷の密度分布が関数 $f(x,y,z)$ で与えられているならば、電荷の総量は、三重積分

$$\int_K f(x,y,z)\,dxdydz$$

で求められる。この場合にもくり返し積分による計算式が成り立つ。

例題 1.9. $K = \{(x,y,z); x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq z\}$ であるとき、

$$\int_K f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

問 8. 上の K に対して、三重積分

$$\int_K dxdydz$$

を求めよ。

重積分においても広義積分を考えることができて、くり返し積分の公式が成り立つ。ただし、**積分は絶対収束するもの**とする。丁寧に述べれば、次のようになる。

平面内の無限に広がった図形 D は、有限な図形の増大列 $D_n \subset D$ の和集合で表せるものとする。このとき、D の上で定義された関数 $f(x,y)$ に対して、極限[*11]

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} |f(x,y)|\,dxdy$$

は、増大列 D_n のとり方によらない。これが有限であるとき、すなわち、絶対収束する場合には、f を正負の値をとる部分の和で表すことで、極限

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$

が存在し、増大列 D_n のとり方によらないことがわかる。この極限値をもって、f の D における二重積分と定める。

さらに、体積の切り口に関する積分を考えると、$\displaystyle\int_D |f(x,y)|\,dxdy$ をくり返し積分で表すことが可能で、この値が有限であるとき（絶対収束する場合）は、広義積分

$$\int_D f(x,y)\,dxdy$$

に対してもくり返し積分による表示が成り立つ[*12]。

例題 1.10.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2.$$

[*11] 右辺は増加数列の極限として、正または ∞ を値にとると考える。

[*12] きちんとした証明は、意外に面倒である。この段階で証明に深入りすることは避け、それが必要になった際には、ルベーグ積分の形で理解することを勧める。

問 9. 広義二重積分

$$\int_D e^{-(x^2+1)y}\,dxdy, \quad D = \{(x,y); x \in \mathbb{R}, y > 0\} = \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

をくり返し積分により計算することで、ガウス積分の公式を導け。

問 10. 前に行ったガウス積分の計算は、$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}\}$ に対する三重積分

$$\int_K dzdydz$$

をくりかえし積分で計算したものになっている。これを確かめよ。

問 11. 絶対収束しない場合には、仮にくり返し積分が可能であっても、くり返し積分の結果は、積分を行う順序に依存することがある。

(i) 次の微分を計算する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+b^2}\right), \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{a^2+y^2}\right).$$

(ii) 次のくり返し積分を計算する。

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx.$$

(iii) 二重積分

$$\int_{r \leq x,y \leq 1} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

を計算し、$r \to +0$ のときの様子を調べる。

ここで、積分記号内の積分変数の場所について一言。数学者好みは，上でも使ったように積分される関数を積分する変数 dx と $\int$ とではさむ、というもので、積分すべき対象が明確に表される利点がある。一方、この間にはさまれる関数式が長くなると、どの変数についての積分であるかの対応が見にくくなり、計算間違いの原因ともなるため、

$$\int_a^b dx\,f(x)$$

のように $\int dx$ をまず書いたあとで、積分すべき関数を書くという表記法もあり、特に長い積分計算が必要となる物理関係者の間で好まれるようである。ただ、この方式の欠点は、積分すべき関数がどこまで続くのかが不明瞭になりがちなことであるが、以下では、とくに拘りなくどちらも使用する。

問 12. 定積分

$$\int_a^b dx\,x$$

を、数学者の流儀と物理学者の流儀で計算し、その違いを認識せよ。

最後に、重積分と密度の関係を確認しておこう。教科書では正面きって取り上げられないにもかかわらず、いつのまにか「常識」として扱われることが多い。まずは、一変数の微分・積分あるいは積分・微分の公式の復習から。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

最初の等式を少し書きなおすと、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

この等式は、密度と積分の関係を表しているとみることができ、重積分に対しても意味を成すものである。

これについて調べる前に、重積分の存在を保証する結果について述べておこう。

定理 1.11. 平面領域 D は有限の範囲にあり、その境界 ∂D の「面積」が 0 であるとする[*13]。このとき、関数が D の境界も含めたところで連続であれば、

$$\int_D f(x,y)\,dxdy$$

が存在する。

通常の平面図形がこの条件をみたすことは、直感的に明らかであるが、厳密に確かめようと思ったら、そもそも「面積」の定義から始める必要があり、意外に面倒でもある。ここでは、直感的理解に止めておく。それよりも、多変数関数の連続性をまだ定義していなかったので、ここで説明しておこう。二変数関数 $f(x,y)$ が、$(x,y)=(a,b)$ で連続であるとは、(x,y) が (a,b) に近づくとき、$f(x,y)$ が $f(a,b)$ に近づくこと。とりあえずは、この素朴な形で先へ進むことにする。

定理 1.12. 関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ の近くで連続であるとする。このとき、(a,b) を含む領域 D に対して、

$$\lim_{\delta(D)\to 0} \frac{1}{|D|} \int_D f(x,y)\,dxdy = f(a,b)$$

が成り立つ。ここで、$\delta(D)$ は、D 上の関数 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ の最大値を表す。とくに、

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{1}{|hk|} \int_a^{a+h} dx \int_b^{b+k} f(x,y)\,dy = f(a,b)$$

である。

Proof. 関数 $f(x,y)$ の D における最小値・最大値を m_D, M_D で表せば、

$$m_D \le f(x,y) \le M_D \quad ((x,y)\in D)$$

であり、これから

$$m_D \le \frac{1}{|D|} \int_D f(x,y)\,dxdy \le M_D.$$

一方、$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で連続であることから、

$$\lim_{\delta(D)\to 0} m_D = \lim_{\delta(D)\to 0} M_D = f(a,b).$$

□

[*13] こう書くからには、$|\partial D|>0$ となる場合があるということだ。想像できるか。

2　偏微分

ここでは、多変数関数の微分について考える。もっとも安直な[*14]ものは、どれか一つの変数に着目し、残りの変数を固定することで、一変数関数としての微分を実行することである。これを**偏微分** (partial differentiation) という。二変数関数 $f(x,y)$ であれば、$x=a$ を固定して y について微分したものを

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,y+h)-f(a,y)}{h}$$

あるいは $f_y(a,y)$ と書く[*15]。同様に $y=b$ を固定して x について微分したものは

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,b) \text{ あるいは } f_x(x,b).$$

いずれの場合も、偏微分を実行したあとで固定しておいたパラメータ a, b を変化させることで二変数の関数

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y)$$

を得る。これを y あるいは x に関する**偏導関数** (partial derivative [*16]) という。

注意．偏導関数を表す記号 $f_x(x,y)$ に含まれる x のうち、実際に変数であるのは、(x,y) の部分である。したがって $(x,y)=(a,y)$ (a は定数) とおいた $f_x(a,y)$ は、x を変数として含まない。とくに、

$$\frac{\partial}{\partial x}f_x(a,y) = 0$$

である。

くり返し積分を求める際に、実質的に偏導関数の計算を行っていたことに注意。

命題 2.1. 関数 $f(x,y)$ およびその偏導関数 $f_y(x,y)$ が連続[*17]であれば、次のパラメータに関する微分の公式が成り立つ。

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

あるいは、b のところを変数と思って不定積分の形にすれば、

$$\frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)\,dx = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Proof. 実際、

$$\int_c^t\int_a^b f_y(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^t f_y(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b (f(x,t)-f(x,c))\,dx$$

[*14] 安直でない「微分」が何を意味するか、何を表すと考えるべきかは、先達も苦労したところである。結論は後の方で出てくるので、それまでの間、あれこれ思いを廻らすとよい。「古人の跡を求めず、求めたるところを求めよ」だ。

[*15] この偏微分を表す記号は、実用的ではあるが、ときには混乱の元ともなる。変数を表す記号と独立した操作であるから、第一変数に関する偏微分という意味で、$D_1f(x,y)=f_1(x,y)$ とでも書くのが、論理的には望ましい。なお、∂ は partial と読んで d と区別する。

[*16] 偏微分のことも partial derivative ということが多い。一点だけでの微分を問題にしてもしようがないということなのだろう、とくに多変数においては。

[*17] 連続性の定義は、このすぐ後にある。連続性は、証明の途中に現れる密度関数の表示を保証するためのものである。

の両辺を t で微分すると、

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_y(x,t)\,dx$$

である。 □

例題 2.2. $\displaystyle\int e^{xy}\,dx = \frac{1}{y}e^{xy}$ を y について次々と偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\int xe^{xy}\,dx &= -\frac{1}{y^2}e^{xy} + \frac{x}{y}e^{xy} \\
\int x^2e^{xy}\,dx &= \frac{2}{y^3}e^{xy} - \frac{2x}{y^2}e^{xy} + \frac{x^2}{y}e^{xy} \\
\int x^3e^{xy}\,dx &= -\frac{6}{y^4}e^{xy} + \frac{6x}{y^3}e^{xy} - \frac{3x^2}{y^2}e^{xy} + \frac{x^3}{y}e^{xy}.
\end{aligned}$$

問 13. $\displaystyle\int \cos(xy)\,dx = \frac{1}{y}\sin(xy)$ を y で次々と偏微分してみよ。

偏導関数を再度偏微分したものは、二階の偏導関数 (second order derivative) と呼ばれ、次のような記号で表される。高階の偏導関数 (higher order derivative) についても同様である。

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = f_{xx}(a,b), \qquad \frac{\partial f_y}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

例題 2.3. 関数 $f(x,y) = \sin(xy + y^2)$ を偏微分してみよう。

$$f_x = y\cos(xy+y^2), \quad f_y = (x+2y)\cos(xy+y^2),$$

$$f_{xx} = -y^2\sin(xy+y^2), \quad f_{yy} = 2\cos(xy+y^2) - (x+2y)^2\sin(xy+y^2),$$

$$f_{xy} = \cos(xy+y^2) - y(x+2y)\sin(xy+y^2) = f_{yx}.$$

いろいろな例で計算してみると、いつでも $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立っているようにみえる。ただし、少し条件が必要である。それを述べるために、二変数関数が連続であることの定義を 2 つ書いておく。一つは、点列の極限を使うもので、

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a,b) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

から

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(a,b)$$

が従うとき、$f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で**連続**であるという。

もう一つは、あいまいな表現ながら、二点 (x,y), (a,b) の間の距離 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ が小さければ $f(x,y)$ は $f(a,b)$ に近いとする[*18]ものである。

「近い」あるいは「近づく」という言葉の意味を明確にすることで、この二つの連続性が同じ内容であることを厳密に証明できるのであるが、ここでは、それを認めることにして先へ進もう[*19]。

問 14. 次は、連続性の難しさを味わうための問題である。

---

*18 正確に述べると次のようになる。どのように小さい正数 ϵ に対しても、正数 δ を適切に選ぶことで、$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \le \delta$ から $|f(x,y) - f(a,b)| \le \epsilon$ が従うようにできる。

*19 気になる人は、例えば、 http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/set/real.pdf を見よ。

(i) $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で連続であるとき、

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = f(a,b)$$

は成り立つか。また、$f(x,y)$ がすべての点で連続ならば、どうか。

(ii) 条件

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

から $(x,y)=(a,b)$ での連続性が言えるか。

定理 2.4. f_{xy}, f_{yx} が存在してどちらも連続関数であるとき $f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ。

Proof. $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ を示す。$R=[a,a+r]\times[b,b+r]$ とする（$r>0$）。

$$\begin{aligned}\int_R dsdt\, f_{yx}(s,t) &= \int_a^{a+r} ds \int_b^{b+r} dt\, f_{yx}(s,t)\\ &= \int_a^{a+r} ds\,[f_x(s,b+r)-f_x(s,b)]\\ &= f(a+r,b+r)-f(a,b+r)-f(a+r,b)+f(a,b)\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\int_R dsdt\, f_{xy}(s,t) &= \int_b^{b+r} dt \int_a^{a+r} ds\, f_{xy}(s,t)\\ &= \int_b^{b+r} dt\,[f_y(a+r,t)-f_y(a,t)]\\ &= f(a+r,b+r)-f(a,b+r)-f(a+r,b)+f(a,b)\end{aligned}$$

を比較して

$$\int_R dsdt\, f_{xy}(s,t) = \int_R dsdt\, f_{yx}(s,t).$$

両辺を r^2 で割って、定理 1.12 に注意して極限 $r\to 0$ を取ると、$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ がわかる。 □

系 2.5. 関数 $f(x,y)$ は、n 回まで偏微分できて、n 階以下のすべての偏導関数が連続である[*20]とすると、偏微分の結果はくり返す順番によらない。

問 15. $f(x,y,z)=e^{y+z}\frac{x}{z^2+1}$ に対して、$f_{xyz}=f_{yzx}$ であることを確かめよ。また、この等式を一般の関数に対して保証する十分条件を与えよ。

問 16. 関数 $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $((x,y,z)\neq(0,0,0))$ に対して、$\dfrac{\partial r}{\partial x}$ を求めよ。関数 $f(x,y,z)=1/r(x,y,z)^d$ が

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

を満たすように定数 d を定めよ。また、二変数で同様の問題を考えよ。

[*20] このとき、関数 f は C^n 級である (of class C^n) という言い方をする。

空間曲線のパラメータ表示：$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (t はパラメータ) について。時刻をパラメータ t に選んで、点の運動を表しているという解釈も可能。点の運動と思えば、

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

は、ある時刻における速度ベクトルを、一般的には、曲線上の点 $\boldsymbol{r}(t)$ で曲線に接するベクトルを表す。

問 17. 曲線のパラメータ表示 $(x(t), y(t), z(t))$ において、$t = a$ での一次近似式は、点 $(x(a), y(a), z(a))$ を通る接線のパラメータ表示になっていることを確かめよ。

定理 2.6 (Chain Rule [21])**.** 関数 $f(x, y, z)$ が連続な偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ をもつとき、微分の公式

$$\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{r}(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{r}(t))\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{r}(t))\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

Proof. 本質的な違いがないので、2 変数の場合を示す。t を固定して $(x(t), y(t)) = (a, b)$ とおき、微小変化 Δt に対する x, y の変化を Δx, Δy で表す：

$$x(t + \Delta t) = a + \Delta x, \quad y(t + \Delta t) = b + \Delta y.$$

このとき、

$$\begin{aligned} &f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t)) \\ &\quad = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) + f(a + \Delta x, b) - f(a, b) \\ &\quad = \int_b^{b+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(a + \Delta x, y)\, dy + \int_a^{a+\Delta x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, b)\, dx \end{aligned}$$

と書きなおし、両辺を Δt で割ると、

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{\Delta y}\int_b^{b+\Delta y} dy\, \frac{\partial f}{\partial y}(a + \Delta x, y) + \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{1}{\Delta x}\int_a^{a+\Delta x} dx\, \frac{\partial f}{\partial x}(x, b).$$

これの $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ としたときの極限が問題となるが、このとき、$\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ に注意すれば、積分変数の動く範囲は (a, b) のごく近くに限定され、したがって f_x, f_y の連続性により、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a + \Delta x, y) \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, b) \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

という近似式が成り立ち、

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_b^{b+\Delta y} dy\, \frac{\partial f}{\partial y}(a + \Delta x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

などから、求める公式を得る。 □

問 18. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$, $(x, y) = (a + \alpha t, b + \beta t)$ のとき、公式が成り立つことを確かめよ。

---

[21] 鎖則あるいは連鎖律と訳されるが、訳語の落ち着きが悪いようで、通常 chain rule のまま呼ばれる。

注意．鎖則の導出で使った近似の議論をより正確にしようと思ったら、次のようにすればよい。関数 f_y の $[a,a+\Delta x]\times[b,b+\Delta y]$ での最大値・最小値をそれぞれ、M, m で表せば、f_y の連続性により、$\Delta t\to 0$ のとき、M, m は $f_y(a,b)$ に近づく。一方、不等式

$$m\le f_y(a+\Delta x,y)\le M\quad(b\le y\le b+\Delta y)$$

を y について積分すると、

$$m\le \frac{1}{\Delta y}\int_b^{b+\Delta y} f_y(a+\Delta x,y)\,dy\le M$$

を得るので、この 2 つをあわせて、

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_b^{b+\Delta y} f_y(a+\Delta x,y)\,dy=f_y(a,b)$$

となる。

例題 2.7. 点 (a,b,c) を通る直線のパラメータ表示 $\boldsymbol{r}(t)=(a+\alpha t,b+\beta t,c+\gamma t)$ を考えると、

$$\frac{d}{dt}f(a+\alpha t,b+\beta t,c+\gamma t)\Big|_{t=0}=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+\beta\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+\gamma\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c).$$

問 19. 上の例題で扱った微分を f の**方向微分** (directional derivative) という。これの意味について考察せよ。

問 20. 直線の方向を表すベクトル (α,β,γ) として大きさが 1 のベクトル（単位ベクトル）に限定して変化させるとき、方向微分の最大値・最小値をもとめよ。

問 21. 関数 $f(x,y,z)=\dfrac{3}{1+x^2}\log(1+e^y+z^2)-y$ $(x,y,z\in\mathbb{R})$ に対して

$$F(t)=f(a\cos t,a\sin t,t^2)\quad(t\in\mathbb{R})$$

とおく．ただし, $a\in\mathbb{R}$ は定数とする．このとき, $F'(0)=0$ となる a をすべて求めよ．

定義 2.8. 関数 f のすべての偏導関数が存在して連続であるとき、すなわち C^1 級であるとき、f の**微分**とは、偏微分を成分とするベクトルと定義する。3 変数の関数 $f(x,y,z)$ であれば、

$$f'(x,y,z)=(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x.y.z)).$$

一次の近似式

先の公式 (chain rule) はまた、次のように解釈することもできる。偏導関数 f_x, f_y は、$(x,y)=(a,b)$ で連続であるとする。このとき、微小量 Δx, Δy, Δz に対して、次の近似式が成り立つ[*22]。

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y,c+\Delta z)\fallingdotseq f(a,b,c)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\Delta z.$$

[*22] 正確には、両辺の差を $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ で割ったものが、$(x,y,z)\to(a,b,c)$ のとき、0 に近づく、という意味である。鎖則の説明の注意書きで述べた方法がここでも有効で、安全な証明を与えることができる。また、このとき、$f(x,y,z)$ は、$(x,y,z)=(a,b,c)$ で微分可能である、といった言い方をする。偏微分可能性との違いを強調して全微分可能ということも多い。

実際、二変数の場合であれば、

$$
\begin{aligned}
&f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a,b)\\
&=\int_0^1 dt\,\frac{d}{dt}f(a+t\Delta x, b+t\Delta y)\\
&=\int_0^1 dt\,\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+t\Delta x, b+t\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(a+t\Delta x, b+t\Delta y)\Delta y\right)\\
&\fallingdotseq\int_0^1 dt\,\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y
\end{aligned}
$$

である。

これはまた,「無限小量」dx, dy, dz を形式的に導入して

$$
df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz
$$

とも表記される[*23]。

例題 2.9. 半径 r、高さ h の円柱の体積を V で表すとき、r が 1 %、h が 2 %増えた場合、V はおおよそ何%増えるか。$V=\pi r^2 h$ に一次近似式を適用すれば、$\Delta V=\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h\approx 2\pi rh\Delta r+\pi r^2\Delta h$ より、

$$
\frac{\Delta V}{V}\approx 2\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta h}{h}=2\times 0.01+0.02=0.04
$$

となって、約 4 %増えることがわかる。

接平面

公式 (chain rule) の幾何学への応用として、曲面に接する平面の方程式を計算してみよう。まず、3 変数の関数 $f(x,y,z)$ を用意して、条件 $f(x,y,z)=h$ (h は定数) をみたす点の集まりを考えよう。この制限により、3 つの変数 x,y,z のうち独立に選べるのは 2 つに限られ、3 次元空間内の 2 次元的広がりをもった図形すなわち曲面が得られる[*24]と考えられる。曲面をこのような形で表したとき、$f(x,y,z)=h$ を曲面の方程式という。

例題 2.10. 2 変数関数 $\varphi(x,y)$ のグラフを表す式 $z=\varphi(x,y)$ は、3 変数関数 $f(x,y,z)=\varphi(x,y)-z$ を使って、曲面の方程式 $f(x,y,z)=0$ と見ることができる。

例題 2.11.

(i) ベクトル (α,β,γ) と実数 c に対して、$\alpha x+\beta y+\gamma z=c$ は、(α,β,γ) と直交する平面を表す。

(ii) 点 (x_0,y_0,z_0) と正数 $r>0$ を指定するとき、$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ は、(x_0,y_0,z_0) を中心とし半径 r の球面を表す。

(iii) 方程式 $y^2+z^2=r^2$ は、x 軸方向にのびた円柱を表す。

問 22. ななめの円柱の方程式。

(i) ベクトル (x,y,z) の $(1,1,1)$ 方向への正射影を求めよ。

[*23] 関数 f の微分のもうひとつの表わしかたがこれ。
[*24] もう少し詳しい説明は、後の等位面のところで。

(ii) 直線 (t,t,t) (t は実数) を中心線とする半径 r の円柱を表す方程式を求めよ。

さて、曲面 $f(x,y,z)=h$ の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めてみよう。曲面に乗っている曲線で点 (a,b,c) を通るものを、パラメータ t を使って $(x(t),y(t),z(t))$, $(x(0),y(0),z(0))=(a,b,c)$ と表すと、

$$f(x(t),y(t),z(t))=h$$

が t によらずに成り立つ。この等式を t について微分して、左辺に chain rule を使えば、

$$\frac{dx}{dt}(0)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+\frac{dy}{dt}(0)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)+\frac{dz}{dt}(0)\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)=0$$

が得られる。すなわち、接ベクトル $(\frac{dx}{dt}(0),\frac{dy}{dt}(0),\frac{dz}{dt}(0))$ は、ベクトル

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c),\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right)$$

に直交する。逆に、点 (a,b,c) を通る曲線 $(x(t),y(t),z(t))$ （曲面の上に乗っていなくても）が上の式を満たすならば、

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t),z(t))|_{t=0}=0$$

となって、$f(x(t),y(t),z(t))$ の値が $t=0$ の近くでほとんど変化しない：すなわち、曲線は点 (a,b,c) で曲面に接する。以上により、

定理 2.12. 曲面 $f(x,y,z)=h$ 上の点 (a,b,c) における接平面の法線ベクトルは、f の微分

$$f'(a,b,c)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c),\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right)$$

で与えられる。

系 2.13. 2 変数関数 $f(x,y)$ のグラフ $z=f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の法線ベクトルは、

$$(f_x(a,b),f_y(a,b),-1)$$

で与えられる。

問 23. 双曲線 $x^2-y^2=1$ を x 軸のまわりに回転させて得られる曲面（二葉双曲面という）と y 軸のまわりに回転させて得られる曲面（一葉双曲面という）の方程式を求めよ。それぞれの場合について、点 $(1,0,0)$ を通る接平面の方程式を求め、接平面が元の曲面と $(1,0,0)$ 以外の点で交わることがあるかどうか調べよ。

問 24. 二次曲面 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ の接平面の方程式を求めよ。

問 25. 点 (a,b) を通る平面曲線 $f(x,y)=f(a,b)$ とベクトル

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

の関係について考察せよ。

例題 2.14. 円錐

$$x^2+y^2-z^2=0$$

を考えると，原点 $(0,0,0)$ での値が

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0,0,0)$$

となって法線ベクトルにならない。このような点は **特異点** (singular point) とよばれ，接平面を定義することが一般にはできない。特異点については、後で立ち戻ることにする。

問 26. 曲面 $x^2+y^2+z^2+2xyz+a=0$ が特異点を持つように、定数 a を定めよ。

3　変数変換

変数 x, y を新たな変数 u, v により、

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

と表すことを考えてみよう。ここで、$\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ は、(u,v) の C^1 級関数であり[*25]、変数の動く範囲（変域）をそれぞれ $D=\{(x,y)\}$, $E=\{(u,v)\}$ とするとき、$(u,v)\in E$ から $(x,y)\in D$ が決まる[*26]だけでなく、逆に $(x,y)\in D$ から $(u,v)\in E$ が復元できるものとする。

例題 3.1.

(i) $D=E=\mathbb{R}^2$ とする。

$$x = au+bv+x_0, \quad y = cu+dv+y_0$$

は、一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と平行移動を組み合せた変数変換を与える。ただし、$ad-bc\neq 0$ とする。

(ii) $E=\{(r,\theta); r>0, 0\le\theta<2\pi\}$, $D=\{(x,y)\neq(0,0)\}$ および

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

で変数変換を定めることができる。これを**極座標変換** (polar coordinate transformation) と呼ぶ。

問 27. $D=\{(x,y); 1\le x^2+y^2\le 4, 0\le x\le y\}$ とするとき、対応する極座標の範囲を求めよ。

問 28. 次の式で表される変数変換を考える際に注意すべき点は何か。

$$x = u+v, \quad y = uv.$$

行列式の幾何学的意味

あとでの都合上、行列式を det で表す。例えば、

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

[*25] 変数変換を表す関数を明示するのが、数学的には正しい態度であるが、簡便な表記法として、$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ のように書くことも多い。

[*26] このように、集合 E の要素から集合 D の要素を定める規則のことを数学では写像という。変数変換の場合には、この写像が E の要素と D の要素との間で、漏れなくかつ重なりもないことを要求する。

この 2 次の行列式は、次のような幾何学的意味をもつ：

2 つのベクトル (a_1, b_1), (a_2, b_2) を二辺とする平行四辺形の符号つき面積。ただし、(a_1, b_1) から (a_2, b_2) への角を $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とするとき、θ の正負に応じて、面積に正負の符号をつけるものとする。

同様に、3 次の行列式

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

は、3 つのベクトル (a_j, b_j, c_j) $(j = 1, 2, 3)$ を三稜とする平行六面体の符号つき体積を表す。この幾何学的意味は、「3 つのベクトルが基底を成す $\iff$ 行列式の値が 0 でない」という事実とも符合することに注意する。符号の選び方は、ベクトルの 3 つ組が標準基底から連続的に変形可能なときに正、そうでないときは負とする[*27]。

問 29. 平行四辺形の面積を保ったまま長方形に変形する操作と行列式の性質とを結びつけることで、上で述べた事実を示せ。

ここで、重積分の意味を復習しておくと、平面内の図形 D の上で定義された関数 $f(x, y)$ に対して

$$\int_D f(x, y) dxdy = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j) |D_j|$$

というものであった。

以上を踏まえて、重積分の変数変換について説明しよう。

補題 3.2. 点 $(u, v) \in E$ に対して、$\Delta E = [u, u + \Delta u] \times [v, v + \Delta v]$ とし、それに対応する領域を $\Delta D \subset D$ で表すとき、

$$\lim_{\Delta u, \Delta v \to 0} \frac{|\Delta D|}{|\Delta E|} = \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right|.$$

ただし、

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

であり[*28]、これを変数変換の**ヤコビ行列式** (Jacobian) [*29]と呼ぶ。

Proof. ΔE 内の点は、$(u + s\Delta u, v + t\Delta v)$ $(0 \leq s, t \leq 1)$ と表すことができるので、ΔD の点は、

$$(\varphi(u + s\Delta u, v + t\Delta v), \psi(u + s\Delta u, v + t\Delta v)), \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

と表される。ここで、Δu, Δv はごく小さい数であるとすれば、1 次の近似式

$$\varphi(u + s\Delta u, v + t\Delta v) \fallingdotseq \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) s\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) t\Delta v$$
$$\psi(u + s\Delta u, v + t\Delta v) \fallingdotseq \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) s\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) t\Delta v$$

[*27] いわゆる右手系・左手系の区別に対応する。

[*28] 左辺の意味からは、$dxdy/dudv$ とでも書くべきものである。

[*29] この二変数の場合をオイラーが、三変数の場合はラグランジュが示した。Jacobian という名称は、一般の多変数の場合を扱った Carl Gustav Jacobi (1841) に因む。

より、

$$\begin{aligned}&(\varphi(u+s\Delta u, v+t\Delta v), \psi(u+s\Delta u, v+t\Delta v))\\&\quad=(\varphi(u,v),\psi(u,v))+s\Delta u(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v),\frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v))+t\Delta v(\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v),\frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v))\end{aligned}$$

となる。これは、$(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ を頂点とし、ベクトル

$$\Delta u(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v),\frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v)),\qquad \Delta v(\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v),\frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v))$$

を２辺とする平行四辺形のパラメータ表示に他ならない。

したがって、ΔD の面積は近似的に

$$\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{pmatrix}\right|\Delta u\Delta v=\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| |\Delta E|$$

に等しく、比 $|\Delta D|/|\Delta E|$ の極限は、ヤコビ行列式で与えられることがわかる。 □

例題 3.3. 極座標変換において、

$$\lim\frac{\Delta D}{\Delta E},\quad \frac{\partial(x,\theta)}{\partial(r,\theta)}$$

を別個に計算し、一致することを確かめる。$\Delta E=\Delta r\Delta\theta$,

$$\Delta D=\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta-\frac{1}{2}r^2\Delta\theta=r\Delta r\Delta\theta+\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta.$$

また、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r.$$

定理 3.4. 変数変換 $(x,y)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ $((u,v)\in E,\ (x,y)\in D)$ を重積分に施すとき、次の公式が成り立つ。

$$\int_D f(x,y)dxdy=\int_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}(u,v)\right|dudv$$

Proof. E を座標軸に平行な直線で（細かく）分割したものを $E_1\cup\cdots\cup E_n=E$ とし、各 E_j の変数変換による像を重積分の定義における D_j とする。

E_j 内の点 (u_j,v_j) を取り、対応する D_j 内の点を (x_j,y_j) で表せば、上の補題により、

$$\sum_{j=1}^n f(x_j,y_j)|D_j|\risingdotseq\sum_{j=1}^n f(\varphi(u_j,v_j),\psi(u_j,v_j))\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}(u_j,v_j)\right||E_j|$$

であるが、極限 $n\to\infty$ をとることで、この近似式は厳密な等式に移行し、求める公式を得る。 □

例題 3.5. 極座標 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を使う。$\partial(x,y)/\partial(r,\theta)=r$ に注意して、

$$\int_{x^2+y^2\le a^2}e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_{0\le r\le a,0\le\theta\le 2\pi}e^{-r^2}rdrd\theta=2\pi\int_0^a e^{-r^2}rdr=\pi(1-e^{-a^2}).$$

例題 3.6. $D=\{(x,y);|x|\le a,|y|\le a,x^2+y^2\ge a^2\}$ に対して、

$$\int_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy\le e^{-a^2}\,|D|=\frac{4-\pi}{4}a^2e^{-a^2}$$

という評価を使えば、上の例で、$a \to \infty$ とすることで、等式

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \pi$$

のより確かな根拠を得る[*30]。

問 30. $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ のとき, $\displaystyle\int_D xy\, dxdy$ を求めよ。

問 31. 4 点 $(0, 0)$, $(1, -2)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$ を頂点とする平行四辺形とその内部を D とするとき、

$$\int_D \sin(x + y)\, dxdy$$

を求めよ。

最後に、三重積分の場合の変数変換公式を書き下しておこう。同様のことは、変数の数が 4 以上でも成り立つ。

xyz 空間内の領域 D を新しい変数 (u, v, w) を使って $(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ $((u, v, w) \in E)$ と表すとき、

$$\int_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dudvdw,$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

例題 3.7. 3 次元極座標 $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ による変数変換の場合、

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin\theta.$$

問 32. 3 次元極座標変換のヤコビ行列式を求めよ。

写像の微分

変数変換

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

の定める写像[*31]を $F : (u, v) \mapsto (x, y)$ で表わす。uv-平面内の点 (a, b) の近くでの写像の様子は、1 次の近似式

$$\varphi(a + \Delta u, b + \Delta v) \fallingdotseq \varphi(a, b) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,$$
$$\psi(a + \Delta u, b + \Delta v) \fallingdotseq \psi(a, b) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v$$

[*30] 円と長方形を入れ子にした不等式の議論を補えば完璧。

[*31] map あるいは mapping の訳語。点に点を対応させる仕方のこと、「写しかえ」。

を使うと、無限小位置ベクトルの間の一次変換

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix}$$

で近似される。ここで、

$$\Delta x=\varphi(a+\Delta u,b+\Delta v)-\varphi(a,b),$$
$$\Delta y=\psi(a+\Delta u,b+\Delta v)-\psi(a,b),$$

とおいた。これを 1 変数のときの近似式

$$\Delta x=f'(a)\Delta u$$

と比較すれば、写像 F の**微分**を行列

$$F'(a,b)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

（の定める 1 次変換）であると定義するのが合理的である。F を変数変換を見たときのヤコビアンが $J_F(u,v)\equiv\det(F'(u,v))$ であることに注意。

さらに写像（変数変換）

$$G:(s,t)\mapsto(u,v)$$

を用意して合成写像

$$F\circ G:(s,t)\mapsto(x,y)$$

の微分を計算すると、chain rule から

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t}\\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial t}\\ \dfrac{\partial v}{\partial s} & \dfrac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}$$

すなわち、

$$(F\circ G)'(s,t)=F'(G(s,t))G'(s,t)$$

であることがわかる（合成写像の微分の公式）。

これから Jacobian についての公式

$$J_{F\circ G}(s,t)=J_F(G(s,t))J_G(s,t)$$

を得る。この公式はしばしば

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$$

と書き表わされる。ただし、次のように置いた。

$$(u,v)=G(s,t),\qquad (x,y)=F(u,v).$$

とくに G として F の逆変換をとると、

$$(F\circ G)(s,t)=(s,t)$$

となるので、

$$F'(u,v)G'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となって、

$$J_{F^{-1}}(x,y) = \frac{1}{J_F(u,v)}$$

であることがわかる。

例題 3.8.

$$\begin{cases} u &= xy, \\ v &= y/x^2 \end{cases}$$

なる逆変換に対して、元の変数変換は、これを x, y について解いて、

$$\begin{cases} x &= u^{1/3}v^{1/3}, \\ y &= u^{2/3}v^{-1/3} \end{cases}$$

と表わされるので、

$$J_F(u,v) = \frac{1}{3}\frac{1}{v}.$$

一方、

$$J_{F^{-1}}(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ -2yx^{-3} & x^{-2} \end{vmatrix} = 3\frac{y}{x^2}$$

となって、

$$J_F(u,v)J_{F^{-1}}(x,y) = 1$$

が成り立っている。

問 33. 変数変換 $u = xy$, $v = y/x^2$ を使って解く重積分の計算問題を作れ。

4　微分作用素

関数 f から偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を作り出す操作を偏微分作用素と呼び $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ で表す。また、関数 $h(x,y)$ を掛ける操作 $f(x,y) \Longrightarrow h(x,y)f(x,y)$ を掛け算作用素と呼び M_h で表す。あるいは、M_h と h を同一視して、$h(x,y)$ そのものを掛け算作用素とみなすことも多い。

偏微分作用素と掛け算作用素の積（合成）と和を何回か繰り返して得られる作用素を**微分作用素** (differential operator [*32]) と呼ぶ。一次変換がベクトルからベクトルを作り出すように、微分作用素は、関数から関数を作り出すものになっている。

例題 4.1.

[*32] operator の訳語として「作用素」を使うのが数学業界の慣習で、数学以外では「演算子」という。どちらを使うかで出自が明らかとなるのであるが、英語の意味は「操作するもの」である。いずれの場合も、訳語がかたすぎる。原語の感覚だと「働きかけ」といったところ。

(i) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

(ii) $x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$.

(iii) $-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + V(x,y)$.

関数 $h(x,y)$ による掛け算作用素 M_h と微分作用素 $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ に対して、

$$D_x M_h = M_h D_x + M_{h_x} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial}{\partial x} h = h\frac{\partial}{\partial x} + h_x$$

である。これを Leibniz rule というが、その実態は、積の微分の公式である。とくに、$h_x \neq 0$ のときには、$M_h D_x \neq D_x M_h$ であるので、微分作用素の積においては交換法則が一般に成り立たないことがわかる。

関数 $f(x,y)$ に変数変換 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ を施して得られる関数を $\widetilde{f}$ という記号で表す[*33]、すなわち

$$\widetilde{f}(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

とすると、$f(x,y)$ に作用する線型作用素 D から、$\widetilde{f}$ に作用する線型作用素 $\widetilde{D}$ を

$$\widetilde{Df} = \widetilde{D}\widetilde{f}$$

によって作りだすことができ、この定義から

$$\widetilde{D_1 + D_2} = \widetilde{D_1} + \widetilde{D_2},$$
$$\widetilde{D_1 D_2} = \widetilde{D_1}\widetilde{D_2}$$

が従う。

補題 4.2 (微分作用素の変数変換)**.**

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} + \frac{\partial y}{\partial u}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)},$$
$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} + \frac{\partial y}{\partial v}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}$$

である。これを、チルダを適宜省略して

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}$$

などと書くことが多い。

とくに、

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\right),$$
$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

となって (J は Jacobian を表す)、微分作用素 D に対して、$\widetilde{D}$ もまた微分作用素であることがわかる。

[*33] 数学では、関数を「点に数を対応させる規則」と考えるので、$\widetilde{f}$ と f とは、本来明確に区別されるべきものである。一方、自然科学方面では、同じ関数の記号で観測量そのものを表すことも多く、そこでは、座標系のとり方に依らない物理量などを表し、f を区別するかわりに、変数を表す記号に特別の意味をもたせて、$f(u,v) = f(x,y)$ といった書き方をするので、注意が必要である。

例題 4.3. 2 次元極座標変換では、

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$
$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

となるので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

がわかる（左辺でチルダを省略した）。

問 34. 3 次元極座標変換

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

に対してラプラスの微分作用素 (Laplacian)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

はどのように変換されるか。計算は少し手間ではあるが、偏微分計算のよい練習になる。

例題 4.4. 微分作用素

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

に対して変数変換

$$u = t + x, \quad v = t - x$$

を施せば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\sim} = 4\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}.$$

これを使って、関数 $f(t,x)$ に対する方程式（波動方程式）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = 0$$

の解を求めてみよう。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = 0 \iff 4\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\widetilde{f} = 0$$

より、

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial v} = g(v).$$

そこで、$g(v)$ の原始関数を $G(v)$ で表せば、

$$\frac{\partial}{\partial v}(\widetilde{f} - G) = 0$$

となり、$\widetilde{f} - G = F(u)$, すなわち、

$$f(x,y) = \widetilde{f}(u,v) = F(t+x) + G(t-x)$$

という形が得られる（波動方程式の一般解）。

問 35. $F(t+x)$ は x 軸の負の方向へ進行する波を、$G(t-x)$ は正の方向に進行する波を表す。これを確かめよ。

5 ガンマ関数

オイラーが発見した階乗の積分表示[*34]

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

に関連して、**ガンマ関数** (gamma function)

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0$$

とベータ関数 (beta function)

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx, \quad s > 0, t > 0$$

を導入する[*35]。この 2 つの関数の関係について調べてみよう。

まず、ベータ関数の定義式で変数変換 $y = 1-x$ を行うと、

$$B(s,t) = B(t,s).$$

つぎに変数変換 $x = \sin^2\theta$ を施すと、

$$B(s,t) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2s-1}\theta \sin^{2t-1}\theta d\theta.$$

一方、ガンマ関数の定義式で変数変換 $x = r^2$ を行うと

$$\Gamma(t) = 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2t-1} dr.$$

これから、$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ がわかる (ガウス積分の公式)。

問 36. 関係式 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ を繰り返し使うことで、$\Gamma(n/2)$ の値を具体的に表せ。

命題 5.1. 次の等式が成り立つ。

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

Proof.

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2s-1} dx, \qquad \Gamma(t) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} x^{2t-1} dy$$

[*34] 積分の変数を $s = e^{-x}$ に変えた $n! = \int_0^1 (-\log s)^n \, ds$ がオイラーの与えた元々の表示である。

[*35] 指示されたパラメータの範囲において、広義積分が収束することに注意。パラメータを 1 だけずらす理由は、定義域を $t > 0$ としたいためであろうか。余計なことはせずに、$t! = \int_0^\infty x^t e^{-x} \, dx$ でよかったのであるが。

を掛けて

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}x^{2s-1}y^{2t-1}dxdy.$$

ここで極座標変換を施すと、

$$\begin{aligned} &= 4\int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-r^2} r^{2(s+t)-1}\cos^{2s-1}\theta\sin^{2t-1}\theta drd\theta \\ &= \Gamma(s+t)B(s,t). \end{aligned}$$

□

例題 5.2. 証明の途中の計算から、

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\sin^n\theta d\theta = \frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma((m+1)/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1+(m+n)/2)}.$$

ここで、

$$\Gamma(l+1/2) = (l-1/2)(l-3/2)\dots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

に注意すると、m, n の偶奇で場合分けが必要になるが、いつでも値を計算できる。例えば、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin^6\theta d\theta &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(6)} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{5!}\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{3}{2^9}\pi. \end{aligned}$$

問 37. 微分 $(\cos\theta\sin^{n-1}\theta)'$ を利用して、定積分

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta$$

のみたす漸化式を導き、I_n の値を具体的に表せ。その結果を、ガンマ関数を使った表示式と同定せよ。

ガンマ関数あるいは階乗の増大度については、微積分 I で見たように、Stirling の公式

$$\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^t$$

が成り立つ。ガンマ関数については、他にも様々な角度から詳しい研究がなされていて、今もなお興味が尽きない対象となっている。

6 多変数の極値問題

まず、1 変数の場合の復習から。関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値 (extremum) をもつとき、$f'(a)=0$ でなければならない。そして、このとき、2 次の近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

を使えば、$f''(a) > 0$ のとき極小、$f''(a) < 0$ のとき極大であることがわかる。$f''(a) = 0$ のときには 3 次以上の近似式を調べることになる。

同様のことを 2 変数関数 $f(x, y)$ についても考えたい。まず、$f(x, y)$ が (a, b) で極値をもてば、x の関数 $f(x, b)$, y の関数 $f(a, y)$ それぞれが極値をとることから、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

このような点 (a, b) は、関数 f の**停留点** (stationary point) *36と呼ばれる。

例題 6.1. 関数 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の停留点を求める。

定理 6.2. 関数 $f(x, y)$ は、二階までの偏導関数が存在し連続であるとすると、h, k が小さいとき二次の近似式

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &\fallingdotseq f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. 1 変数関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ に対する等式

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \int_0^1 F''(t)(1-t)\,dt$$

を具体的に書いてみる。そのために、F の微分を chain rule により計算する。

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(a+ht, b+kt)h + f_y(a+ht, b+kt)k \\ F''(t) &= f_{xx}(a+ht, b+kt)h^2 + 2f_{xy}(a+ht, b+kt)hk + f_{yy}(a+ht, b+kt)k^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$F(1) = f(a+h, b+k), \quad F(0) = f(a, b), \quad F'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

および h, k が小さいことに由来する近似式

$$\begin{aligned} f_{xx}(a+ht, b+kt) &\fallingdotseq f_{xx}(a, b), \\ f_{xy}(a+ht, b+kt) &\fallingdotseq f_{xy}(a, b), \\ f_{yy}(a+ht, b+kt) &\fallingdotseq f_{yy}(a, b) \end{aligned}$$

を代入することで*37、求める近似式を得る。 □

問 38. 微分作用素

$$D = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$$

を使うと、

$$F^{(n)}(t) = (D^n f)(a + ht, b + kt)$$

と書ける。これを確かめよ。

---

*36 他に、特異点 (singular point)、臨界点 (critical point) という言い方もある。

*37 微分と異なり、0 に近い関数を積分したものは 0 に近いことに注意。

問 39. 近似式

$$x(t) \fallingdotseq x(0) + x'(0)t + x''(0)t^2/2, \quad y(t) \fallingdotseq y(0) + y'(0)t + y''(0)t^2/2$$

と上の定理を組み合わせることで、合成関数 $f(x(t), y(t))$ の $t = 0$ における 2 次近似式を導け。

系 6.3. $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点では、

$$f(a+h, b+k) \fallingdotseq f(a,b) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f(a,b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

のようになる。ここで、**ヘッセ行列** (Hessian) $H_f(a,b)$ を

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

で導入した[*38]。

問 40. 2 次関数 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ が、$AC - B^2 \neq 0$ であるとき、停留点が丁度一つ存在することを示せ。また、その停留点を (a,b) とするとき、

$$F(x,y) = F(a,b) + A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2$$

であること（2 次近似式が、正確に成り立つこと）を確かめよ。

例題 6.4. 関数 $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ が $(0,0)$ で極値を持つかどうかについて調べる。

Proof. 線型代数における基本結果である二次形式の理論の特別な場合であるが、二次形式そのものがしばしば省略の対象になるということもあり、少し詳しく述べてみよう。

最初に、素朴な方法で。$y \neq 0$ のとき、

$$f(x,y) = y^2(a(x/y)^2 + 2b(x/y) + c)$$

と書けるので、2 次式 $at^2 + 2bt + c$ の符号の様子が問題。小さい x, y を考えても、比 $t = x/y$ は全ての実数が出てくることに注意。この 2 次式の符号が定まらないとき、すなわち判別式 $b^2 - ac > 0$ のときは、もとの関数 $f(x,y)$ の符号は、$(0,0)$ の近くで一定でなくなるので、極値ではない。一方、判別式 $b^2 - ac < 0$ の時には、符号はつねに一定で、従って $a > 0$, $a < 0$ に応じて、関数 $f(x,y)$ は原点で極小、極大になる。

判別式 $b^2 - ac = 0$ の時には、$at^2 + 2bt + c = a(t-\lambda)^2$ と書けるので、

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x - \lambda y)^2$$

となって、$z = f(x,y)$ は放物線を平行移動して得られる曲面を表す。

二つ目の方法として、極座標

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

を使うと

$$f(x,y) = r^2(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta).$$

[*38] 行列らしく大文字で表したが、f の二階微分でもあるので、$f''(a,b)$ と書いてもよい。これは、二階の対称テンソルと呼ばれるものになっている。

そこで、

$$
\begin{aligned}
g(\theta) &= a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta \\
&= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\theta + b\sin 2\theta \\
&= \frac{a+c}{2} + \sqrt{(a-c)^2/4 + b^2}\,\sin(2\theta+\alpha)
\end{aligned}
$$

を書き直すと、$g(\theta)$ の最大値・最小値は

$$
\frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}, \quad \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.
$$

また、これらの方向を与える角をそれぞれ θ_+, θ_- とおけば θ_+ と θ_- の差は $\pi/2$ となって直交する。

最後に、x, y の座標軸を角度 θ だけ回転させて得られる新座標 X, Y を

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
$$

で導入すれば、

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = \left(\frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\theta + b\sin 2\theta\right) X^2 \\
+ 2\left(\frac{c-a}{2}\sin 2\theta + b\cos 2\theta\right) XY \\
+ \left(\frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2}\cos 2\theta - b\sin 2\theta\right) Y^2.
\end{aligned}
$$

そこで、

$$
b\cos 2\theta + \frac{a-c}{2}\sin 2\theta = 0
$$

であるように θ を選べば、

$$
(\cos 2\theta, \sin 2\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 + (a-c)^2/4}} \left(\frac{a-c}{2}, b\right)
$$

となって、

$$
f(x,y) = \lambda_\pm X^2 + \lambda_\mp Y^2, \quad \lambda_\pm = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{b^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}
$$

を得る。したがって、(i) $\lambda_+\lambda_- = ac - b^2 < 0$ のときは、原点で極値をとらず、(ii) $\lambda_+\lambda_- = ac - b^2 \geq 0$ のときには、$\lambda_+ + \lambda_- = a + c$ の符号に応じて、原点での値が最大または最小となる。

以上の計算はまた、

$$
\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
$$

と比較するとわかるように、行列の対角化

$$
\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_\pm & 0 \\ 0 & \lambda_\mp \end{pmatrix}
$$

を行ったことにもなっていることに注意。 □

問 41. $\lambda_+\lambda_- = ac - b^2$ に注意して、$ac - b^2 > 0$ のとき、次を示せ。

$$a > 0 \iff c > 0 \iff \lambda_\pm > 0.$$

定理 6.5. 関数 $f(x, y)$ の停留点 (a, b) において、

(i) $\det(H_f(a, b)) > 0$ ならば、$f_{xx}(a, b)$ の正負に応じて、極小または極大になる。
(ii) $\det(H_f(a, b)) < 0$ ならば、極値にならない（(a, b) を**鞍点**[*39]とよぶ)。
(iii) $\det(H_f(a, b)) = 0$ のときは、色々な場合がある。

例題 6.6. 上の例題を使って、点 $(0, 0)$ の附近での様子を図解。

例題 6.7. (iii) の場合に、実際、いろいろなことが起こること。$f(x, y) \fallingdotseq (x - y)^2$ となるときは、$u = x - y$, $v = x + y$ なる変数を使うと、

$$f(x, y) = u^2 + \text{3 次以上の項}$$

となって、

$$f(x, y) = u^2 + v^2 u, \qquad f(x, y) = u^2 + v^3$$

等、いろいろな場合が出てくる。

問 42. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値について調べる。

問 43. $f(x, y) = x^2 + 2x^2y - xy^2$ の極値について調べよ。

3 変数（以上）の場合も 2 次の近似式は、同じように計算して停留点のまわりで、

$$f(a + x, b + y, c + z) \fallingdotseq f(a, b, c) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} H_f(a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$H_f(a, b, c) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b, c) & f_{xy}(a, b, c) & f_{xz}(a, b, c) \\ f_{yx}(a, b, c) & f_{yy}(a, b, c) & f_{yz}(a, b, c) \\ f_{zx}(a, b, c) & f_{zy}(a, b, c) & f_{zz}(a, b, c) \end{pmatrix}.$$

偏微分の結果が微分する順序によらないことから、Hessian $H_f(a, b, c)$ は対称行列であること、したがってその固有値は全て実数であることに注意。

定理 6.8. 関数 $f(x, y, z)$ の停留点 (a, b, c) において、

(i) ヘッセ行列 $H_f(a, b, c)$ の固有値が全て正ならば、$f(x, y, z)$ は (a, b, c) で極小。
(ii) ヘッセ行列 $H_f(a, b, c)$ の固有値が全て負ならば、$f(x, y, z)$ は (a, b, c) で極大。
(iii) ヘッセ行列 $H_f(a, b, c)$ が 正の固有値も負の固有値も両方もつときは、極値にならない[*40]。
(iv) 上記以外の場合、すなわちヘッセ行列 $H_f(a, b, c)$ が半定値で 0 を固有値に持つときは、いろいろな場合がある。

例題 6.9. 3 変数の関数

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-x^2 - y^2 - z^2}$$

[*39] 英語で、saddle point という。曲面 $z = x^2 - y^2$ の形状に由来する。
[*40] このうち、すべての固有値が 0 でない場合を鞍点という。

の極大・極小について調べる。

Proof.

$$f_x = (1 - 2x(x + y + z))e^{-x^2-y^2-z^2}$$

であるから、$f_x = f_y = f_z = 0$ となるのは、$x = y = z$ のときで、$1 - 6x^2 = 0$、すなわち、$x = \pm 1/\sqrt{6}$. このとき、

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -2(2x + y + z)e^{-x^2-y^2-z^2} - 2xf_x, \\ f_{xy} &= -2xe^{-x^2-y^2-z^2} - 2yf_x \end{aligned}$$

であるから、

$$H_f = -2xe^{-x^2-y^2-z^2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\begin{vmatrix} t-4 & -1 & -1 \\ -1 & t-4 & -1 \\ -1 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = (t-3)^2(t-6)$$

であるから、$(x, y, z) = (1, 1, 1)/\sqrt{6}$ のときは極大、$(x, y, z) = (-1, -1, -1)/\sqrt{6}$ のときは極小。

無限遠点で、 $f \to 0$ であるから、実は、これらはそれぞれ、最大値、最小値になっている。 □

問 44. 関数 $f(x, y) = (1 - x - y)e^{-x^2-y^2}$ の極値について調べよ。

注意 . 3 変数以上の場合に、固有値を求めて上の判定条件を適用するのは、特殊な場合を除いて現実的な方法ではない。(固有方程式を解くのが一般的には難しい。）必要な情報は、固有値そのものではなくてその符号なので、二次形式の正則行列による標準形の存在を示す際に用いるアルゴリズム（付録参照）を活用すべきである。

7 等高線と陰関数

関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対して、方程式 $f(x_1, \ldots, x_n) = h$ (h は定数) を満たす点 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の集まりを**等位集合** (level set) という。2 変数の場合は、等位線 (level curve) ともよばれ、曲面 $z = f(x, y)$ で表される地形の標高が h の地点を結んだ**等高線** (contour line) を表している。また、3 変数の場合は空間内の曲面を表すことから**等位面** (level surface) と呼ばれる。レベルを表すパラメータ h とともに等位集合がどのように変化するか調べることは、多変数関数を解析する上での基本である。前節で見た極値の判定も、等高線と結びつけることでより詳しい情報が得られる。

例題 7.1. 関数 $f(x, y) = y^2/2 - \cos x$ の等高線の様子を調べてみよう。（振り子の運動方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin x$ の位置エネルギーが $-\cos x$ である。）

Proof. 等高線の方程式

$$\frac{1}{2}y^2 - \cos x = h$$

を y について解くと、

$$y = \pm\sqrt{2(h + \cos x)}.$$

h の大きさで場合を分ける。

(i) $h < -1$ ならば、解は存在しない（$f(x,y) \geq -1$）。

(ii) $h = -1$ となるのは、$\cos x = 1$ のときで、そのとき $y = 0$ であるから、

$$(x,y) = (2\pi n, 0) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

(iii) $-1 < h < 1$ ならば、$h = -\cos\gamma$ $(0 < \gamma < \pi)$ と表すことができて、$h + \cos x \geq 0$ となる x の範囲は、$[-\gamma, \gamma]$ およびこれを $2\pi n$ だけ平行移動したもの。このときの曲線の様子を描いてみると、下図のようになる。(y^2 と y のグラフを対比させて。)

(iv) $h = 1$ のときは、$1 + \cos x = 2\cos^2(x/2)$ となるので、

$$y = \pm 2\cos\frac{x}{2}.$$

(v) $h > 1$ のときは、$h + \cos x \geq h - 1 > 0$ となるので、x の範囲には制限がつかず、曲線は、下図のようになる。

□

ここで、$f(x,y)$ の停留点を調べてみると、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\sin x, y) = (0,0) \iff (x,y) = (\pi n, 0), \quad n = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

で、各停留点でのヘッセ行列は、

$$H_f(\pi n, 0) = \begin{pmatrix} \cos\pi n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって、$(\pi n, 0)$ は、(i) n が偶数のとき、極小点 (実は最小点)、(ii) n が奇数のとき、鞍点、であることがわかる。

定義 7.2. 等位集合内の点で、関数 f の停留点になっているものを、その等位集合の**特異点** (singular point) という。特異点でない点を**正則点** (regular point) という。等高線 $f(x,y) = h$ 上の点 (a,b) についてであれば、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となるものが特異点である。

定理 7.3.

(i) 正則点 (a,b) の付近で、等高線 $f(x,y) = h$ は 1 本のなめらかな曲線を表す。

(ii) 特異点 (a,b) において、$\det(H_f(a,b)) > 0$ ならば、関数 f は、(a,b) で極大か極小である。極大の場合、(a,b) の付近での等高線 $f(x,y) = h$ は、$h = f(a,b)$ ならば (a,b) ただ一点であり、$h < f(a,b)$ ならば (a,b) を囲む閉曲線を表し、$h > f(a,b)$ となる等高線は、(a,b) の近くには存在しない。極小の場合も、不等式の向きが反対になるだけで、同様のことが成り立つ。

(iii) 特異点 (a,b) において、$\det(H_f(a,b)) < 0$ ならば、(a,b) は f の鞍点であり、等高線 $f(x,y) = h$ は、$h = f(a,b)$ ならば、点 (a,b) で交差する 2 本のなめらかな曲線を表し、$h \neq f(a,b)$ ならばこの 2 曲線で区切られた双曲線状の曲線を表す。

Proof. (i) 1 次の近似式

$$f(x,y) = h + f_x(a,b)(x-a) + f_y(y-b)$$

より、正則点の近くで $f(x,y)=h$ は近似的に直線

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$$

を表す。

(ii) $\det(H_f(a,b))>0$ のときは、点 (a,b) で極値をとるから、$f(x,y)=h=f(a,b)$ となる (x,y) は、(a,b) しかない。

$\det(H_f(a,b))<0$ のときは、$z=f(x,y)$ の曲面は、(a,b) で鞍点になっているので、等高線は 2 本の曲線の交わりになっている。 □

系 7.4. (i) でとくに $f_y(a,b)\neq 0$ ならば、等高線を表す方程式 $f(x,y)=h$ を y についてなめらかに解くことができる。すなわち、微分できる関数 $y=\varphi(x)$ で、

$$f(x,\varphi(x))=h, \quad b=\varphi(a)$$

となるものが、$x=a$ の近くで一つだけ存在する。これを方程式 $f(x,y)=h$ の定める**陰関数** (implicit function) と呼ぶ。

同様に、$f_x(a,b)\neq 0$ ならば、

$$f(\psi(y),y)=h, \quad a=\psi(b)$$

となるなめらかな関数 ψ が存在する。

問 45. 等高線 $x^2+y-y^3/3=h$ の変化の様子を特異点に注意して調べる。

問 46. 曲線 $x^3-6xy+y^3=0$ の特異点を求め、その付近での曲線の様子を調べよ。

正則点における考察は、3 変数以上でもそのまま成り立つ。例えば、3 変数の関数 $f(x,y,z)$ に対して、

$$(f_x(a,b,c),f_y(a,b,c),f_z(a,b,c))\neq(0,0,0)$$

となる点を**正則点**と言うことにすれば、正則点 (a,b,c) の近くで、方程式

$$f(x,y,z)=f(a,b,c)$$

は滑らかな曲面を表し、もし $f_x(a,b,c)\neq 0$ ならば、(b,c) の近くで定義されたなめらかな関数 $\varphi(y,z)$ で、

$$f(\varphi(y,z),y,z)=f(a,b,c), \qquad \varphi(b,c)=a$$

となるものが、一つだけ存在する。最初の式は、y,z についての恒等式であるので、y について偏微分すると

$$f_x(\varphi(y,z),y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)+f_y(\varphi(y,z),y,z)=0,$$

すなわち、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,z)=-\frac{f_y(f(y,z),y,z)}{f_x(f(y,z),y,z)}$$

を得る。この関係式は、

$$x=\varphi(y,z), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$$

と略記することで、

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

のように表すこともある。

問 47. $f(x,y,z)=0$ で定められる陰関数について、

$$f_x(x,y,z)f_y(x,y,z)f_z(x,y,z)\neq 0$$

となる点で、次が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1$$

二変数関数のもつ情報を視覚化する手段として、等高線の方法については既に説明したが、日常的に接する機会が多いものに天気図の等圧線がある。地表上の同じ大気圧の地点を結んで得られる曲線群のことである。３次元的状況だと等圧面を考えることになる。いずれの場合も、等圧線の形状と風向風速との間に密接な関連がある。最も単純なモデルだと、

(i) 風は、高圧部から低圧部へ等圧線に直交する形で吹く、
(ii) 等圧線の間隔が密であればあるほど、強い風が吹く。

現実の大気の動きは、地球の自転の影響も含めて極めて複雑ではあるが、この単純化したモデルで得られる風向・風速をベクトルで表すことにしよう。この風のベクトルは、地点ごとに大きさも向きも変化するので、一種の関数になっている。このようなベクトルが「値」として出現する関数のことをベクトル値関数とか**ベクトル場** (vector field) と呼ぶ。他に、電場（電界）とか磁場（磁界）というのもベクトル場の例。

ベクトルであるから、基底を選んでおくことで、成分を使って表せるのであるが、ベクトルの成分表示と点の座標表示は、本来区別されるべきものである。混乱を避けるためには、ベクトル場を表す際に、$(F(x,y),G(x,y))$ という成分表示ではなく、基底 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ を明示した

$$F(x,y)\boldsymbol{i}+G(x,y)\boldsymbol{j}$$

といった書き方をするとよい。

以上を背景に、点のデカルト座標 (x,y,z) を変数とする関数 $f(x,y,z)$ から作られるベクトル場

$$\big(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z)\big)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

を f の**勾配ベクトル場**[*41](gradient vector field[*42]) とよび、grad$f$ あるいは ∇f という記号で表す[*43]。勾配ベクトル場は、次のような幾何学的意味をもつ。

(i) 勾配ベクトルは、等位面に直交し f の値の小さい方から大きい方を指している。
(ii) 勾配ベクトルの大きさは、等位面の間隔が密であればあるほど大きい（等位面の間隔の逆数に比例する)。

このことを確かめてみよう。(i) は、一次近似式・接平面のところで扱った内容の言い換えである。(ii) を見るために、点 (a,b,c) を通る等位面を $f(x,y,z)=h$ とし、(a,b,c) に近い点 $(a+\Delta x,b+\Delta y,c+\Delta z)$ を通る等位面を $f(x,y,z)=h+\Delta h$ とする。このとき、各点の付近での等位面は、grad$f(a,b,c)$ を法

[*41] 勾配ベクトルは、ベクトル解析で常用される用語であるが、これは f の微分の特別な場合（変数が点のデカルト座標であるという）であるので、f' あるいは $df=f_xdx+f_ydy+f_zdz$ のように表すこともある。
[*42] gradient の発音に注意。
[*43] ∇ は、ナブラ (nabla) と呼ぶ。

線とする平面で近似されるので、その間の距離 δ は、変位ベクトル $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ と単位法線ベクトル $\mathrm{grad} f(a,b,c)/|\mathrm{grad} f(a,b,c)|$ との内積

$$\frac{1}{|\mathrm{grad} f(a,b,c)|}\Big(f_x(a,b,c)\Delta x + f_y(a,b,c)\Delta y + f_z(a,b,c)\Delta z\Big) \fallingdotseq \frac{\Delta h}{|\mathrm{grad} f(a,b,c)|}$$

で与えられる。等高線の密度は、$\Delta h/\delta$ に比例するので、$|\mathrm{grad} f(a,b,c)|$ にも比例していることがわかる。

Maxwell's thermodynamic surface

8 条件付極値

拘束条件 (constraint) $\varphi(x,y)=0$ のもとで、関数 $f(x,y)$ の極値について考える。これは、関数 f を曲線 $C=\{\varphi(x,y)=0\}$ に制限したときの極値問題といってもよい。C 上の正則点 (a,b) で f が極値をとるとしよう。関数 f の (a,b) の付近での等高線の様子を描いてみる。もし、(a,b) が f の正則点でもあれば、f の勾配ベクトル $(f_x(a,b), f_y(a,b))$ 方向に f は増加する。したがって、C の点 (a,b) での接線方向の成分が消えなければ、f は (a,b) で停留状態にはならない。すなわち、極値をとるためには、勾配ベクトルの接線方向の成分が消える必要がある。この条件は、勾配ベクトルが、C の法線方向と平行であるといいかえることができるので、

$$(f_x, f_y) = \lambda(\varphi_x, \varphi_y)$$

となるような実数 λ (ラグランジュ乗数という) の存在がわかる。この最後の形は、(a,b) が f の特異点である場合にも $\lambda=0$ という形で成り立つ。

まとめると、拘束条件下での極値を与える点 $(a,b)\in C$ が存在するならば、それは (i) $\varphi_x=\varphi_y=0$ をみたすか、(ii) 上のラグランジュ乗数の式をみたす。いずれの場合も、拘束条件 $\varphi=0$ が付け加わるので、前者の場合は、２つの未知数 a, b に対して３つの方程式をみたす必要があり、後者の場合でも、３つの未知数 a, b, λ に対して３つの方程式が課せられるので、解が求まるものと期待される。

同様のことは、変数が多くなっても成り立つ。例えば、拘束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ のもとでの，関数 $f(x,y,z)$ の極値問題であれば，関数 f を曲面 $S=\{\varphi(x,y,z)=0\}$ に制限したときの極値問題を扱うことになる。S 上の正則点 (a,b,c) で f は極値をとるとしよう。(a,b,c) を通る曲面 S 上の曲線 $(x(t),y(t),z(t))$ を考えると，

$$f_x(a,b,c)\frac{dx}{dt} + f_y(a,b,c)\frac{dy}{dt} + f_z(a,b,c)\frac{dz}{dt} = 0.$$

これから，ベクトル $(f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c))$ は，S の (a,b,c) における全ての接ベクトルに直交する。したがって，このベクトルは曲面の法線ベクトル $(\varphi_x(a,b,c), \varphi_y(a,b,c), \varphi_z(a,b,c))$ に比例する。すなわち，

$$(f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c)) = \lambda(\varphi_x(a,b,c), \varphi_y(a,b,c), \varphi_z(a,b,c))$$

となる実数 λ が存在する。これと，拘束条件

$$\varphi(a,b,c)=0$$

を連立させることで，a, b, c (および λ) を求める方法が**ラグランジュ乗数法** (the method of Lagrange multipliers) と呼ばれるものである。この方法は、極値をもつ可能性のある点を見つける際に威力を発揮するのであるが、他にも可能性がある点がないかどうか、また実際にそれが極値かどうかの判断の材料を与えるも

のではないことに注意しよう。したがって、S が何らかの境界点（無限遠点も境界点と思う）をもつ場合には、そこでの関数 f の値と、上で問題にした特異点あるいは停留点での値とを比較して、最大・最小の判断を下すことになる。（付録の定理 A.3 参照。）

なお、拘束条件下の極値の 2 次判定方法については、付録 F を参照。

結果をまとめると、

定理 8.1. 拘束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ の下で、関数 $f(x,y,z)$ が (a,b,c) で極値を取れば、

(i) $(f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c)) = \lambda(\varphi_x(a,b,c), \varphi_y(a,b,c), \varphi_z(a,b,c))$ かつ $\varphi(a,b,c)=0$ であるような実数 λ が存在する、

(ii) 点 (a,b,c) は、曲面 $\varphi(a,b,c)=0$ の特異点、すなわち $(\varphi_x(a,b,c), \varphi_y(a,b,c), \varphi_z(a,b,c)) = 0$ かつ $\varphi(a,b,c)=0$ である、

のいずれかが成り立つ。

例題 8.2. 条件 $x^2+y^2+z^2=1$ の下で、xyz の最大値と最小値を求めてみよう。

まず、拘束条件が球面を表しており、特異点も境界点をもたないことに注意する。したがって、ラグランジュ乗数法で得られる停留点の中に最大点・最小点が見つかる。$(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 2(x,y,z)$ であるから、

$$f_x = yz = 2\lambda x, f_y = xz = 2\lambda y, f_z = xy = 2\lambda z$$

と条件 $x^2+y^2+z^2=1$ をみたす (x,y,z) を求めると。

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

となって、このうち、$xyz = (1/\sqrt{3})^3$ となる点で最大値を、$xyz = -(1/\sqrt{3})^3$ となる点で最小値をとる。

問 48. 条件 $x^2+y^2=1$ の下で、$x^m y^n$ の最大値・最小値を求めよ。ただし、m, n は自然数とする。

問 49. 三角形 ABC の 3 つの角 A, B, C に対して、$\cos A + \cos B + \cos C$ の最大値および最小値を求めよ。

問 50. 条件 $x_1 + \cdots + x_n = 0$ の下で、$\cos x_1 + \cdots + \cos x_n$ の最大値・ 最小値を求めよ。

例題 8.3. 集合

$$\{(x_1,\ldots,x_n); x_j \geq 0, \sum_j x_j = 1\}$$

の上で定義された連続関数

$$H(x) = -\sum_j x_j \log x_j$$

が最大になるのは、どのようなときか?

まず、H が x の連続関数であることに注意する。つぎにラグランジュ乗数を使った方程式

$$-(\log x_j + 1) = \lambda, \quad j = 1,\ldots,n$$

を条件 $x_1+\cdots+x_n=1$ の下で解くと、$x_j = 1/n$ $(\lambda = \log n - 1)$ となるので、

$$H(1/n,\ldots,1/n) = \log n.$$

以上を踏まえて、これが H の最大値であることを n についての帰納法で示す。$n=1$ の場合は、明らかである。$n-1$ の場合の最大値が $\log(n-1)$ であるとする。n 変数の場合は、上の停留値が境界での最大値よりも大きいことを示す必要がある。境界では、$x_1,\dots,x_n$ のいずれかが 0 になるので、

$$\lim_{t\to+0} t\log t = 0$$

に注意すれば、変数の数が $n-1$ の場合に帰着する。そこでは、帰納法の仮定により最大値が $\log(n-1)$ であることから、H の境界での最大値は、$\log n$ よりも小さく、したがって H の最大値は、$\log n$ である。

問 51. 集合

$$\{(x_1,\dots,x_n); x_j>0, \sum_j x_j = 1\}$$

の上で定義された連続関数

$$f(x) = \sum_j \frac{1}{x_j}$$

の最小値について調べよ。

問 52. 固有値が正の $n\times n$ エルミート行列 A が $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^{-1})$ となるならば、この値は n 以上であることを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

問 53. 条件 $x+y+z=h$ の下で、関数 $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2}$ の最小値を求めよ。ただし、$a,b,c>0$, $h\in\mathbb{R}$ は定数である。

さらに、別の拘束条件 $\psi(x,y,z)=0$ が追加された場合を考えよう。この場合は、2つの曲面 $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ の共通部分としての曲線に制限した極値問題を扱うことになる。まず、曲線 $\varphi(x,y,z)=0=\psi(x,y,z)$ 上の点 (a,b,c) が

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\varphi_x(a,b,c) & \varphi_y(a,b,c) & \varphi_z(a,b,c)\\ \psi_x(a,b,c) & \psi_y(a,b,c) & \psi_z(a,b,c)\end{pmatrix} = 2$$

をみたすとき正則点であるといい、それ以外の場合を特異点と呼ぶことにすれば、次が成り立つ。

定理 8.4. 正則点 (a,b,c) の付近における新たな座標変数 (u,v,w) として、$u=\varphi(x,y,z)$, $v=\psi(x,y,z)$ の形のものを採ることができる。

これは、線型代数における、「2つの一次独立なベクトルが与えられたとき、それにもうひとつのベクトルを追加して、3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の基底を作ることができる」という事実に対応している。厳密な証明はそれなりに面倒かつ工夫を要するのであるが、正則点の付近では関数の一次式による近似が機能する、という「微分の心」でもって納得しよう。

定理 8.5. 2つの拘束条件 $\varphi(x,y,z)=0=\psi(x,y,z)$ の下で、関数 $f(x,y,z)$ が点 (a,b,c) で極値を取れば、次のいずれかが成り立つ。

(i) $\nabla f(a,b,c)=\lambda\nabla\varphi(a,b,c)+\mu\nabla\psi(a,b,c)$ かつ $\varphi(a,b,c)=0=\psi(a,b,c)$ となる実数 λ,μ が存在する。
(ii) 点 (a,b,c) は、曲線 $\varphi=0=\psi$ の特異点である。

Proof. 極値を取る点 (a,b,c) が正則点であったとしよう。上の定理で存在することが保証された座標 (u,v,w) による f の表示を g とする。すなわち

$$f(x,y,z)=g(u,v,w).$$

この新たな座標を使えば、拘束条件は、$u=v=0$ となるので、$g(0,0,w)$ が、$w_0=w(a,b,c))$ で極値を取ることから、

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial g}{\partial w}(0,0,w(a,b,c))\\&=f_x(a,b,c)\frac{\partial x}{\partial w}(0,0,w_0)+f_y(a,b,c)\frac{\partial y}{\partial w}(0,0,w_0)+f_z(a,b,c)\frac{\partial z}{\partial w}(0,0,w_0)\end{aligned}$$

を得る。すなわち、ベクトル $f'(a,b,c)$ は、ベクトル

$$D=\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix}\right|_{(u,v,w)=(0,0,w_0)}$$

と直交する。

一方、

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{\partial}{\partial w}\varphi(x,y,z)=\varphi'(x,y,z)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix},\\0&=\frac{\partial v}{\partial w}=\frac{\partial}{\partial w}\psi(x,y,z)=\psi'(x,y,z)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから、D と直交するベクトルは、$\varphi'(a,b,c)$ と $\psi'(a,b,c)$ の一次結合で書くことができて $(\varphi'(a,b,c),\psi'(a,b,c)$ が一次独立であることに注意)、

$$f'(a,b,c)=\lambda\varphi'(a,b,c)+\mu\psi'(a,b,c)$$

となるような実数 λ,μ の存在がわかる。 □

例題 8.6. 例題 8.2 に拘束条件 $\psi(x,y,z)=x+y+z-1=0$ を追加すると、

$$\nabla f=(yz,zx,xy)=\lambda(2x,2y,2z)+\mu(1,1,1)$$

を拘束条件 $x^2+y^2+z^2=1=x+y+z$ と連立させて解くことで、$(x,y,z)=(1,0,0)$ とその並べ替え、または $(x,y)=(-1/3,2/3,2/3)$ を得る。また、それぞれの点での値が、$f(1,0,0)=0$, $f(-1/3,2/3,2/3)=-4/27$ であることから、最大値が 0, 最小値が $-4/27$ であることもわかる。

問 54. 上の 2 つの定理を、拘束条件 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)=\cdots=\varphi_m(x_1,\dots x_n)=0$ の下で関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が極値を取る場合に一般化せよ。

9 線積分

座標平面の上で定義されたベクトル値関数

$$(f(x,y),g(x,y))=f(x,y)\boldsymbol{i}+g(x,y)\boldsymbol{j}$$

をベクトル場とも呼ぶのであった。ここでは、平面の点を表すために位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ を用い、ベクトル場を $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{i} + g(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}$ のようにも表す。平面内の向きが指定された曲線 C に対して、C のパラメータ表示 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ を使った積分

$$\int_a^b \left(f(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + g(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \right) dt$$

を考えると、これはパラメータの取り方によらない。そこで、これを

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \Big(f(x, y)dx + g(x, y)dy \Big)$$

と表して、ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の曲線 C に沿った**線積分** (line integral) と呼ぶ。線積分は、なめらかな曲線をいくつか繋いだ折れ線状の場合にも、なめらかな部分の線積分の和として定義される。

ここで線積分の性質:

(i) $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ は、$\boldsymbol{F}$ について線型。

(ii) C の向きを反対にしたものを $-C$ で表せば、$\int_{-C} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.

(iii) 曲線を $C = C_1 + \cdots + C_n$ と分解するとき、

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \cdots + \int_{C_n} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

(iv) $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})|^2 = f(x, y)^2 + g(x, y)^2 \leq M^2$ ($M > 0$ は定数) であるとき、

$$\left| \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \right| \leq M|C|.$$

ただし、$|C|$ は曲線の長さを表す。

定理 9.1 (Green's Formula)**.** 平面内の領域 D の境界に反時計回りの向きを入れた閉曲線を C で表すとき、

$$\int_C (f(x, y)dx + g(x, y)dy) = \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy.$$

Proof. $g = 0$ のない場合を扱う。D を縦に薄切りすると（$f = 0$ のときは、横に薄切り）、D が $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, $a \leq x \leq b$ の形の有限和であるので、この特殊な形状のときに公式を示せばよい。このとき問題の線積分は、

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x, \varphi(x))dx - \int_a^b f(x, \psi(x))dx &= -\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dydx \\ &= -\int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dxdy \end{aligned}$$

となってめでたい。 □

線積分は、何次元でも同様に定義できる。例えば、三次元空間内におけるベクトル場

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(x, y, z)\, \boldsymbol{i} + g(x, y, z)\, \boldsymbol{j} + h(x, y, z)\, \boldsymbol{k}$$

を向きのついた曲線 C に関して線積分したもの

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz)$$

は、C のパラメータ表示 $(x(t), y(t), z(t))$ $(a \le t \le b)$ を使って、

$$\int_a^b \left(f(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + g(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + h(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt$$

で与えられる。

この線積分を、曲線の分点 $\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n$ を使って、

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \, dt = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k) \cdot (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_{k-1})$$

と書きなおせば、線積分が曲線を表すパラメータのとり方によらないことがわかる。

次の結果は、証明も含めて変数の個数によらずに成り立つ。

定理 9.2. ベクトル場 $\boldsymbol{F} = f\,\boldsymbol{i} + g\,\boldsymbol{j} + h\,\boldsymbol{k}$ に対して、次は同値。

(i) 曲線 C に沿った線積分の値が C の始点と終点だけで決まる。

(ii) あらゆる閉曲線 C について、その線積分が

$$\int_C (f dx + g dy + h dz) = 0$$

を満たす。

(iii) 勾配ベクトル場である。すなわち、

$$(f, g, h) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

であるような関数 ϕ が存在する。

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii): 閉曲線 C 内の 2 点 p, q をとり、C を p から q への曲線 C_1, C_2 の差として $C = C_1 - C_2$ と表すと、

$$\int_C (f dx + g dy + h dz) = \int_{C_1} (f dx + g dy + h dz) - \int_{C_2} (f dx + g dy + h dz)$$

である。ここで、(i) より、２つの線積分の値は一致し、したがって、上の閉路積分の値は 0 となる。

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 曲線 C のパラメータ表示 $(x(t), y(t), z(t))$ $(a \le t \le b)$ に対して、

$$\begin{aligned} \int_C (f dx + g dy + h dz) &= \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(x(t), y(t), z(t)) \, dt \\ &= \phi(x(b), y(b), z(b)) - \phi(x(a), y(a), z(a)) \end{aligned}$$

となって、この値は、曲線の始点 $\boldsymbol{r}(a)$ と終点 $\boldsymbol{r}(b)$ だけに依存する。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 一点 (a, b, c) を選んできて、

$$\phi(x, y, z) = \int_C (f dx + g dy + h dz)$$

とおく。ここで、C は、(a,b,c) を始点とし、(x,y,z) を終点とする曲線である。(i) の仮定から、これが、曲線 C の選び方によらないことに注意。さて、(x,y,z) と $(x+\Delta x,y,z)$ を結ぶ線分を ΔC で表せば、

$$\phi(x+\Delta x,y,z)=\phi(x,y,z)+\int_{\Delta C}(f dx+g dy+h dz)=\phi(x,y,z)+\int_x^{x+\Delta x}f(t,y,z)\,dt$$

であるから、

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t,y,z)\,dt=f(x,y,z)$$

となる。すなわち、$\phi_x=f$ である。ϕ_y, ϕ_z についても同様。 □

上の定理は、ベクトル場が勾配の形になっているかどうかについての必要十分条件を与えているのだが、あらゆる閉曲線について線積分を調べる必要があり、判定条件としては実用的ではない。簡単にチェックできる必要条件として、次がある。

命題 9.3. ベクトル場 $(F_1(x_1,\dots,x_n),\dots,F_n(x_1,\dots,x_n))$ が、勾配の形になっていれば、

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}=\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\quad j\neq k$$

をみたす。

例題 9.4. 二変数 (二次元) の場合だと、

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

である。グリーンの公式を想い出せば、このことから閉曲線 C に対して、いつでも

$$\int_C f dx+g dy=0$$

が成り立つと結論できそうであるが、落とし穴がある。原点以外で定義されたベクトル場

$$f(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad g(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

について考えると、$f_y=g_x$ であるにも関わらず、原点を中心とした円 C に対して、

$$\int_C f dx+g dy=2\pi$$

となって、消えない。この原因は、グリーンの公式の右辺の二重積分の範囲の中にベクトル場が定義できない点が入っていることにある。そういった不都合な点が含まれない限り、閉曲線に関する線積分は消える。ということで、上の命題は、必要条件を与えるのであるが、ほとんど十分条件になっていて、ただ、定義域に穴などが開いている場合のみ気をつければよい。

問 55. 中心力を表すベクトル場 $\boldsymbol{F}=g(r)\boldsymbol{r}$ ($r=|\boldsymbol{r}|$ であり g は $r>0$ の関数) について、上の必要条件を確かめ、$\boldsymbol{F}=\nabla\phi$ となる関数 ϕ を求めよ。

10　変分法

高さの異なる２点を指定したとき、その２点をむすぶ滑り台を作ろう。いま、摩擦を無視して重力だけで滑り台を移動するものとして、その移動に要する時間が最小になるような滑り台の形を問う問題について考える。

座標の符号を簡単にするために重力は下から上に働いているものとし、考える２点の座標は $(0,0), (a,h)$ であるとする。

関数 $y=f(x),\ f(0)=0,\ f(a)=h$ で与えられるスロープに対して、高さ y の点での速さ v はエネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

を満たす。一方

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1+f'(x)^2}$$

でもあるので、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gy}{1+f'(x)^2}}$$

となり、これを書き直してから積分すると、滑り台の所要時間は、

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{2gf(x)}}dx$$

となる。右辺の積分は、関数 $f(x)$ だけで決まるので、それを $T[f]$ と書くことにすれば、 $T[f]$ は、いわば、「関数の関数」（汎関数、functional、という）であり、問題は、関数 $f(x)$ を変化させたときの、$T[f]$ の最小値を与える f は何かということになる。

このような「関数の関数」に対する極値問題を変分問題といい、「関数の関数」に対する微分法を **変分法** (calculus of variations) と呼ぶ。

上の場合、変化させる関数は、

$$f(0)=0, \quad f(a)=h$$

となる範囲で考えている。

このような形の、変化させる関数に対する条件を境界条件とよぶ。

一般に、与えられた３変数の関数 $F(x,y,y')$ と２点 (x_j, y_j) $(j=1,2)$ に対して、汎関数

$$F[f] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f(x), f'(x))dx$$

の境界条件

$$f(x_j) = y_j$$

の下での変分問題の解は、次のように考えて求めることができる。

仮に、関数 $f(x)$ が最小値を与えるものだったとして、勝手な関数 g と小さい実数 s に対して

$$f(x) + sg(x)$$

なる関数 $f+sg$、但し境界条件を満たすために $g(x_j)=0$ を仮定しておく、での汎関数の値 $F[f+sg]$ を考える。$F[f+sg]$ を s の関数とみると、$s=0$ で最小値を与えるから

$$\frac{d}{ds}F[f+sg]|_{s=0}=0$$

でなければばならない。

一方、

$$\frac{d}{ds}F[f+sg]=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f+sg,f'+sg')g(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f+sg,f'+sg')g'(x)\right)dx$$

より、

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x),f'(x))g(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))g'(x)\right)dx=0$$

となる。ここで、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))\right)g(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))g'(x)$$

を積分して得られる

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))\right)g(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))g'(x)dx=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}g(x)\right]_{x_1}^{x_2}=0$$

（g の境界条件に注意）を使うと

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)g(x)dx=0$$

となる。関数 $g(x)$ は、自由に選べるので、これから $f(x)$ に対する微分方程式 (Euler-Lagrange's equation)

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x),f'(x))=\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x)).$$

が得られる。あとはこれを解くことになるのだが、$F(x,y,y')$ が (y,y') だけの関数の時には、

$$f'(x)\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)=\frac{d}{dx}\left(F-f'(x)\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

となるので、$f'(x)\neq 0$ である所では、

$$F(f(x),f'(x))-f'(x)\frac{\partial F}{\partial y'}(f(x),f'(x))=\text{const.}$$

という方程式と同値になる。

滑り台の問題の場合だと、

$$F(f(x),f'(x))-f'(x)\frac{\partial F}{\partial y'}(f(x),f'(x))=\frac{1}{\sqrt{y(1+{y'}^2)}}$$

であるから

$$y(1+{y'}^2)=2r$$

という方程式と同値で、これを y' について解くと、

$$y' = \pm\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}.$$

これは変数分離型であるから、

$$\pm\frac{y}{\sqrt{r^2 - (r-y)^2}}dy = dx$$

の形に書き直して積分すると、

$$x = r\theta - r\sin\theta$$
$$y = r - r\cos\theta$$

なるパラメータ表示が得られる。これは、いわゆる、cycloid なる曲線を表している。このうち、滑り台を表すのは $0 \le \theta \le \theta_0$ の部分で、$r > 0$ と $0 < \theta_0 \le 2\pi$ は、

$$a = r\theta_0 - r\sin\theta_0, \quad h = r - r\cos\theta_0$$

で定められる。

付録A　関数の定義域

多変数関数においても、1変数の場合と同様、変域を明示しないで話を進めることもあるが、変域（変数の動く範囲）を認識しておくことは、関数の意味を明確にする上で重要である。とりあえず2変数の場合を扱う。（変数が増えても同様の扱いが可能である。）さて、開区間・閉区間はもっとずっと複雑になる。平面内の図形（部分集合）で、すべての境界点を含むものを閉集合、境界点を一切含まないものを開集合という。（この説明は、実は不十分である。というのは、境界点が何を意味するのかはっきりさせていないから。それでも、直感的には明らかであろう。）閉集合・開集合だけでも十分複雑であるが、平面内の図形としては、開集合でも閉集合でもないものが多数存在する。1次元の場合でも、$(a,b]$, $[a,b)$ といった区間がそうであるし、他にもいろいろある。2次元になれば、その多様性はさらに増す。

一般的に、開集合の補集合は閉集合、閉集合の補集合は開集合であることを注意しておこう。以下では、変域 D は、開集合か閉集合の場合を考える。

例題 A.1.

$$\{(x,y); (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}, \quad \{(x,y); (x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2\}$$

は開集合と閉集合を表し、その間にある勝手な集合は、開集合でも閉集合でもない。

開集合と閉集合との共通部分は、一般に開集合でも閉集合でもない。

問 56. 平面の部分集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ の境界点をどのように定義すべきか検討してみよ。

よく使われ、また重要でもあるので、

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n); x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

という記号を用意しておく。これは、実数を n 個並べたもの全体の集合を表す。既に知っているように、$\mathbb{R} =$ 直線、$\mathbb{R}^2 =$座標平面、$\mathbb{R}^3 =$座標空間であり、$\mathbb{R}^n = n$ 次元座標空間という意味をもつ。$\mathbb{R}^n$ における2点間の距離を

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$$

で定める。距離を使って、$\mathbb{R}^n$ における点列 $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$ $(k = 1, 2, \dots)$ が $a \in \mathbb{R}^n$ に収束するという意味を、

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = a \iff \lim_{k\to\infty} |x(k) - a| = 0$$

で定める。

$|x_j - y_j| \le |x - y| \le |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$ であるので、これは、

$$\lim_{k\to\infty} x_j(k) = a_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

と言い換えることができる。点列の収束を使えば、$D \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合であることを次のように表す（定義する）ことができる。「D から取ってきた点列がある点 $a \in \mathbb{R}^n$ に収束するならば、$a \in D$ である。」

再び平面内の D にもどって、数学では、D の各点 (x, y) を選ぶごとに実数 $f(x, y)$ が決まっている状況を関数という言葉で表し、

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

という記号が好んで使われる。あるいは、省略した形で、関数 $f(x, y)$ $((x, y) \in D)$ のようにも書く。

例題 A.2. (i) 理想気体の圧力 P は、温度 T と体積 V の関数であり、

$$P = R\frac{T}{V}, \quad T > 0, V > 0$$

と表される。ここで、$R > 0$ は気体定数。

(ii) ばねの先に取り付けた質量 m 質点の力学的エネルギー E は、質点の平衡点からのずれ x と質点の運動量 p を使って、

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}x^2, \quad x, p \in \mathbb{R}$$

と表される。ここで、$k > 0$ はバネ定数。

(iii) 直方体の箱の中の物質の密度分布

$$\rho = \rho(x, y, z), \quad a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2, c_1 \le z \le c_2.$$

関数 $f(x, y)$ $((x, y) \in D)$ が $(a, b) \in D$ で連続であるとは、(a, b) に収束する点列 $(x_k, y_k) \in D$ に対していつでも

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = f(a, b)$$

が成り立つこと、と定義する。

次は、最大値・最小値問題を扱う際の基本的な結果である。それを述べるために、用語を一つ導入しておく。部分集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ が有界である (bounded) とは、

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in D \Longrightarrow |x| \le R$$

となるような $R > 0$ があること。要するに、D は無限に広がっていないということ。

定理 A.3. 有界閉集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ の上で定義された連続関数は、最大値・最小値をもつ。

Proof. 唐突ではあるが、二進展開の幾何学的意味を知ってるだろうか。実数 $0 < t < 1$ の二進展開はつぎのようになっている。区間 $[0, 1]$ を二等分する。t が左半分に入っていれば $t_1 = 0$, 右半分に入っていれば $t_1 = 1$ とおく。次に t を含む半区間をさらに二等分し、やはり、t が左半分に入っていれば $t_2 = 0$, 右半分に

入っていれば $t_2=1$ とする。以下、この操作を繰り返して二進数列 $t_1, t_2, \ldots$ を定めると、これが t の二進展開を与える。すなわち、

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{2^n}.$$

これだけの準備をしておいて、定理の証明を述べよう。これが有名な Bolzano の絞りだし論法[*44]である。

簡単のために $D\subset[0,1]\times[0,1]$ とする。さて、f の取り得る値の範囲の上端に近づくように点列 $(x_k, y_k)\in D$ を用意する。このとき f の最大値が存在するならば、その値は

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k, y_k)$$

で与えられることになる。そこで、問題は、この極限値を実現する $(a,b)\in D$ が見つかるかどうか。$[0,1]\times[0,1]$ の縦横を二等分することで、D を４つの部分に分ける。各 (x_k, y_k) は、この４つのうち、どれかに含まれる。そこで、４つのうち、少なくとも一つは、無限個の (x_k, y_k) を含む。それを D_1 とする。D_1 を含む小正方形をさらに４分割し、同様の考えで無限個の (x_k, y_k) を含む D_2 を選ぶ。以下、これを繰り返すと、

$$D_1\supset D_2\supset D_3\supset\ldots$$

という D の部分集合が定まり、各 D_n は、無限個の (x_k, y_k) を含むことになる。そこで、$\{(x_k, y_k)\}$ の部分列 $\{(x_{k'}, y_{k'})\}$ を、$(x_{k'}, y_{k'})\in D_k$ であるように選んでおけば、上の二進展開議論により、実数 $a, b\in[0,1]$ が

$$\lim_{k\to\infty}x_{k'}=a, \lim_{k\to\infty}y_{k'}=b$$

で定められる。ここで、D が閉集合であることを使うと $(a,b)\in D$ がわかり、さらに f が連続関数であることから、

$$f(a,b)=\lim_{k\to\infty}f(x_{k'}, y_{k'})$$

は、f の最大値に一致する。 □

付録B　重積分あれこれ

重積分の定義は難しい。二重積分であれば、体積と結びつけての説明が可能であるし、三重積分だと、$D\subset\mathbb{R}^3$ の体積を $|D|$ で表して

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k, y_k, z_k)|D_k|$$

とでもすればよい。しかし、こういった直感に頼る方法では、変数が４以上の場合の説明に窮する。上の素朴な方法を数学的に正当化するためには、高次元図形の「体積」の意味をはっきりさせる必要があると誰でも思うことだろう。これは実際に可能で、紆余曲折はあったものの、測度論というものに落ち着いた。この測度論の成果の一つに、すべての部分集合に対して面積とか体積を付与することには注意を要するということが明らかになった点を指摘しておく。面積とか体積を定めがたい「図形」というものが存在しうるということことである。

[*44] 実は、ここだけの呼び方である。

重積分に対するもう一つの現実的な対処方法として、くり返し積分を利用するというものがある。歴史的にも、重積分はこの形で現れたものであるらしい[*45]。ただ、現在においては、この方法で重積分を説明することはほとんどないようだ。十分意義のある方法のように思えるのだが。

ある意味で折衷案的なものに[*46] リーマン・ダルブー方式というのがあって、重積分の定義をこれで行うのが伝統的な方法である。伝統的とはいいながら意外と新しい。これは、積分範囲を矩形領域に限定し、その分割方法も区間分割の積に限定して考えるというもので、測度に基づいた積分を導入するまでの間の暫定版という評価をする人も多い。ただ、この暫定版が連続関数に対して有効であるという事実は、測度の構成のところでも実質的に必要となる。先に書いたくり返し積分を出発点にする方法というのは、この実数の連続性に由来する性質がくりかえし積分の形でも取り込まれていて、しかも直接積分の拡張を行う際に十分な形になっているため、無駄が少ないという利点がある。

ということで、数学は道具と心得ている人のための折衷案：

(i) 二重積分・三重積分までは、面積・体積が素朴にあるものとして導入し、具体的な計算方法として、くり返し積分の公式を納得する。その結果、矩形積分において、くり返しの順序によらないことを認識する。

(ii) その次の段階として、一般の矩形領域上の連続関数の積分の定義を、くり返し積分で導入する。そして、収束定理が成り立つように積分可能な関数の範囲を拡張する。その際に、くり返し積分の公式が何らかの意味で成り立つことを確認しておく。一般の領域上の積分を

$$\int_D f(x)\,dx = \int 1_D(x)f(x)\,dx$$

によって定める。ただし、D としては、右辺の関数が積分可能であるもののみを考える。

以上が、個人的に薦める方法で、(i) は、この講義ノートの説明がそのようになっている。(ii) については、http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/integral/integral2007.pdf を見よ。

付録C　くり返し積分から

ここでは、くり返し積分から得られる級数表示にまつわる話を紹介する。

補題 C.1.

$$\int_0^x dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 f^{(n)}(t_1) = f(x) - f(0) - f'(0)x - \cdots - \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)x^{n-1}.$$

Proof. n についての帰納法。 □

補題 C.2.

$$\int_0^x dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 f(t_1) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

[*45] V.J. Katz, A History of Mathematics, によれば、重積分が使われ出したのは，Euler-Lagrange の辺りだった由、体積計算だけでなく表面積の公式もあり、さらには二重積分の変数変換の公式まで得られていたという。

[*46] 折衷案的であるのは、矩形領域で積分を定義して、「図形のかさ」をその支持関数の積分と捉えるため。

Proof. これも、n についての帰納法。

$$\begin{aligned}
&\int_0^x dt_{n+1}\int_0^{t_{n+1}} dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1}\cdots\int_0^{t_2} dt_1 f(t_1)\\
&\qquad = \int_0^x dt_{n+1}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{t_{n+1}} dt\,(t_{n+1}-t)^{n-1}f(t)\\
&\qquad = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x ds\int_0^s dt\,(s-t)^{n-1}f(t)\\
&\qquad = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x dt\int_t^x ds\,(s-t)^{n-1}f(t)\\
&\qquad = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

以上を合わせることで、次の de Prony の公式*47を得る。なお、この証明は、コーシーによるものである。

定理 C.3.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

話題を変えて、n 次正方行列に値をもつ連続関数 $A(t)$ に対して、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$

の解の表示について考える。ここで、

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

は、ベクトルに値をとる t の連続関数である。上の微分方程式を積分すると、

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dt_1 A(t_1)x(t_1)$$

を得る。この右辺の $x(t_1)$ に、

$$x(t_1) = x(0) + \int_0^{t_1} dt_2 A(t_2)x(t_2)$$

を代入すると、

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dt_1 A(t_1)x(0) + \int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 A(t_1)A(t_2)x(t_2)$$

以下、この代入を繰り返すと、

$$\begin{aligned}
x(t) = x(0) &+ \int_0^t dt_1 A(t_1)x(0) + \int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 A(t_1)A(t_2)x(0)\\
&+\cdots+\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} dt_n\,A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)x(0)\\
&+\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_n} dt_{n+1}\,A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_{n+1})x(t_{n+1})
\end{aligned}$$

*47 微積分 I で示した部分積分のくり返しによるのが、de Prony の与えた証明であるらしい。

この最後の項は、

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_n} dt_{n+1} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

であり、

$$A(t_1)\cdots A(t_{n+1})x(t_{n+1}) = O(M^n)$$

と評価できることに注意すれば、$n \to \infty$ のとき、0 に近づくことが分かる。結論として、

$$\begin{aligned} x(t) = x(0) &+ \int_0^t dt_1 A(t_1)x(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1)A(t_2)x(0) \\ &+ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3\, A(t_1)A(t_2)A(t_3)x(0) + \cdots \end{aligned}$$

という級数表示を得る。右辺に共通するベクトル $x(0)$ をくくり出した、行列級数

$$\begin{aligned} U(t) = I &+ \int_0^t dt_1 A(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1)A(t_2) \\ &+ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3\, A(t_1)A(t_2)A(t_3) + \cdots \end{aligned}$$

を**ダイソン級数** (Dyson series) と呼ぶ。とくに、散乱理論における摂動展開で威力を発揮する。

付録D　二次形式の符号

実変数 $x_1, \ldots, x_n$ の二次同次式

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

を $x_1, \ldots, x_n$ の**実二次形式** (real quadratic form) という。二次形式 $Q(x)$ は、対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を使って、

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表示されるので、これを $Q_A(x)$ と書くことにする。正則行列 $T = (t_{ij})$ を使って、変数 $x_1, \ldots, x_n$ に

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

という変数変換を施せば、$Q_A(x) = Q_B(y)$, $B = {}^tTAT$ となる。

定理 D.1 (Lagrange-Sylvester)**.** 任意の実対称行列 A に対して、正則行列 T で、${}^tTAT$ が対角行列になるものが存在する。

また、このようにして得られた対角行列の対角成分に現れる、正数の個数、負数の個数、零の個数は、それぞれ、A の正固有値の個数、負固有値の個数、零固有値の個数に一致する。但し、固有値の個数は重複度も込めて数える。

Proof. 行列 A のサイズに関する帰納法による。対称行列 A の対角成分に零でないものが現れる、例えば、$a_{11} \neq 0$、とすると、

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{11}x_1^2 + 2x_{11}(b_2x_2 + \cdots + b_nx_n) + R(x_2, \ldots, x_n) \\ &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)^2 + R(x_2, \ldots, x_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)^2 \end{aligned}$$

となって、変数変換

$$y_1 = a_{11}x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n, \quad y_j = x_j \ (2 \leq j \leq n)$$

を施せば、

$$Q(x) = \frac{y_1^2}{a_{11}} + R(y_2, \ldots, y_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2y_2 + \cdots + b_ny_n)^2$$

となって、帰納法が機能する。

全ての対角成分が消えていてなおかつ $A \neq 0$ であるときには、$a_{ij} \neq 0$ となる $i \neq j$ が存在する、例えば $a_{12} \neq 0$ である、ときには、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なる変数変換を施せば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となるので、対角成分に零でないものが含まれる場合に帰着する。

次に、「符号数」が変化しないことを見るために、正則行列 T, T' に対して、

$${}^tTDT = A = {}^tT'D'T', \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, D' = \begin{pmatrix} d_1' & & \\ & \ddots & \\ & & d_n' \end{pmatrix},$$

$d_1 > 0, \ldots, d_l > 0$, $d_{l+1} < 0, \ldots, d_{l+m} < 0$, $d_{l+m+1} = \cdots = d_n = 0$ などであったとする。ここで、$l < l'$ と仮定して矛盾を導こう。連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ & \vdots & \\ t_{l1} & \ldots & t_{ln} \\ t'_{l'+1,1} & \ldots & t'_{l'+1,n} \\ & \vdots & \\ t'_{n1} & \ldots & t'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

を考える。$l+(n-l')<n$ であるから、自明でない解 x が存在する。$y=Tx,\ y'=T'x$ とおく。

一方、作り方から $Q(x)={}^tyDy\le 0$ かつ $Q(x)={}^ty'D'y'\ge 0$ で、

$$y'=\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_{l'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$Q(x)=d'_1(y'_1)^2+\cdots+d'_{l'}(y'_{l'})^2=0$$

となって、$y'_1=\cdots=y'_{l'}=0$ となる。すなわち、$T'x=y'=0$ となって、これは $x\neq 0$ に反する。

以上により、$l=l'$ であることがわかる。同様にして、$m=m'$ も導かれる。 □

付録E　対称行列の対角化

行列の対角化は、通常、線型代数の守備範囲であるが、極値問題の二次判定法で必要となるのは、実対称行列で、ベクトルも成分が実数の場合である。特殊であるが故に、代数的手法での処置では、どうしても後の方の話題になってしまい、授業として取り上げられないこともある。ここでは、多変数関数の微分の手法を使って直接的に処理してみよう。使う道具は、ラグランジュ乗数法と連続関数の性質であるので、こちらも単刀直入というわけにはいかないが、微積分の中で扱うという一貫性の利点はあるだろう。なお、本文では、極値の二次判定の節の後で説明したのであるが、ラグランジュ乗数法そのものは、二次判定とは独立な内容であることを注意しておく。

実対称行列 $A=(a_{jk})_{1\le j,k\le n}$ に付随した二次形式

$$Q(x)=\sum_{1\le j,k\le n} a_{jk}x_jx_k$$

を $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ の関数と思う。この関数の最小値を、条件 $|x|^2=(x_1)^2+\cdots+(x_n)^2=1$ の下で求める。まず、拘束条件は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 S (n 次元球面) を定めるので、連続関数 $Q(x)$ を S に制限したものを最小にする点 $c=(c_1,\dots,c_n)\in S$ が存在する。

$$x\in S\Longrightarrow \nabla(|x|^2-1)=2(x_1,\dots,x_n)\neq 0$$

であるので、S 上の点はすべて正則点であり、したがってラグランジュ乗数法により、

$$\nabla Q(c)=\lambda\nabla(|x|^2-1)|_{x=c}$$

をみたす $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在する。両辺の微分を計算すると

$$A\,{}^tc=\lambda\,{}^tc$$

がわかるので、${}^tc$ は、λ を固有値とする A の固有ベクトルである。

あとは、通常の線型代数と同じ議論を繰り返す。すなわち、${}^t c$ を含む正規直交基底 $\{{}^t c, \dots\}$ を選び、これを直交行列と思ったものを T で表せば、

$$
{}^t TAT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}
$$

となるので、問題は、大きさがひとまわり小さくなった行列 B の処理に帰着し、数学的帰納法が扱える。

同様の方法で、エルミート行列の対角化を行うこともできる。また、次の形の一般化は mini-max 原理と呼ばれ、固有値を評価する際に威力を発揮する。

定理 E.1. A の固有値を小さい順に重複度も含めて、$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ と並べるとき、

$$
\lambda_k = \min_{\dim E = k} \max_{0 \neq x \in E} \frac{(x|Ax)}{(x|x)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.
$$

ただし、E は $\mathbb{R}^n$ の部分空間を表す。

付録F　条件付き極値の二次判定

関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ の拘束条件 $\varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ $(1 \leq m \leq r)$ の下での極値を考える。拘束条件をみたす点の集合を S とおく。点 $(a_1, \dots, a_n) \in S$ は、

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}
$$

の階数が r であるとき、正則点と呼ばれる。正則点 $(a_1, \dots, a_n) \in S$ が f の停留点であれば、ラグランジュ乗数法により、

$$
df(a) = \sum_{m=1}^{r} \lambda_m d\varphi_k(a)
$$

をみたす実数 λ_m (Lagrange multiplier) が存在する。正則点の付近では、陰関数定理により S のパラメータ表示

$$
x_j(t_1, \dots, t_{n-r}), \quad 1 \leq j \leq n
$$

が可能であるので、合成関数

$$
F(t_1, \dots, t_{n-r}) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))
$$

を考えることで拘束条件なしの場合に帰着する。F の 2 次微分は、

$$
\frac{\partial^2 F}{\partial t_i \partial t_j} = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \frac{\partial x_l}{\partial t_j} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial t_i \partial t_j}
$$

である。このうち、第二項は、

$$
\sum_m \lambda_m \sum_k \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial t_i \partial t_j}
$$

に等しく、拘束条件を二度微分して得られる関係式

$$
\sum_{k,l} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \frac{\partial x_l}{\partial t_j} + \sum_k \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial t_i \partial t_j} = 0 \quad (m = 1, \dots, r)
$$

を使えば、

$$-\sum_m \lambda_m \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \frac{\partial x_l}{\partial t_j}$$

となるので、これから

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_i \partial t_j} = \Bigl(f'' - \sum_m \lambda_m \varphi_m''\Bigr)\Bigl(\frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial x}{\partial t_j}\Bigr)$$

を得る。ここで、f'' は、f の 2 次微分（すなわち、対称双線型形式）を表す。

したがって、対称双線型形式 $f''(a) - \sum_m \lambda_m \varphi_m''(a)$ を部分空間 $\ker d\varphi(a)$ に制限したもの (reduced Hessian と呼ぼう) が、拘束条件下での Hessian を与える。とくに、これが正定値であれば $(a_1, \ldots, a_n)$ は極小点を、負定値であれば極大点を与える。

以上で要点は尽くされているのであるが、次のような見方も示唆的である。もとの関数 f の変数 $x_1, \ldots, x_n$ に新たに変数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を付け加えた関数

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{m=1}^{r} \lambda_m \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$$

を考えると、これの停留点に対する方程式が、ラグランジュ乗数等式に拘束条件を合わせたものに一致する。この停留点におけるヘッセ行列と reduced Heaasian との関係はどうであろうか。これに関して次が成り立つ。

定理 F.1. Φ のヘッセ行列の符号数は、*reduced Hessian* のそれに、(r, r) を加えたものに一致する。

Proof.

$$H = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}\right), \quad K = -\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}\right)$$

と置くと、Φ のヘッセ行列は、

$$\begin{pmatrix} H & K \\ {}^tK & 0 \end{pmatrix}$$

であり、reduced Hessian は、H を $\ker {}^tK$ で縮小したものになっている。行列 K の階数が r であるから、n 次の正則行列 U と r 次の正則行列 V を適切に選べば、

$$UKV = \begin{pmatrix} 0 \\ I_r \end{pmatrix}$$

とできるので、

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^tV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & K \\ {}^tK & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ {}^tB & C & I_r \\ 0 & I_r & 0 \end{pmatrix}, \qquad UH{}^tU = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix}$$

と書き直すことで、reduced Hessian は、A で与えられる。さらに、

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -B \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ {}^tB & C & I_r \\ 0 & I_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ -{}^tB & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & I_r \\ 0 & I_r & 0 \end{pmatrix}$$

と書きなおせば、Φ のヘッセ行列の符号数は、reduced Hessian である A の符号数に、行列

$$\begin{pmatrix} C & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & C/2 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ C/2 & I_r \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$$

の符号数である (r, r) を加えたものになっている。 □

付録G　曲率と曲率半径

曲率半径 (radius of curvature) とは、大きくカーブしている道路に $R = 300m$ などと書いてある R のことである。曲線を円で二次近似したときの円の半径を表すというのが、その意味である。ここでは、簡単のために平面曲線について考える。また、よくあるような接線の正接角の変化率ではなく、座標変換を利用した解説を試みる。この方法は、曲面の曲率を調べる際にも有効であり、他にもいろいろ使えるのがその理由。

陰関数表示された曲線 $\varphi(x, y) = 0$ 上の正則点 (a, b) における曲率について調べてみよう。法線ベクトル $(\varphi_x(a, b), \varphi_y(a, b))$ を

$$\sqrt{\varphi_x(a, b)^2 + \varphi_y(a.b)^2}\,(\sin\theta, \cos\theta)$$

と表しておく。そして、法線方向を Y 軸とする新たな直交座標系 (X, Y) を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で導入する。また、関数 $\Phi(X, Y)$ を

$$\Phi(X, Y) = \varphi(x, y) = \varphi(X\cos\theta + Y\sin\theta, -X\sin\theta + Y\cos\theta)$$

で定める。新たな関数記号を導入せずに、$\varphi(X, Y) = \varphi(x, y)$ と書くことが多いのであるが、この左辺と右辺で φ の関数としての意味が異なり論理的には正しくないことに注意。こういう省略をなぜするかというと、座標を取り替えるたびに新たな関数記号を導入するのが煩雑なため。座標の取り方から、$\Phi_X(A, B) = 0$, $\Phi_Y(A, B) > 0$ である。そこで、陰関数定理を適用して、$\Phi(X, Y) = 0$ を (A, B) の付近で Y について解いて、$Y = f(X)$ $(B = f(A))$ と表しておくと、

$$\Phi(X, f(X)) = 0$$

が恒等的に成り立つ。これを X について微分することで、

$$\Phi_X(X, f(X)) + \Phi_Y(X, f(X))f'(X) = 0,$$
$$\Phi_{XX}(X, f(X)) + 2\Phi_{XY}(X, f(X))f'(X) + \Phi_{YY}(X, f(X))\left(f'(X)\right)^2 + \Phi_Y(X, f(X))f''(X) = 0$$

を得る。これもしばしば

$$\Phi_X(X, Y) + \Phi_Y(X, Y)\frac{dY}{dX} = 0,$$
$$\Phi_{XX}(X, Y) + 2\Phi_{XY}(X, Y)\frac{dY}{dX} + \Phi_{YY}(X, Y)\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + \Phi_Y(X, Y)\frac{d^2Y}{dX^2} = 0$$

と略記される。今の場合、$\Phi_X(A, B) = 0$ であるから、

$$f'(A) = 0, \quad f''(A) = -\frac{\Phi_{XX}(A, B)}{\varphi_Y(A, B)}$$

がわかり、$Y = f(X)$ に対する二次近似式として、

$$Y = B - \frac{\Phi_{XX}(A, B)}{2\Phi_Y(A, B)}(X - A)^2$$

を得る。ここで、同じ二次近似式を与える円の方程式を求めてみよう。そのためには、$\Phi_{XX}(A,B)/\Phi_Y(A,B)$ の符号で場合を分ける必要があるが、どちらでも違いがないので、これが負である場合を考えよう。点 (A,B) で直線 $Y=B$ に接することから、$(X-A)^2+(Y-B-R)^2=R^2$ の形であることがわかり、これを Y について解いて近似項を求めると、

$$Y = B + R - \sqrt{R^2-(X-A)^2} = B + \frac{1}{2R}(X-A)^2 + \cdots$$

となる。そこで両者を比較して、曲率半径が

$$R = \left|\frac{\Phi_Y(A,B)}{\Phi_{XX}(A,B)}\right|$$

で与えられることがわかる。

　最後に、これを φ の微分を使って書きなおす。

$$\begin{aligned}
\Phi_X(X,Y) &= \varphi_x(x,y)\cos\theta - f_y(x,y)\sin\theta,\\
\Phi_Y(X,Y) &= \varphi_x(x,y)\sin\theta + f_y(x,y)\cos\theta,\\
\Phi_{XX}(X,Y) &= \varphi_{xx}(x,y)\cos^2\theta - 2\varphi_{x,y}(x,y)\cos\theta\sin\theta + \varphi_{yy}(x,y)\sin^2\theta
\end{aligned}$$

に、$\sin\theta = \varphi_x(a,b)/\sqrt{\varphi_x(a,b)^2+\varphi_y(a,b)^2}$, $\cos\theta = \varphi_y(a,b)/\sqrt{\varphi_x(a,b)^2+\varphi_y(a,b)^2}$ を代入すると、曲率を表す公式

$$-\frac{\varphi_y^2\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_x^2\varphi_{yy}}{(\varphi_x^2+\varphi_y^2)^{3/2}}$$

が得られた。曲率半径は、これの絶対値の逆数である。