Kakutani Dichotomy on Free States

Yamagami Shigeru
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

今年もあと２ヶ月足らず、さまざまのこと多くありて、古人の跡を訪ういとまもなく。

２０１１年 ＝ 角谷静夫(1911–2004) **生誕１００年**

1　角谷の二分律

まずは原典にあたれ、ということで
Shizuo Kakutani, On equivalence of infinite product measures, *Ann. of Math.*, 49(1948), 214–224. その序文より引用：

> The results of this paper were much amplified and the arguments used below much simplified, thanks to certain suggestions kindly made by Professor John von Neumann. In particular, the introduction of <u>inner product</u> and <u>isometric embedding</u> of $\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ into a general Euclidean space, as well as the indication of relationship of this paper with earlier works of E. Hellinger, as are discussed in §4, are <u>due to Professor J. von Neumann</u>. For all these I wish to express my heartiest thanks.

可測空間 Ω 上の確率測度全体を $\mathrm{Prob}(\Omega)$ で表す。上では、$\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ となっていた。二つの確率測度 $\varphi, \psi \in \mathrm{Prob}(\Omega)$ に対して、

$$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) = \int_\Omega \sqrt{\frac{d\varphi}{d\mu}(\omega)}\sqrt{\frac{d\psi}{d\mu}(\omega)}\,\mu(d\omega)$$

と置いた*右辺の積分が Hellinger integral と呼ばれるものであり、$\varphi + \psi \prec \mu$ である限り、測度 μ の取り方によらず値が定まる。そして、形式的なベクトル空間

$$E = \sum_{\varphi \in \mathrm{Prob}(\Omega)} \mathbb{R}\, \varphi^{1/2}$$

における内積を与える。これが、角谷の序文に inner product, a general Euclidean space とあったもので、$\mathrm{Prob}(\Omega)$ の E への埋め込みとは、

$$\mathrm{Prob}(\Omega) \ni \varphi \quad \longmapsto \quad \varphi^{1/2} \in E$$

のことである。この埋め込みから $\mathrm{Prob}(\Omega)$ の上に距離 (Hellinger-Kakutani distance)

$$d(\varphi, \psi) = \|\varphi^{1/2} - \psi^{1/2}\| = \sqrt{2 - 2(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2})}$$

が誘導されることに注意。

もともと、E. Hellinger は、積分方程式と二次形式との関係を調べる目的で、このような積分表示を導入したもののようであるが、確率測度を比較する際にも有用で、例えば

$$\varphi \perp \psi \quad \Longleftrightarrow \quad (\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) = 0.$$

測度の同値性と直交性は排反する内容ではないので、$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) \neq 0$ から φ と ψ の同値性がただちに従う訳ではないが、ある条件下の無限直積測度について排反性が成り立つ、というのが角谷の二分律である。

Theorem 1.1 (Kakutani Dichotomy)**.** 直積可測空間 $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ 上の直積確率測度

$$\varphi = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n, \qquad \psi = \prod_{n=1}^{\infty} \psi_n$$

に対して、

$$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (\varphi_n^{1/2}|\psi_n^{1/2})$$

である。さらに、$\varphi_n \sim \psi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であれば、次が成り立つ。

(i) $(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) > 0$ ならば、φ と ψ は同値。
(ii) $(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) = 0$ ならば、φ と ψ は互いに素。

* 角谷の論文では、$\rho(\varphi, \psi)$ という記号が使われている。ここでは natural notation に合わせておいた。

(ii) は、内積の表示式から即座に従うことに注意。証明は、von Neumann による Radon-Nikodym 定理の証明に倣えばよい。例えば、$\varphi_n \prec \psi_n$ かつ $\prod_{n\geq 1}(\varphi_n^{1/2}|\psi_n^{1/2}) \neq 0$ であったとすると、極限

$$\lim_{n\to\infty}\bigotimes_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{d\varphi_k}{d\psi_k}}$$

が $L^2(\Omega, \psi)$ で存在することがわかるので、

$$d\varphi = \left(\bigotimes_{n\geq 1}\sqrt{\frac{d\varphi_n}{d\psi_n}}\right)^2 d\psi$$

となり、$\varphi \prec \psi$ かつ

$$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) = \prod_{n\geq 1}(\varphi_n^{1/2}|\psi_n^{1/2})$$

が従う。

Example 1.2. 正数列 $\alpha = \{\alpha_n\}$ に対して、$\mathbb{R}^\infty = \prod_1^\infty \mathbb{R}$ 上のガウス測度 φ_α を

$$\varphi_\alpha = \prod_{n=1}^{\infty}\varphi_n, \qquad \varphi_n(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_n}e^{-x^2/2\alpha_n^2}dx$$

で定めると、

$$(\varphi_\alpha^{1/2}|\varphi_\beta^{1/2}) = \prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\alpha_n\beta_n}{\alpha_n^2+\beta_n^2}}$$

となり

$$(\varphi_\alpha^{1/2}|\varphi_\beta^{1/2}) > 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha_n-\beta_n)^2}{\alpha_n^2+\beta_n^2} < \infty.$$

以上が角谷二分律の要点であるが、D. Bures は、この結果の作用素環的状況への書き直しを行った。

Donald Bures, An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite W*-algebras, Trans.AMS, 135(1969), 199–212.

semifinite という条件は、少しあとに D. Promislow により取り除かれた。

David Promislow, The Kakutani theorem for tensor products of W*-algebras, Pacific J. Math., 36(1971), 507–514.

以上、いずれも冨田・竹崎理論が出現する前の出来事である。さて、Bures がまずやったことは、「内積」を作用素環的に表現し直すことで、W*代数 A の状態汎関数 φ, ψ に対して、

$$\rho(\varphi,\psi) = \sup\{|(\xi|\eta)|\}, \qquad d(\varphi,\psi) = \inf\{\|\xi - \eta\|\}$$

という 2 つの量を導入した。ただし、ξ, η は、φ, ψ をベクトル状態として表すベクトル全体を動くものとする。すなわち、ξ, η は、A の表現空間内のベクトルで

$$\varphi(a) = (\xi|\pi(a)\xi), \quad \psi(a) = (\eta|\pi(a)\eta), \quad \forall a \in A$$

を満たすもの。上の二つの量の間には、$d(\varphi,\psi) = \sqrt{2 - 2\rho(\varphi,\psi)}$ という関係があるので、実質的に一つである。

とくに $A = L^\infty(\Omega)$ の場合には、それぞれ、$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2})$, $\|\varphi^{1/2} - \psi^{1/2}\|$ に一致するので、確率測度の場合の拡張になっている。一般の場合も、$d(\varphi,\psi)$ は距離 (Bures distance) になっているのであるが、A が非可換な場合には、$\rho(\varphi,\psi)$ が「内積」とはならない。

Example 1.3. 状態 φ, ψ が、トレース τ と $a \geq 0$, $b \geq 0$ を使って

$$\varphi(x) = \tau(ax), \quad \psi(x) = \tau(bx), \quad x \in A$$

と書けるときは、

$$\rho(\varphi,\psi) = \tau(|a^{1/2}b^{1/2}|).$$

とくに、$A = \mathcal{B}(\mathcal{H})$、$a = |\xi)(\xi|$, $b = |\eta)(\eta|$ に対しては、$\rho(\varphi,\psi) = |(\xi|\eta)|$ となる。この事実をふまえて、A. Uhlmann は、$\rho(\varphi,\psi)^2$ を状態間の遷移確率と呼んだ。

Theorem 1.4 (Bures-Promislow)**.** W*代数とその上の (正規) 状態の列 $\varphi_n : A_n \to \mathbb{C}$ に対して、$A = \bigotimes_{n=1}^\infty (A_n, \varphi_n)$ 上の積状態を $\varphi = \bigotimes \varphi_n$ で定める。このとき、別の (正規) 状態列 $\{\psi_n\}$ に対して、$\psi = \bigotimes \psi_n$ が、A の正規状態として存在するための必要十分条件は、

$$\prod_{n \geq 1} \rho(\varphi_n, \psi_n) > 0$$

であり、このとき、次が成り立つ。

$$\rho(\varphi,\psi) = \prod_{n=1}^\infty \rho(\varphi_n, \psi_n).$$

これの応用として、積状態の同値性の判定についての結果を導くことができるのであるが、詳細は略す。

2　遷移確率をめぐって

以上の「古典的」結果を冨田・竹崎理論 (modular theory) の立場から見なおしてみよう。そのために、natural notation を導入しておく。ベクトル空間 V 上の**両線型形式**[†] (sesqui-linear form) で半正定値なもの、$\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ $(x,y \in V)$ に対して、その geometric interpolation $\alpha^t\beta^{1-t}$ $(0 \leq t \leq 1)$ を、Pusz-Woronowicz に従い、

$$\alpha^t\beta^{1-t}(x,y) = (\imath(x)|A^tB^{1-t}\imath(y)), \quad x,y \in V$$

で定める。ここで、$\imath : V \to \mathcal{H}$ はヒルベルト空間への埋込みを表し、α, β は、交換可能な正作用素 A, B を使って

$$\alpha(x,y) = (\imath(x)|A\,\imath(y)), \qquad \beta(x,y) = (\imath(x)|B\,\imath(y))$$

と表されるものとする。こうやって定めた両線型形式 $\alpha^t\beta^{1-t}$ は、少し議論を要するが、表現 $\imath : V \to \mathcal{H}$ のとり方によらないことがわかる。$t = 1/2$ の場合を幾何平均といい、$\sqrt{\alpha\beta}$ とも書く。以下で必要になるのは、この場合だけであるが、$\alpha^t\beta^{1-t}$ 自体も重要な量で、t に関する微分が各種エントロピー (divergence) と密接に関係していることを指摘しておこう。

C*代数 A の上の状態 φ, ψ と $x, y, x'y' \in A$ に対して、形式的なベクトル $x'\varphi^{1/2}x$ と $y\psi^{1/2}y'$ の間の内積を

$$(x'\varphi^{1/2}x|y\psi^{1/2}y') = \sqrt{\alpha\beta}(y^*x', y'x^*)$$

で定める。ここで、A 上の両線型形式 α, β は

$$\alpha(x,y) = \varphi(x^*y), \quad \beta(x,y) = \psi(yx^*), \quad x,y \in A$$

と置いた。行列代数のときに、状態汎関数を密度行列で表し、α を右からの、β を左からの行列積で表現して $\sqrt{\alpha\beta}$ を計算してみると仕組みがわかるのだが、先を急ごう。

ベクトル空間 $\sum_\varphi A\varphi^{1/2}A$ を上の内積で完備化したヒルベルト空間を $L^2(A)$ で表すと、$L^2(A)$ は、普遍 W* 代数 A^{**} の standard space に一致する。また、A がすでに W*代数のときは、φ として正規なものに限定して得られる部分空間を考えると、それが A の standard space に一致する。いずれの場合も、$L^2(A)$ は A の元を左右どちらからでも掛けられるようになっていて、いわゆる双加群の構造を有する。

[†] sesqui に両の字をあててみた。「両」の意味：相対して一組となるものの双方。例：両親、両手。

内積の式は、とくに、

$$\varphi(x^*y) = (x\varphi^{1/2}|y\varphi^{1/2}), \quad \varphi(yx^*) = (\varphi^{1/2}x|\varphi^{1/2}y)$$

を含むので、$\varphi^{1/2}$ は、GNS vector を実現するものになっている。

また、$x = y = x' = y' = 1$ に対する

$$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) \geq 0$$

は、角谷の扱った「内積」の自然な拡張になっている。

Example 2.1. A 上のトレース τ を使って、$\varphi(x) = \tau(ax)$, $\psi(x) = \tau(bx)$ と書けるならば、

$$(x'\varphi^{1/2}x|y\psi^{1/2}y') = \tau(a^{1/2}(x')^*yb^{1/2}y'x^*).$$

とくに、$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) = \tau(a^{1/2}b^{1/2})$ である。一方 $\rho(\varphi,\psi) = \tau(|a^{1/2}b^{1/2}|)$ であった。また、τ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の標準トレース、$a = |\xi)(\xi|$, $b = |\eta)(\eta|$ ととると、$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) = |(\xi|\eta)|^2$ がわかるので、これもある種の**遷移確率** (transition probability) を表す。$\rho(\varphi,\psi) = |(\xi|\eta)|$ との違いに注意。

Proposition 2.2 (cf. [17]). 状態 φ, ψ に対して、

$$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2})^2 \leq \rho(\varphi,\psi)^2 \leq (\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}).$$

これは、本質的に、シュワルツ不等式である。とくに、

$$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) > 0 \iff \rho(\varphi,\psi) > 0$$

であるので、遷移確率が消えるか否かは、どちらの定義でも同じことである。

この自然な内積あるいは遷移確率 $(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2})$ は、状態の表現論的性質と密接に関連している。例えば、φ と ψ の GNS 表現が互いに素であれば、状態間の遷移は起こらない。可換の場合と違って、この逆が成り立たないことは、2×2 行列を思えば明らか。

Theorem 2.3 ([17]). C* 環 A が、単位的 C* 環の増大列 A_n の極限として表されているとする。A の状態 φ, ψ が、条件

$$\forall a \in A, \exists \{a_n \in A_n\}_{n\geq 1}, \lim_{n\to\infty} a_n\varphi^{1/2} = a\varphi^{1/2}, \lim_{n\to\infty} \psi^{1/2}a_n = \psi^{1/2}a$$

をみたすとする。このとき、$\varphi_n = \varphi|_{A_n}$, $\psi_n = \psi|_{A_n}$ とおけば、

$$(\varphi_n^{1/2}|\psi_n^{1/2}) \searrow (\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) \quad (n\to\infty).$$

Corollary 2.4. $A = \bigotimes_{n=1}^{\infty} A_n$ 上の積状態 $\varphi = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \varphi_n$, $\psi = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \psi_n$ に対して、

$$(\varphi^{1/2}|\psi^{1/2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (\varphi_n^{1/2}|\psi_n^{1/2}).$$

3 量子代数の自由状態

一般的な準備はこれくらいにして、量子代数の自由状態に話題を進めよう。量子代数には様々なものがあるが、ここで扱うのは、正準交換関係代数と正準反交換関係代数である。数学としては、Weyl 代数と Clifford 代数と言ってもよい。測度との関連がより直接的な Weyl 代数の説明から始めよう。出発点は、交代形式 σ をもった実ベクトル空間 V である。交代形式 $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ は、

$$\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$$

を満たすもので、非退化のときは、symplectic form と呼ばれる。さて、Weyl 代数とは、記号 e^{ix} $(x \in V)$ から次の関係で生成される*代数をいう。

$$(e^{ix})^* = e^{-ix}, \quad e^{ix}e^{iy} = e^{-i\sigma(x,y)/2}e^{i(x+y)}, \quad x, y \in V.$$

上の関係から e^{i0} は単位元となり、e^{ix} はユニタリーであることに注意。Weyl 代数上の C*ノルムのうち最大なものに関する完備化として得られる C* 代数を $C(V, \sigma)$ と書き **CCR 代数** (CCR algebra) と呼ぶことにする。

Definition 3.1. CCR 代数の状態 φ は、

$$\varphi(e^{ix}) = e^{-S(x,x)/2}, \quad x \in V$$

の形のとき、**自由状態** (free state‡) という。ここで、S は、V の複素化である $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ 上の正両線型形式 (positive sesqui-linear form) を表す。これを φ の**分散形式** (covariance form) と呼ぶ。自由状態は S で定まるので、$\varphi = \varphi_S$ ともかく。

Proposition 3.2. $V^{\mathbb{C}}$ 上の正両線型形式 S が分散形式であるための必要十分条件は、

$$S - \overline{S} = i\sigma$$

となること。ここで、$\overline{S}(x, y) = \overline{S(\overline{x}, \overline{y})}$ であり、右辺の σ は、$V^{\mathbb{C}}$ の両線型形式に拡張したものを表す。

‡ quasifree state と呼び慣わされているが、Fock state という言い方があるので quasi は取った。

Example 3.3. $\sigma \equiv 0$ の場合は、S の満たすべき条件は、$S = \overline{S}$ となり、これは、V 上の正二次形式を考えることに他ならない。そして、可換 C*代数 $C(V,\sigma)$ 上の状態 φ_S は、S を共分散とするガウス測度に関する積分に他ならない。

Example 3.4. V が有限次元で、σ が symplectic form の場合には、すべての自由状態が、重複度を除いて同値な表現を与える (Stone-von Neumann)。 別の言い方をすると、

$$\overline{C(V,\sigma)\varphi_S^{1/2}C(V,\sigma)} \subset L^2(C(V,\sigma))$$

は、S のとり方によらない。

(V,σ) そのものには関数解析的な意味での位相はないのであるが、ひとたび分散形式 S が与えられると、$S+\overline{S}$ によって規定される内積位相が意味をもってくる。ただし、これは半正定値でしかないので、完備化は、その核で割った後に行う必要がある。こうして得られるヒルベルト空間を $V_S^{\mathbb{C}}$ で表す。これが、あとで見る CAR 代数の場合との大きな違いの一つで、解析的扱いを面倒にする。

Theorem 3.5 ([18])**.** CCR 代数 $C(V,\sigma)$ 上の自由状態 φ_S, φ_T に対して、

$$(\varphi_S^{1/2}|\varphi_T^{1/2}) = \det\left(\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}\right), \quad A = S+\overline{S}+2\sqrt{S\overline{S}},\ B = T+\overline{T}+2\sqrt{T\overline{T}}.$$

ここで、右辺の行列式は、$2\sqrt{AB}$ を $A+B$ に関する正作用素で表したものの Fredholm determinant を意味する。とくに、

$$\mathrm{trace}\frac{(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2}{A+B} = \infty \quad \Longrightarrow \quad (\varphi_S^{1/2}|\varphi_T^{1/2}) = 0$$

である。

Theorem 3.6 (CCR Dichotomy)**.** CCR 代数 $C(V,\sigma)$ 上の自由状態 φ_S, φ_T に対して、次は同値。

(i) φ_S と φ_T は、同一の W*代数を生成する。すなわち、

$$\overline{C(V,\sigma)\varphi_S^{1/2}C(V,\sigma)} = \overline{C(V,\sigma)\varphi_T^{1/2}C(V,\sigma)}.$$

(ii) $V_S^{\mathbb{C}} = V_T^{\mathbb{C}}$ であり、$\sqrt{S}+\sqrt{\overline{S}}-\sqrt{T}-\sqrt{\overline{T}}$ はヒルベルト・シュミット作用素による表示を持つ。

(iii) $(\varphi_S^{1/2}|\varphi_T^{1/2}) > 0.$

また、$(\varphi_S^{1/2}|\varphi_T^{1/2}) = 0$ であることと GNS 表現が互いに素であることは同値。

Proof. (i) $\iff$ (ii) の同値性については、古くから色々な人たちの結果がある。上の形のものは [3] による。今回新たに付け加わったところは、(ii) $\iff$ (iii) の同値性と、後半の dichotomy の部分である。 $\square$

最後に、CCR 代数の相方である CAR 代数の自由状態についての dichotomy を述べておこう。今度は、実ヒルベルト空間 V から出発する。その内積を (x, y) で表して、V から次の関係で線型に生成される単位的*代数をクリフォード代数という。

$$x^* = x, \quad xy + yx = (x, y)1, \quad x, y \in V.$$

クリフォード代数の上には C*ノルムが丁度一つ存在するので、そのノルムに関する完備化を $C(V)$ で表し、**CAR 代数** (CAR algebra) と呼ぶ。複素ヒルベルト空間 $V^{\mathbb{C}}$ 上の正作用素 S で、$S + \overline{S} = I$ を満たすものを、**分散作用素** (covariance operator) と呼ぶ。与えられた分散作用素に対して、**自由状態** (free state) と呼ばれる CAR 代数の状態 φ_S で、$\varphi_S(xy) = (x|Sy)$ $(x, y \in V)$ をみたすものを標準的に構成することができる。この場合にも、遷移確率 $(\varphi_S^{1/2}|\varphi_T^{1/2})$ に関する閉じた公式を与えることが可能であるが、次の結果に直接関係しないこともあり省略する。

Theorem 3.7 (CAR Dichotomy)**.** CAR 代数 $C = C(V)$ 上の自由状態 φ_S, φ_T に対して、次の何れかが成り立つ。

(i) $\varphi_S \sim \varphi_T \iff \overline{C\varphi_S^{1/2}C} = \overline{C\varphi_T^{1/2}C} \iff \mathrm{trace}(S^{1/2} - T^{1/2})^2 < \infty.$
(ii) $\varphi_S \perp \varphi_T \iff \overline{C\varphi_S^{1/2}C} \perp \overline{C\varphi_T^{1/2}C} \iff \mathrm{trace}(S^{1/2} - T^{1/2})^2 = \infty.$

この場合は、CCR と違って遷移確率による二分律の判別はできないのであるが、それについての詳しいことは、またの機会にということで。

汲めども尽きぬ量子の泉、その味わいをこそ。災い果てぬ年の秋彼岸を前に。

参考文献

[1] P.M. Alberti and A. Uhlmann, On Bures distance and *-algebraic transition probability between inner derived positive linear forms over W*-algebras, *Acta Appl. Math.*, 60(2000), 1–37.

[2] H. Araki, On quasifree states of CAR and Bogoliubov automorphisms, *Publ. RIMS*, 6(1970), 385–442.

[3] H. Araki and S. Yamagami, On quasi-equivalence of quasifree states of the canonical commutation relations, *Publ. RIMS*, 18(1982), 703–758.

[4] V.I. Bogachev, *Gaussian Measures*, Amer. Math. Soc., 1998.

[5] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*, Springer-Verlag, 1979.

[6] J. Feldman, Equivalence and perpendicularity of gaussian processes, *Pacific J. Math.*, 8(1958), 699–708.

[7] J. Manuceau, M. Sirugue, D. Testard and A. Verbeure, The smallest C*-algebra for canonical commutations relations, *Commun. Math. Phys.*, 32(1973), 231–243.

[8] T. Matsui and Y. Shimada, On qusifree representations of infinite dimensional symplectic group, *J. Funct. Analysis*, 215(2004), 67–102.

[9] W. Pusz and S.L. Woronowicz, Functional calculus for sesquilinear froms and the purification map, *Rep. Math. Phys.*, 8(1975), 159–170.

[10] G.A. Raggio, Comparison of Uhlmann's transition probability with the one induced by the natural cone of von Neumann algebras in standard form, *Lett. Math. Phys.*, 6(1982), 233–236.

[11] H. Scutaru, Transition probabilities between quasifree states, arXiv:quant-ph/9908061.

[12] I.E. Segal, Distributions in Hilbert space and canonical systems of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88(1958), 12–41.

[13] D. Shale, Linear symmetries of free Boson fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103(1962), 149–167.

[14] B. Simon, *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, 1974.

[15] A. Van Daele, Quas-equivalence of quasi-free states on the Weyl algebra, *Commun. Math. Phys.*, 21(1971), 171–191.

[16] S.L. Woronowicz, On the purification map, *Commun. Math. Phys.*, 30(1973), 55–67.

[17] S. Yamagami, Geometric mean of states and transition amplitudes, *Lett. Math. Phys.*, 84(2008), 123–137.

[18] S. Yamagami, Geometry of quasi-free states of CCR algebras, *Internat. J. Math.*, 21(2010), 875–913.